Written in accordance with the Syllabus approved by the Board of Secondary Education, West Bengal, for Class XI Schools of West Bengal.
(Vide Circular No. HS/1/58, dated 7th March, 1958)

উচ্চ মাধ্যমিক আবশ্যিক গণিত

[Core Mathematics—Complete]

বীজগণিত, জ্যামিতি, পাটীগণিত, পরিমিতি,
গোলক জ্যামিতি ও রাশি-বিজ্ঞান

নবম ও দশম শ্রেণী

কলিকাতা সুরেন্দ্রনাথ কলেজিয়েট স্কুলের প্রধান গণিত-শিক্ষক
শ্রীচারুচন্দ্র চক্রবর্তী
ও
কলিকাতা রাণীভবানী স্কুলের প্রধান গণিত-শিক্ষক
শ্রীমানদাচরণ গুপ্ত
প্রণীত

বাণীমন্দির
14, কলেজ স্কোয়ার, কলিকাতা-12

মূল্য 7 টাকা 50 ন. প.

HIGHER SECONDARY SYLLABUS

Elementary Mathematics

It is expected that this course will be covered in the first two years, i.e., in classes IX and X. On this supposition the course is indicated class-wise as below :—

(This course is intended to be mainly a revision of the work done in earliest classes and reoriented to the use of Mathematics in daily life. The teacher is only expected to define the various terms used in the course content and show their practical utility. It is not desired that he should burden the student with too many mathematical details, methods and problems.)

Class IX

Unit 1.—**Arithmetic :** All questions should be straightforward. Applications of Algebra should be permitted in Arithemetic.

Revision of previous work—Vulgar and Decimal Fractions including Recurring Decimals ; Practice ; Extraction of Square Root ; Square and Cubic measures ; Simple ideas of Approximation (excluding Contracted method and Infinite Series) ; Simple Examples of Unitary Method including Time and Work, Time and Distance ; Percentages and Easy Cases of Simple Interest.

Simple Interest ; Compound Interest (Calculation of interest only) ; Profit and Loss.

Unit 2—**Algebra :** Revision of previous work—Directed Numbers ; Fundamental Laws : Problems and Simple Equations ; the following Formulae with their applications :

$(a+b)^2$, $(a-b)^2$, a^2-b^2, $(a+b)^3$, $(a-b)^3$, a^3+b^3, a^3-b^3 ;
Easy Factors ; H.C.F. ; L.C.M. ; Easy Fractions. Simple Simultaneous Equations involving two unknowns ; Problems leading to Equations, Simple and Simultaneous ; Graphs of Simple Equations.

UNIT 3—**Geometry :** *Theoretical*—Revision of previous work as indicated in the Board's Syllabus up to class VIII.

To prove—

1. The opposite sides and angles of a parallelogram are equal, each diagonal divides the parallelogram into two congruent triangles and diagonals of a parallelogram bisect one another.

2. A quadrilateral is a parallelogram if (i) both pairs of opposite sides are equal ; or (ii) both pairs of opposite angles are equal ; or, (iii) one pair of opposite sides are equal and parallel ; or (iv) its diagonals bisect one another.

3. If there are three or more parallel straight lines, and the intercepts, made by them on any straight line that cuts them are equal, then the corresponding intercepts on any other straight line that cuts them are also equal.

The straight line drawn through the middle point of one side of a triangle parallel to another side bisects the third side. The straight line joining the middle points of two sides of a triangle is parallel to the third side and is equal to half of it.

4. The formal proof should be preceded by practical work with squared paper in all the cases of paragraph 4—

(i) Parallelograms on the same base and between the same parallels (or, of the same altitude) are equal in area.

(ii) Triangles on the same base (or on equal bases) and between the same parallels (or, of the same altitude) are equal in area.

(iii) Equal triangles on the same base and on the same side of it are between the same parallels.

(iv) If a triangle and a parallelogram stand on the same base and are between the same parallels, the area of the triangle is half that of the parallelogram. In a right-angled triangle the square on the hypotenuse is equal to the sum of the squares on the sides containing the right angle.

If a triangle is such that the square on one side is equal to the sum of the squares on the other two sides, then the angle contained by these two sides is a right angle.

To prove—

5. The locus of points which are equidistant from two fixed points is the perpendicular bisector of the straight line joining the two fixed points.

The locus of points which are equidistant from two intersecting straight lines consists of the pair of straight lines which bisect the two angles between the two given lines.

(6) (i) The perpendicular drawn to the sides of a triangle from their middle points are concurrent.

(ii) The bisectors of the angles of a triangle are concurrent.

(iii) The medians of a triangle are concurrent.

Practical—Revision of previous work. (1) Bisection of angles and straight lines ; (2) Construction of a perpendicular to a straight line ; (3) Construction of an angle equal to a given angle ; (4) Construction of parallels to given straight lines ; (5) Construction of triangles with given parts ; (6) Division of a straight line into a given number of equal parts ; (7) Construction of a parallelogram equal to a given triangle and having one of its angles equal to a given angle ; (8) Construction of a triangle equal in area to a given rectilineal figure.

Class X

Unit 1.—**Arithmetic :** All questions should be straightforward. Applications of Algebra should be permitted in Arithemetic.

Ratio and Proportion ; Simple Examples on Unitary Method including Direct Problems on Income-Tax, Foreign Exchange and Draft ; Metric System (Simple cases).

Unit 2—**Statistics :** Frequency Tables ; Averages—Mean, Median and Mode ; Mean and Standard Deviations ; Graphical

Representations—Histogram, Frequency Polygon. [All data used for imparting the above-mentioned rudiments of Statistics should be collected by the pupils themselves. Examples: Weights, heights, ages of pupils, their school attendance and progress in studies, etc.]

UNIT 3—**Algebra :** Simple quadratic equation as can be solved by easy factorisation.—Graphical Solutions of Simultaneous Equations of the First Degree ; Ratio and Proportion.

UNIT 4—**Geometry :** *Theoretical* : To prove—

1. There is one circle and, only one which passes through three given points not in a straight line.

2. Axioms—In equal circles (or, in the same circle) equal chords cut off equal arcs and subtend equal angles at the centre and conversely.

To prove—

3. A straight line, drawn from the centre of a circle to bisect a chord which is not a diameter, is at right angles to the chord and conversely.

4. In equal circles (or, in the same circle) equal chords are equidistant from the centres and conversely.

5. The angle which an arc of a circle subtends at the centre is double that which it subtends at any point on the remaining part of the circumference.

6. Angles in the same segment of a circle are equal, and if the line joining two points subtends equal angles at two other points on the same side of it, the four points lie on a circle.

7. The angle in a semi-circle is a right angle ; the angle in a segment greater than a semicircle is less than a right angle ; and the angle in a segment less than a semi-circle is greater than a right angle.

8. The opposite angles of any quadrilateral inscribed in a circle are supplementary and the converse.

The following theorems are also to be included—

(i) The tangent at any point of a circle and its radius through the point are perpendicular to one another ; (ii) The two tangents to a circle from an external point are equal and they subtend equal angles at the centre ; (iii) If two circles touch, the point of contact lies in the straight line through the centre.

Practical : Simple cases of construction of circles ; construction of Designs with Geometrical Figures.

UNIT 5 (a)—**Mensuration :** Area of a Triangle ; Circumference and Area of a Circle ; Surface and Volume of a Rectangular Parallelepiped, Cylinder and Sphere.

UNIT 5 (b)—**Geometry of Sphere :** Elementary ideas of Geometry of a Sphere leading to the definition of Latitude, Longitude.

The following demonstrations and experiments are suggested for class X, in connection with the different units, as indicated below :—

(*Note*—"D" stands for demonstration and "E" for experiment).

UNIT 1—**Arithmetic :** D. Explanation of specimen Cheques ; Drafts ; Bills ; Foreign Currencies ; etc.

UNIT 2—**Statistics :** E. Determination of weights, heights and ages of pupils and their Graphical Representations.

UNIT 4—**Geometry :** D. Eplanation of Models of Geometrical Figures.

UNIT 5 (a)—**Mensuration :** E. Measurement of Areas of Rectangular Figures and Triangles ; Circumference and Area of a Circle.

UNIT 5 (b)—**Geometry of Sphere :** D. Geometry of Sphere.

বীজগণিত

নবম শ্রেণীর পাঠ্যাংশ

প্রথম অধ্যায়

সাধারণ ও নিয়ন্ত্রিত সংখ্যা

1. পাটীগণিতে '+' এবং '−' চিহ্ন দুইটি সংখ্যার মধ্যে বসিয়া বিশেষ বিশেষ প্রক্রিয়া সূচিত করে। যেমন '5 + 3' ইহাদ্বারা 5এর সহিত 3 যোগ করিতে হইবে এই প্রক্রিয়া নির্দেশ করিতেছে। তদ্রূপ '5 − 3' ইহাদ্বারা 5 হইতে 3 বিয়োগ করিতে হইবে এই প্রক্রিয়া নির্দেশ করিতেছে। উক্ত স্থলে + এবং − চিহ্ন দুইটি মাত্র বিশেষ বিশেষ প্রক্রিয়া সূচক, কিন্তু উহারা 5 বা 3 কোন সংখ্যারই অংশভূত নহে। উহারা সংখ্যা হইতে সম্পূর্ণ বিচ্ছিন্ন। এইরূপ চিহ্নহীন গণনামূলক সংখ্যাকে **সাধারণ সংখ্যা** (Common number) বলে। এইরূপ সংখ্যা মাত্র গণনা কার্যেই ব্যবহৃত হইয়া থাকে, যেমন মানুষের হাত কয়খানি? উত্তর 2. প্রত্যেক হাতে কয়টি আঙ্গুল? উত্তর 5. এই ঝুড়িতে কয়টি আম? উত্তর 75-টি. এস্থলে, 2, 5, 75 সাধারণ সংখ্যা।

কিন্তু এইরূপ সাধারণ সংখ্যা দ্বারা সব সময় সব কিছুর অর্থ স্পষ্ট প্রতীয়মান হয় না। গতকল্য ও অদ্যকার তাপমাত্রার পার্থক্য 5° ডিগ্রী। পার্থক্য 5° এই কথা দ্বারা বিশেষ কোন অর্থ বোধ হয় না। 5° ডিগ্রী বেশী বা কম না বলিলে তাপমাত্রা সম্বন্ধে কোন ধারণাই হয় না। A ও B এর বয়সের পার্থক্য 5 বৎসর—ইহাতে A বা B, কাহার বয়স বেশী কিছুই বুঝা যায় না, কিন্তু A-র বয়স অপেক্ষা B এর বয়স 5 বৎসর বেশী বা B-র বয়স অপেক্ষা A-র বয়স 5 বৎসর কম, অর্থাৎ 5 বৎসরের সঙ্গে

বেশী বা কম এইরূপ একটি বিশিষ্টার্থক শব্দ ব্যবহার না করিলে মাত্র 5 বৎসর দ্বারা A ও B-এর মধ্যে কে বড়, কে ছোট এই সম্বন্ধে প্রকৃত অর্থ বোধ হয় না।

একটি ঘড়ির ক্রয়-মূল্য ও বিক্রয়-মূল্যের তফাত 10 টাকা। এই কথাটি সম্পূর্ণ নিরর্থক। ইহাতে লাভ হইল কি লোকসান হইল কিছুই বুঝা যায় না। ক্রয়-মূল্য অপেক্ষা বিক্রয়-মূল্য 10 টাকা বেশী বা কম এই দুইটি কথার একটি কথা 10 টাকা এই সংখ্যাটির সহিত যুক্ত না হওয়া পর্যন্ত প্রকৃত অবস্থার যথার্থ ধারণা জন্মে না।

একখানি ট্রেন 6-টায় ছাড়ে। পূর্বাহ্ণ কি অপরাহ্ণ ।টা6 না বলিলে ট্রেন ছাড়ার সময় সম্বন্ধে কোন ধারণাই জন্মে না।

এইরূপ বিশিষ্টার্থে ব্যবহৃত সংখ্যাকে **নিয়ন্ত্রিত সংখ্যা** (Directed number) বলে।

এইরূপে হ্রাস-বৃদ্ধি, লাভ-ক্ষতি, প্রভৃতি মূলতঃ সংখ্যাবোধক হইলেও ইহারা বিপরীত প্রকৃতি বিশিষ্ট। বীজগণিতে ঐরূপ নিয়ন্ত্রিত রাশির প্রকৃতিগত বৈষম্য বা বিপরীতার্থ বুঝাইবার জন্য সাধারণ সংখ্যার পূর্বে + ও − চিহ্ন যুক্ত করা হয় এবং ঐ চিহ্ন দুইটির যে কোন একটি যে রাশির সহিত যুক্ত হয় উহা তাহারই অবিচ্ছেদ্য অঙ্গরূপে পরিগণিত হয়। পাটীগণিতে ব্যবহৃত + ও − এর মত তখন আর উহারা বিশেষ প্রক্রিয়া সূচক নহে। প্রকৃতপক্ষে উহারা বীজগণিতীয় রাশির প্রকৃতিবোধক।

10 টাকা লাভ বুঝাইবার জন্য যদি আমরা $+10$ বলি, তাহা হইলে
10 টাকা ক্ষতি বুঝাইবার জন্য আমরা -10 বলিব।
এইরূপ x-বৎসর বেশী বুঝাইবার জন্য আমরা বলি $+x$ বৎসর
এবং x-বৎসর কম বুঝাইবার জন্য আমরা বলি $-x$ বৎসর।

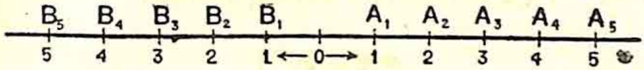
এইরূপে বিপরীত প্রকৃতির দুইটি রাশির একটিকে + চিহ্ন দ্বারা চিহ্নিত করিলে অপরটিকে − চিহ্ন দ্বারা চিহ্নিত করা হয়।

+ চিহ্ন যুক্ত নিয়ন্ত্রিত সংখ্যাকে **ধন সংখ্যা** (Positive number) এবং − চিহ্ন যুক্ত নিয়ন্ত্রিত সংখ্যাকে **ঋণ সংখ্যা** (Negative number) বলা হয়।

ধনরাশিবোধক + চিহ্নটি সাধারণতঃ উহ্য থাকে, কিন্তু প্রক্রিয়াবোধক + চিহ্নটি কখনও উহ্য থাকে না।

ধনরাশি বা ঋণরাশির চিহ্ন-নিরপেক্ষ মানকে উহার **পরম মান** (Absolute value) বলে। $+5$ এবং -5 উভয়ের পরম মান 5, $+x$ এবং $-x$ উভয়ের পরম মান x.

2. লৈখিক চিত্রের সাহায্যে ধন ও ঋণ রাশির ধারণা।



যে কোন একটি সরলরেখা লও এবং মাঝামাঝি জায়গায় O একটি বিন্দু লও। এই O বিন্দুটি হইল মূল বিন্দু (Origin) বা প্রারম্ভিক বিন্দু (Starting Point). সুবিধামত যে কোন দৈর্ঘ্যকে মাইলের একক ধরিয়া O বিন্দুর ডান দিকে $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5,\cdots$প্রভৃতি বিন্দু লও এবং মনে কর OA_1, OA_2, OA_3, OA_4, $OA_5,\cdots$যথাক্রমে $(+1)$, $(+2)$, $(+3)$, $(+4)$, $(+5),\cdots$ইত্যাদি নিয়ন্ত্রিত ধনসংখ্যা প্রকাশ করিতেছে।

এইরূপে O বিন্দুর বামদিকে একই মাপে $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5,\cdots$প্রভৃতি বিন্দু বসাও এবং মনে কর, OB_1, OB_2, OB_3, OB_4, $OB_5,\cdots$যথাক্রমে (-1), (-2), (-3), (-4), (-5), ইত্যাদি নিয়ন্ত্রিত ঋণসংখ্যা প্রকাশ করিতেছে।

O দ্বারা শূন্য সংখ্যা সূচিত হইতেছে।

এখন, $OA_1=(+1)$ মাইল $\qquad OB_1=(-1)$ মাইল

$OA_2=(+2)$ মাইল $\qquad OB_2=(-2)$ মাইল

$OA_3=(+3)$ মাইল $\qquad OB_3=(-3)$ মাইল

$OA_4=(+4)$ মাইল $\qquad OB_4=(-4)$ মাইল

$OA_5=(+5)$ মাইল $\qquad OB_5=(-5)$ মাইল

দৈর্ঘ্যের একক না ধরিয়া টাকার একক ধরিলে,

$OA_1=(+1)$ টাকা $\qquad OB_1=(-1)$ টাকা

$OA_2=(+2)$ টাকা $\qquad OB_2=(-2)$ টাকা, ইত্যাদি।

পাটীগণিতে 0 শূন্য অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর সংখ্যার ব্যবহার নাই। কিন্তু বীজগণিতে 0 শূন্য অপেক্ষাও ক্ষুদ্রতর সংখ্যার ব্যবহার আছে। O-বিন্দুকে শূন্য ধরা হইলে উহার ডান দিকের সংখ্যাগুলি ধনসংখ্যা এবং বাম দিকের সংখ্যাগুলি ঋণসংখ্যা। সুতরাং

ধনসংখ্যা মাত্রই 0 অপেক্ষা বৃহত্তর এবং ঋণসংখ্যা 0 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর। −5, শূন্য অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর। 0 অপেক্ষা 1 বেশী সংখ্যা +1, 2 বেশী সংখ্যা +2, 3 বেশী সংখ্যা +3 ইত্যাদি এবং 0 অপেক্ষা 1 কম সংখ্যা (−1), 2 কম সংখ্যা (−2), 3 কম সংখ্যা (−3), ইত্যাদি।

সুতরাং 0 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর সংখ্যাকে ঋণসংখ্যা বলা হয়।

প্রশ্নমালা 1

প্রয়োজন মত + বা − চিহ্ন বসাও :

1. 20 টাকা লাভ, 15 টাকা ক্ষতি।
2. কলিকাতা হইতে 100 মাইল পূর্বে, 100 মাইল পশ্চিমে।
3. 12 টার 10 মিনিট পরে, 10 মিনিট পূর্বে।
4. তাপমাত্রা হিমাঙ্ক অপেক্ষা 8° বেশী, 8° কম।
5. মাসিক আয় 30 টাকা বৃদ্ধি, 30 টাকা হ্রাস।
6. সমুদ্রপৃষ্ঠ হইতে 1000 ফুট উচ্চে, 1000 ফুট নিম্নে।
7. গ্রীণিচের পূর্বে ও পশ্চিমে 10° দূরে P ও Q স্থান দুইটি অবস্থিত। গ্রীণিচ হইতে P ও Q-র কৌণিক দূরত্ব সূচিত কর।
8. যদি লাভ হয় x টাকা, উহার সমপরিমাণ ক্ষতি কত ?

বীজগণিতের ভাষায় অর্থ বল :

9. লাভের পরিমাণ $+3x$ টাকা।
10. কোন দেশের জন্মের হার −3%.

---

3. নিয়ন্ত্রিত সংখ্যার যোগ। কয়েকটি উদাহরণ দ্বারা প্রক্রিয়া বুঝান হইতেছে।

(*i*) আমার নিকট 10 টাকা ছিল, আরও 5 টাকা পিতার নিকট হইতে পাইলাম ; এখন আমার নিকট মোট কত টাকা হইল ?

10 টাকা ছিল, আরও 5 টাকা পাইলাম ; সুতরাং আমার নিকট এখন 15 টাকা হইল।

অর্থাৎ $(+10)+(+5)=(+15)$

তদ্রূপ $(+2a)+(+a)=(+3a)$

(*ii*) আমার নিকট 10 টাকা ছিল, উহা হইতে 5 টাকা খরচ করিলাম। এখন আমার নিকট কত টাকা রহিল? উত্তর, 5 টাকা রহিল।

আমার নিকট রহিল $(+10)$ টাকা এবং (-5) টাকা

$$\therefore \quad (+10)+(-5)=+5.$$

তদ্রূপ, $(+5a)+(-2a)=(3a)$

(*iii*) আমার 20 টাকা ধার ছিল, আবার 10 টাকা ধার করিলাম।

সুতরাং আমার মোট ধার হইল 30 টাকা।

$$\therefore \quad (-20)+(-10)=(-30)$$

তদ্রূপ, $(-4a)+(-2a)=(-6a)$.

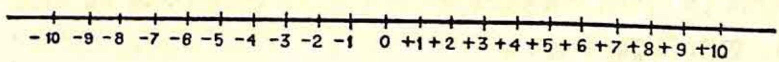
(*iv*) আমার 10 টাকা ধার ছিল, কিন্তু 5 টাকা আয় করিলাম। আমার এখন কত আছে? অবশ্যই 5 টাকা আরও ধার আছে।

আমার টাকার পরিমাণ $(-10)+(+5)=(-5)$

তদ্রূপ, $(-5a)+(2a)=(-3a)$.

4. স্কেলের সাহায্যে যোগ।

গ্রাফ বোর্ড অথবা সাধারণ ব্ল্যাক বোর্ডে নিম্ন প্রদর্শিত স্কেলের মত একখানি স্কেল আঁকিয়া নিম্নোক্ত প্রক্রিয়াগুলি আলোচনা করিলে নিয়ন্ত্রিত সংখ্যার প্রকৃতি ও উহাদের যোগ ও বিয়োগ প্রভৃতি সম্বন্ধে ধারণা সুস্পষ্ট হইবে।



(*i*) $(+5)+(+3)=$ কত?

0 হইতে প্রথমতঃ ডানদিকের 5 দাগ তৎপর আরও ডানদিকে 3 দাগ পর্যন্ত যাও, $(+8)$ এর দাগে পৌঁছিলে।

সুতরাং $(+5)+(+3)=(8)$.

(*ii*) $(+5)+(-3)=$ কত?

0 হইতে ডানদিকে 5 দাগ পর্যন্ত যাও, আবার তথা হইতে বামদিকে 3 দাগ ফিরিয়া আস। এখন 0 হইতে 2 দাগ ডানদিকে পৌঁছিলে।

সুতরাং $(+5)+(-3)=+2$.

(*iii*) $(-5)+(+3)=$ কত ?

0 হইতে বামদিকে (-5) দাগ পর্যন্ত যাও, আবার তথা হইতে ডানদিকে 3 দাগ ফিরিয়া আস। এখন 0 হইতে -2 দাগে পৌঁছিলে।

সুতরাং $(-5)+(+3)=(-2)$.

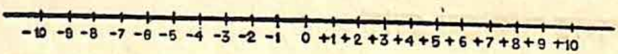
(*iv*) $(-5)+(-3)=$ কত ?

0 হইতে বামদিকে (-5) দাগ পর্যন্ত যাও। তথা হইতে আরও 3 দাগ বামদিকে যাও। এখন 0 হইতে -8 দাগে পৌঁছিলে।

সুতরাং $(-5)+(-3)=(-8)$.

5. স্কেলের সাহায্যে বিয়োগ।

পাটীগণিতে '8 − 3' এর উত্তর নির্ণয় করিতে হইলে যেমন মনে মনে জিজ্ঞাসা করা হয় '3 আর কত হইলে 8 হয়', অনুরূপ প্রশ্নের সাহায্যে নিয়ন্ত্রিত সংখ্যার বিয়োগ প্রক্রিয়া করা যায়।



(*i*) $(+8)-(+3)=$ কত ?

$(+3)$-র সহিত কত যোগ করিলে $(+8)$ হয় ? $(+5)$

অর্থাৎ $(+3)$-এর দাগ হইতে কত দাগ অগ্রসর হইলে $(+8)$-এর দাগে পৌঁছান যায় ? **ডান দিকে** 5 দাগ।

$\therefore \quad (+8)-(+3)=(5)$.

(*ii*) $(+8)-(-3)=$ কত ?

(-3) এর সহিত কত যোগ করিলে $(+8)$ হয় ?

অর্থাৎ (-3) এর দাগ হইতে $(+8)$ এর দাগ পর্যন্ত আসিতে হইলে কত দাগ অতিক্রম করিতে হইবে ? **ডান দিকে** 11 দাগ।

$\therefore \quad (+8)-(-3)=(+11)$.

(*iii*) $(-8)-(+3)=$ কত ?

$(+3)$ এর সহিত কত যোগ করিলে (-8) হয় ?

অর্থাৎ $(+3)$ এর দাগ হইতে (-8) এর দাগে আসিতে কত দাগ অতিক্রম করিতে হইবে? **বাম দিকে** 11 দাগ।

$$\therefore \quad (-8)-(+3)=(-11).$$

(*iv*) $(-8)-(-3)=$ কত?

(-3) এর সহিত কত যোগ করিলে (-8) হয়?

অর্থাৎ (-3) এর দাগ হইতে (-8) এর দাগে আসিতে কত দাগ অতিক্রম করিতে হইবে? **বাম দিকে** 5 দাগ।

$$\therefore \quad (-8)-(-3)=(-5).$$

বীজগণিতে বিয়োগ প্রক্রিয়া চিহ্ন পরিবর্তন পূর্বক যোগ ছাড়া আর কিছুই নহে। নীচের উদাহরণগুলি হইতে ইহা বুঝা যাইবে।

$(+8)-(+3)=(+\ 5)$ অর্থাৎ $(+8)+(-3)=(+\ 5)$
$(+8)-(-3)=(+11)$ „ $(+8)+(+3)=(+11)$
$(-8)-(+3)=(-11)$ „ $(-8)+(-3)=(-11)$
$(-8)-(-3)=(-\ 5)$ „ $(-8)+(+3)=(-\ 5)$

প্রশ্নমালা 2

(মৌখিক)

1. কোন লোক সোমবার পূর্বদিকে x-মাইল গিয়া, মঙ্গলবার তথা হইতে আরও পূর্বদিকে y-মাইল গেল। মঙ্গলবার যাত্রাস্থল হইতে সে কত দূরে অবস্থিত?

2. একখানি নৌকা কোন বন্দর হইতে সকালে ছাড়িয়া 15 মাইল দূরবর্তী কোন স্থানে গিয়া বৈকালে আবার বন্দরের দিকে 10 মাইল ফিরিয়া আসিল। যে বন্দর হইতে নৌকাখানি ছাড়িয়াছিল এখন তথা হইতে উহা কত দূরে?

3. একজন পথিককে 10 মাইল উত্তরে যাইতে হইবে, কিন্তু ভুল করিয়া সে দক্ষিণ দিকে 4 মাইল চলিয়া গেল। এখন আর কত মাইল চলিলে সে গন্তব্যস্থানে পৌঁছাইতে পারিবে?

4. প্রথম সংখ্যার সহিত কত যোগ করিলে দ্বিতীয় সংখ্যা হয় বল :

(*i*) $(-6), (+6)$ (*ii*) $(+6), (-6)$

(*iii*) $(+8), (+2)$ (*iv*) $(-6), (-9)$

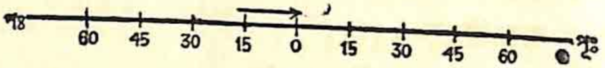
5. কত হয় বল :

(i) $(+7x)+(-5x)$ (ii) $(-9x)+(-4x)$

(iii) $(-3x)-(-5x)$ (iv) $(+10x)-(-6x)$

---

6. নিয়ন্ত্রিত সংখ্যার গুণন।



উপরের চিত্রটিতে একটি সোজা রেল লাইন দেখান হইতেছে। লাইনটি পূর্ব-পশ্চিমে প্রসারিত। লাইনের উপরে O একটি ষ্টেশন। O-ষ্টেশনের পূর্বে এবং পশ্চিমে 15 মাইল অন্তর এক একটি দাগ আছে।

মনে কর পূর্বাভিমুখী গতি ধনাত্মক এবং মধ্যাহ্ন 12-টার পরবর্তী সময় ধনাত্মক। এখন মনে কর একখানি ট্রেন ঘণ্টায় 15 মাইল বেগে পশ্চিম দিক হইতে পূর্বদিকে চলিতেছে এবং মধ্যাহ্ন 12-টার সময় উহা O-ষ্টেশনে পেঁৗছিল।

(i) অপরাহ্ণ 4-টার সময় ঐ ট্রেন O হইতে কত দূরে থাকিবে? O-ষ্টেশনের 60 মাইল পূর্বে।

এস্থলে ট্রেনের পূর্বাভিমুখী গতি ধনাত্মক $=(+15)$ মাইল,
12-টার পরবর্তী সময় ধনাত্মক $=(+\ 4)$ ঘণ্টা।
O হইতে দূরত্ব $=(+60)$ মাইল

$$\therefore\ (+15)\times(+4) = (+60).$$

(ii) উক্ত ট্রেনখানি সকাল 8-টার সময় O হইতে কত দূরে ছিল? O-ষ্টেশন হইতে 60 মাইল পশ্চিমে।

এস্থলে ট্রেনের পূর্বাভিমুখী গতি ধনাত্মক $=(+15)$ মাইল।
12-টার পূর্ববর্তী সময় ঋণাত্মক $=(-\ 4)$ ঘণ্টা।
O হইতে দূরত্ব $=(-60)$ মাইল।

$$\therefore\ (+15)\times(-4) = (-60).$$

আবার মনে কর, আর একখানি ট্রেন পূর্ব হইতে পশ্চিমাভিমুখী ঘণ্টায় 15 মাইল বেগে চলিতেছে এবং মধ্যাহ্ন 12-টার সময়ে উহা O-ষ্টেশনে পেঁৗছিয়াছে।

(*iii*) অপরাহ্ণ 3-টার সময় ঐ ট্রেন O হইতে কত দূরে থাকিবে? O-ষ্টেশন হইতে 45 মাইল পশ্চিমে।

এস্থলে ট্রেনের পশ্চিমাভিমুখী গতি ঋণাত্মক $= (-15)$ মাইল।
12-টার পরবর্তী সময় ধনাত্মক $= (+\ 3)$ ঘণ্টা।
O হইতে দূরত্ব $= (-45)$ মাইল।

$$\therefore\ (-15)\times(+3) = -45.$$

(*iv*) সকাল 9-টার সময় ঐ ট্রেন O হইতে কত দূরে ছিল? O ষ্টেশন হইতে 45 মাইল পূর্বে।

এস্থলে ট্রেনের গতি ঋণাত্মক $= (-15)$ মাইল।
12-টার পূর্ববর্তী সময় ঋণাত্মক $= (-\ 3)$ ঘণ্টা।
O হইতে দূরত্ব $= (+45)$ মাইল।

$$\therefore\ (-15)\times(-3) = (+45).$$

7. নিয়ন্ত্রিত সংখ্যার ভাগ।

'$30 \div 6$' এর ভাগফল নির্ণয় করিতে হইলে 6 কে যে সংখ্যাটি দ্বারা গুণ করিলে 30 হয় সেই সংখ্যাটিই নির্ণেয় ভাগফল হইবে।

যেহেতু $5\times 6 = 30$, $\therefore\ 30 \div 6 = 5$ অর্থাৎ $(+30)\div(+6) = (+5)$ (*i*)

তদ্রূপ, $(-5)\times(-6) = (+30)$ $\quad\therefore\ (+30)\div(-6) = (-5)$ (*ii*)

$(-5)\times(+6) = (-30)$ $\quad\therefore\ (-30)\div(+6) = (-5)$ (*iii*)

$(+5)\times(-6) = (-30)$ $\quad\therefore\ (-30)\div(-6) = (+5)$ (*iv*)

প্রশ্নমালা 3

মান নির্ণয় কর:

1. $(+9)\times(+8)$ **2.** $(-7)\times(+5)$

3. $(+6)\times(-4)$ **4.** $(-10)\times(-7)$

5. $(-2)\times(-3)\times(-4)$ **6.** $(-5)\times(+3)\times(-6)$

7. $(+15)\div(+5)$ **8.** $(-15)\div(+5)$

9. $(+15)\div(-5)$ 10. $(-15)\div(-5)$

11. $(+12)\times(-4)\div(+8)$ 12. $(-20)\times(-12)\div(-15)$

13. $(-4)^3$ 14. $(-3)^4$

15. $(+2)^4\times(-3)^3$

16. যদি $a=-3,\ b=1,\ c=2$ হয়,
$3abc,\ 2a^3b,\ 3a^3b^3c^2,\ a^3+b^3+c^3-3abc$ এর মান নির্ণয় কর।

দ্বিতীয় অধ্যায়

মৌলিক নিয়মাবলী

(Fundamental Laws)

যোগ ও বিয়োগ

1. কতিপয় রাশিকে একত্র করিয়া একটি মাত্র রাশি দ্বারা প্রকাশ করিবার ণালীকে যোগ প্রক্রিয়া বলে। যে রাশিগুলি যোগ করা হয় তাহাদিগকে **যাজ্যরাশি** (addenda) এবং যোগ করিয়া যে রাশিটি উৎপন্ন হয় তাহাকে **যাগফল** (sum) বলে।

ধনরাশি বৃদ্ধি-সূচক ; সুতরাং দুই বা ততোধিক ধনরাশির যোগফল উহাদের রমমানের যোগফলের সমান।

$$+5+(+4)\ =\ +5+4$$
$$+a+(+b)\ =\ +a+b$$

ঋণরাশি হ্রাস-সূচক ; সুতরাং একটি ধনরাশির সহিত একটি ঋণরাশি যোগ করার র্থ হইল ধনরাশি হইতে ঋণরাশির পরমমানের অন্তর নির্ণয় করা।

$$+8+(-3)\ =\ +8-3$$
$$+a+(-b)\ =\ +a-b$$

যে কোন চিহ্নযুক্ত রাশির সহিত $+b$ অথবা $-b$ যোগ করা হউক না কেন, b-এর নিজের চিহ্ন কখনও পরিবর্তিত হয় না।

$$-a+(+b) = -a+b$$
$$-a+(-b) = -a-b.$$

সুতরাং (i) দুইটি ধনরাশির যোগফল রাশি দুইটির পরমমানের যোগফলের সমান এবং উহার চিহ্ন সর্বদাই $+$.

(ii) দুইটি ঋণরাশির যোগফল উহাদের পরমমানের যোগফলের সমান এবং উহার চিহ্ন $-$.

(iii) একটি ধনরাশির সহিত একটি ঋণরাশি যোগ করিতে হইলে বৃহত্তর রাশিটির পরমমান হইতে ক্ষুদ্রতর রাশির পরমমান বিয়োগ করিয়া বিয়োফলের পূর্বে বৃহত্তর রাশিটির চিহ্ন বসাইতে হয়।

যোগ বিয়োগ চিহ্নযুক্ত কতিপয় রাশির যোগফলকে উহাদের **বৈজিক সমষ্টি** (Algebraic sum) বলে। বৈজিক সমষ্টি ধনাত্মক বা ঋণাত্মক উভয়ই হইতে পারে।

$$2+3+5=+10, \quad -2+(-3)=-5, \quad -7+(+5)=-2.$$

2. ধনাত্মক ও ঋণাত্মক রাশির বিয়োগ।

(i) বিয়োগ যোগের বিপরীত প্রক্রিয়া। সুতরাং বিয়োগ হ্রাস সূচক, কারণ যোগ বৃদ্ধি সূচক। অতএব ধনরাশি বিয়োগ করিতে হইলে উহার পরমমান বিয়োগ করিতে হয় এবং ঋণরাশি বিয়োগ করিতে হইলে উহার পরমমান যোগ করিতে হয়।

$$\left.\begin{array}{l}10-(+4)=10-4\\10-(-4)=10+4\end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l}a-(+b)=a-b\\a-(-b)=a+b.\end{array}$$

সুতরাং একটি সংখ্যা হইতে আর একটি সংখ্যা বিয়োগ করিতে হইলে বিয়োজ্য সংখ্যাটির চিহ্ন পরিবর্তন পূর্বক প্রথম সংখ্যাটির সহিত যোগের নিয়মে যোগ করিতে হয়।

(i) a হইতে $+b$, (ii) $-a$ হইতে $+b$, (iii) $+a$ হইতে $-b$ এবং (iv) $-a$ হইতে $-b$ বিয়োগ কর।

(i) $+a-(+b) = +a-b$

(ii) $-a-(+b) = -a-b$

(iii) $+a-(-b) = +a+b$

(iv) $-a-(-b) = -a+b$

যে রাশি হইতে কোন রাশি বিয়োগ করা হয় তাহাকে **বিয়োজক** (minuend) এবং যে সংখ্যাটি বিয়োগ করা হয় তাহাকে **বিয়োজ্য** (subtrahend) এবং বিয়োগ প্রক্রিয়ার পর যে ফল হয় তাহাকে **অবশিষ্ট বা অন্তর** (remainder or difference) বলা হয়।

3. যোগ ও বিয়োগ চিহ্নযুক্ত বন্ধনীর অপসারণ।

(*i*) কোন বন্ধনীর পূর্বে + যোগ চিহ্ন থাকিলে বন্ধনীর অন্তর্গত পদসমূহের চিহ্ন অপরিবর্তিত রাখিয়া বন্ধনী তুলিয়া দেওয়া যায়।

$$a+(b+c) = a+b+c,$$
$$a+(b-c) = a+b-c.$$

(*ii*) কোন বন্ধনীর পূর্বে − বিয়োগ চিহ্ন থাকিলে, বন্ধনীর অন্তর্গত সমস্ত পদের চিহ্ন পরিবর্তন করিয়া বন্ধনীটি তুলিয়া দেওয়া যায়।

$$a-(b+c) = a-b-c,$$
$$a-(b-c) = a-b+c.$$

উদা. 1. সরল কর : $6a+(a-b)-(2a+b)$

প্রদত্ত রাশি $=6a+a-b-2a-b$

$=5a-2b$

উদা. 2. সরল কর : $2a-(-a+b)+\overline{3a+2b}-(7a-b)$

প্রদত্ত রাশি $=2a+a-b+3a+2b-7a+b$

$=2a+a+3a-7a-b+2b+b$

$=-a+2b.$

4. Commutative Law of addition.

$3+4=7, \quad 4+3=7$

$\therefore \quad 3+4=4+3$

সাধারণ ভাবে, $a+b=b+a$

$$a+b+c=a+c+b$$
$$=b+a+c$$
$$=b+c+a$$
$$=c+a+b$$
$$=c+b+a,$$ ইত্যাদি।

যোজ্য রাশিগুলিকে যে কোন ক্রমে রাখিয়া যোগ করা যায়। ইহাকেই যোগের **Commutative Law** বলে।

5. Associative Law of Addition.

$3+4+5=3+(4+5)=(3+4)+5$

$4+5+6+7=4+(5+6+7)=(4+5)+(6+7)=(4+5+6)+7.$

সাধারণ ভাবে, $a+b+c=a+(b+c)=(a+b)+c$

$a+b+c+d=a+(b+c+d)=(a+b)+(c+d)$

$=a+(b+c)+d,$ ইত্যাদি।

কতিপয় রাশির সমষ্টি নির্ণয় করিতে হইলে সুবিধামত কতিপয় রাশিকে সজ্ঞবদ্ধ করিয়া সজ্ঞবদ্ধ রাশিগুলির সমষ্টিসমূহের পুনরায় সমষ্টি করিলেই নির্ণেয় সমষ্টি পাওয়া যাইবে। ইহাকেই যোগের Associative Law বলা হয়।

গুণন ও ভাগ

6. (*i*) প্রত্যেক প্লেটে 4টি করিয়া সন্দেশ রাখিলে ঐরূপ 3 খানি প্লেটে মোট সন্দেশের সংখ্যা হয় 12. আবার প্রত্যেক প্লেটে 3টি করিয়া সন্দেশ রাখিলে ঐরূপ 4 খানি প্লেটে মোট সন্দেশের সংখ্যা হয় 12. অর্থাৎ

$4\times3=3\times4$

তদ্রূপ, $a\times b=b\times a$

$a\times b\times c=(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$

অথবা, $abc=(ab)\times c=a\times(bc)=b\times(ca)$

সুতরাং কোন গুণফলের উৎপাদকগুলিকে সুবিধামত যে কোন ভাবে সজ্ঞবদ্ধ করা যায়। এই নিয়মটিকে গুণনের **Associative Law** বলা হয়।

(*ii*) $abc=a(bc)=(bc)a,\ (ab)c=c(ab)$ এবং $bc=cb\ ;\ ab=ba$

$\therefore\ abc=acb=bca=bac=cab=cba$

তদ্রূপ, $2x\times3y=2\times3\times x\times y=6xy$

$2x\times3y\times5z=2\times3\times5\times x\times y\times z=30xyz.$

সুতরাং গুণন প্রক্রিয়ার উৎপাদকগুলিকে যে কোন ক্রমে লইয়া গুণফল নির্ণয় করা যায় অর্থাৎ গুণফল উহার উৎপাদক সমূহের ক্রম-নিরপেক্ষ, ইহাকে গুণনের **Commutative Law** বলা হয়।

(*iii*) $a^2 \times a^3 = (a \times a) \times (a \times a \times a)$

$= a \times a \times a \times a \times a$

$= a^5 = a^{2+3}$

$a^3 \times a^4 = (a \times a \times a) \times (a \times a \times a \times a)$

$= a \times a \times a \times a \times a \times a \times a$

$= a^7 = x^{3+4}$

তদ্রূপ, $a^m \times a^n = (a \times a \times a \times \cdot\cdot\ m$ বার$) \times (a \times a \times a \times \cdots n$ বার$)$

$= a \times a \times a \times a \times \cdots (m+n)$ বার

$= a^{m+n}$.

উক্ত নিয়মটিকে **Index Law** বলে।

সাধারণভাবে, $a^m \times a^n \times a^p \times a^q \ldots\ldots$

$= a^{m+n+p+q\ldots}$

অর্থাৎ একই সংখ্যার ভিন্ন ভিন্ন ঘাত পরস্পর গুণিত হইলে গুণফলে উক্ত সংখ্যাটির ঘাত হইবে বিভিন্ন ঘাতের স্বচক সমষ্টির সমান।

$\therefore\ a^3 \times a^5 = a^{3+5} = a^8$. ($a^{3\times5} = a^{15}$ হইবে না)

বিভিন্ন সংখ্যার গুণনে উক্ত নিয়ম খাটিবে না।

$3^2 \times 4^3$ স্থলে 3^{2+3} বা 4^{2+3} বা 12^{2+3} ইহার কোনটিই হইবে না।

তদ্রূপ, $a^m \times b^n = a^m b^n$. (a^{m+n} বা b^{m+n} নহে)

স্বচক বিধি অনুসারে, $(a^m)^n = a^m \times a^m \times a^m \times \ldots\ldots\ n$ বার

$= a^{m+m+m+}\ldots\ldots\ n$ বার

$= a^{mn}$

তদ্রূপ, $(x^y)^z = x^{yz}$

$(2^2)^3 = 2^6$

(iv) $(a+b)x = (a+b)+(a+b)+(a+b)+\cdots\cdots$ x বারের সমষ্টি

$= (a+a+a+\cdots\cdots$ x বারের সমষ্টি)

$+ (b+b+b+\cdots\cdots$ x বারের সমষ্টি)

$= ax+bx$

অর্থাৎ $(a+b)x = ax+bx$

সাধারণভাবে, $(a+b+c+d+\cdots\cdots)x$

$= ax+bx+cx+dx+\cdots\cdots$

উক্ত নিয়মটিকে গুণনের **Distributive Law** (বিচ্ছেদ বিধি) বলে।

বহুপদ রাশিকে বহুপদ রাশিদ্বারা গুণনেও উক্ত নিয়মটি খাটিবে।

পূর্বেই প্রমাণিত হইয়াছে $(a+b)x = ax+bx$

এখন মনে কর $x = c+d$.

$\therefore \quad (a+b)(c+d) = (a+b)x$

$= ax+bx$

$= a(c+d)+b(c+d)$

$= ac+ad+bc+bd.$

আবার, $(a+b+c+\cdots\cdots)x$

$= ax+bx+cx+\cdots\cdots$

এখন, $x = p+q$ হইলে

$$(a+b+c+\cdots)\times(p+q) = a(p+q)+b(p+q)+c(p+q)+\cdots\cdots$$
$$= ap+aq+bp+bq+cp+cq+\cdots\cdots$$

7. (i) ভাগ প্রকৃত পক্ষে গুণনের বিপরীত প্রক্রিয়া। সুতরাং গুণনের Laws of Association, Commutation, Distribution সমস্তই ভাগ প্রক্রিয়ায় প্রযোজ্য হইবে।

$$(a+b+c+\cdots\cdots)\div x = \frac{a}{x}+\frac{b}{x}+\frac{c}{x}+\cdots\cdots$$

(ইহাই ভাগের বিচ্ছেদ বিধি)

দ্রষ্টব্য। গুণন প্রক্রিয়ায় গুণ্য ও গুণক উভয় রাশিকেই বিচ্ছেদবিধি অনুসারে

বিচ্ছিন্ন করা যায়, কিন্তু ভাগ প্রক্রিয়ায় মাত্র ভাজ্যকেই বিচ্ছিন্ন করা যায় কিন্তু ভাজককে কখনও বিচ্ছিন্ন করা যায় না; যেমন,

$$(a+b)\div x=\frac{a}{x}+\frac{b}{x}$$

কিন্তু $a\div(b+c)=\frac{a}{b}+\frac{a}{c}$ কখনই হইবে না।

(*ii*) সূচক-বিধি অনুসারে, $m > n$ এবং m, n উভয়ই ধনাত্মক হইলে,

$$a^{m-n}\times a^n=a^{m-n+n}=a^m$$

$$\therefore \quad a^m\div a^n=a^{m-n}.$$

$\therefore \quad 2^5\div 2^3=2^{5-3}=2^2=4.$

উক্ত নিয়ম অনুসারে, $a^m\div a^m=a^{m-m}=a^0$

$$\text{কিন্তু} \quad a^m\div a^m=\frac{a^m}{a^m}=1$$

$$\therefore \quad a^0=1$$

সুতরাং যে কোন সংখ্যার ঘাতের সূচক শূন্য হইলে উহার মান 1 হইবে। $a^0=1, 2^0=1, 5^0=1,$ ইত্যাদি। ইহাই ভাগে সূচক বিধির প্রয়োগ।

বন্ধনীর ব্যবহার ও অপসারণ

8. বন্ধনীর ব্যবহার।

কোন রাশিমালার দুই বা ততোধিক পদকে একটি মাত্র পদের ন্যায় গণ্য করাইবার জন্য তাহাদিগকে বন্ধনী চিহ্ন দ্বারা আবদ্ধ করা হয়। যে পদগুলিকে বন্ধনীর মধ্যে আবদ্ধ করা হয় তাহাদের সর্ব বামের পদটির পূর্বে যোগ চিহ্ন থাকিলে, বন্ধনীর অন্তর্গত করিলে তাহাদের চিহ্নের কোন পরিবর্তন হয় না, কিন্তু বিয়োগ চিহ্ন থাকিলে, বিয়োগ চিহ্নটি বন্ধনীর পূর্বে রাখিয়া বন্ধনীর অন্তর্গত পদসমূহের যোগ ও বিয়োগ চিহ্নগুলিকে বিপরীত চিহ্নে পরিবর্তিত করিতে হয়।

উদা. 1. $a+b-c = a+(b-c) = (a+b)-c.$

উদা. 2. $a-b-c = a-(b+c) = (a-b)-c.$

উদা. 3. $a-b+c = a-(b-c) = (a-b)+c$; ইত্যাদি।

9. বন্ধনীর অপসারণ।

(a) কোন বন্ধনীর পূর্বে '+' চিহ্ন থাকিলে উক্ত বন্ধনীর অন্তর্গত রাশির পদগুলির চিহ্ন পরিবর্তন না করিয়াই বন্ধনীটি অপসারণ করা যায়।

(b) কোন বন্ধনীর পূর্বে '−' চিহ্ন থাকিলে বন্ধনীমধ্যস্থ রাশির পদগুলির চিহ্ন পরিবর্তন করিয়া বন্ধনী অপসারণ করা যায়।

(c) যে কোন ক্রম অনুসারে বন্ধনী অপসারণ করা যায়। সাধারণতঃ রেখাবন্ধনী হইতে আরম্ভ করিয়া ক্রমশঃ প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয় ইত্যাদি ক্রমে বন্ধনী অপসারণ করা সুবিধাজনক।

(b) দুইটি বন্ধনীর মধ্যে অথবা কোন সংখ্যা ও তাহার পরবর্তী বন্ধনীর মধ্যে কোন চিহ্ন না থাকিলে উহাদের মধ্যে 'এর' আছে মনে করিয়া উহাদিগকে গুণ করিতে হয়।

উদা. 4. সরল কর : $(a+b-c)-(a-b+c)$

প্রদত্ত রাশি $= a+b-c-a+b-c$

$= 2b-2c.$

উদা. 5. সরল কর : $(a+b)-\{2a-(c-a)\}$

প্রদত্ত রাশি $= a+b-\{2a-c+a\}$

$= a+b-2a+c-a$

$= b+c-2a.$

উদা. 6. সরল কর : $a-[b-\{c-\overline{a-b}\}-(a+b)+c]$

প্রদত্ত রাশি $= a-[b-\{c-a+b\}-(a+b)+c]$

$= a-[b-\{c-a+b\}-a-b+c]$

$= a-[b-c+a-b-a-b+c]$

$= a-b+c-a+b+a+b-c$

$= a+b.$

উদা. 7. সরল কর : $[a-\{6a-5(a+b)\}](a-\overline{a-2b}+c)$

$$\begin{aligned}\text{প্রদত্ত রাশি} &= [a-\{6a-5a-5b\}](a-a+2b+c)\\ &= [a-\{a-5b\}](2b+c)\\ &= [a-a+5b](2b+c)\\ &= 5b(2b+c)\\ &= 10b^2+5bc.\end{aligned}$$

উদা. 8. সরল কর : $-[-\{-(-\overline{1-a})\}]$

$$\begin{aligned}\text{প্রদত্ত রাশি} &= -[-\{-(-1+a)\}]\\ &= -[-\{1-a\}]\\ &= -[-1+a]\\ &= 1-a.\end{aligned}$$

প্রশ্নমালা 4

সরল কর :

1. $(a+b)-(a-b)$ **2.** $a-(b+c-d)$

3. $(x-y)+(y-z)+(z-x)+(x+y+z)$

4. $(a+b-c)-(a-b-c)-(b-c-a)-(a+b+c)$

5. $a(b+c-d)-a(b-c+d)$

6. $2x-\{y-(x-2y)\}$

7. $x-\{2y-(2y+3z)-x\}$

8. $x-[a-\{2a-(3a-\overline{4a-x})\}]$

9. $2a-3(b-c)-2\{a-2(b-c)\}$

10. $d-[b+c-\{a+b-(c+2b+a-d)\}]$

11. $5[4x-\{2y+(2x-y)-(x+y)\}]$

12. $2x-\{z-(x-y+2z)\}-[4y-\{3z+x-(4x+z-5y)\}]$

13. $x-[a-\{2a-(3a-\overline{4a-x})\}]$

14. $x-[-y-\{-z-(-x-\overline{y-z})-x\}-y]-z$

15. $p-[p-\{2p-3(p-q)-q\}-q]-(p-q)$

তৃতীয় অধ্যায়

সরল সমীকরণ ও সমস্যা সমাধান (সহজ)

1. সমীকরণ (Equation)। সমিত চিহ্ন (=) দ্বারা সংযুক্ত বীজগণিতীয় দুইটি রাশির পরস্পর সম্পর্কের সাধারণ নাম সমীকরণ। সমিত চিহ্নের বামদিকের রাশিটিকে **বাম পক্ষ** এবং ডানদিকের রাশিটিকে **দক্ষিণ পক্ষ** বলে।

রাশিদ্বয়ের সমতা ব্যবহৃত অক্ষরের মান নিরপেক্ষ হইলে অর্থাৎ অক্ষরের যে কোন মানে উভয় রাশির সমতা অব্যাহত থাকিলে সমীকরণটিকে **অভিন্ন সমীকরণ** (Identical Equation) বা সংক্ষেপে **অভেদ** (Identity) বলা হয়। অভেদ প্রকৃতপক্ষে একই রাশির রূপান্তর মাত্র।

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$, $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ ইহাদের প্রত্যেকটি অভেদ, কারণ a ও b-র যে কোন মানেই প্রত্যেক স্থলে উভয় পক্ষের সমতা অব্যাহত থাকে।

ব্যবহৃত অক্ষরের বিশেষ বিশেষ মানে উভয় পক্ষের সমতা বজায় থাকিলে, সমীকরণটিকে **সাপেক্ষ সমীকরণ** (Conditional Equation) বা সংক্ষেপে **সমীকরণ** (Equation) বলা হয়।

"$5x=20$" একটি সাপেক্ষ সমীকরণ, কারণ x এর 4 ভিন্ন অন্য কোন মানেই $5x=20$ হয় না।

'$3x+2=11$' ইহাও একটি সাপেক্ষ সমীকরণ, কারণ x এর 3 ভিন্ন অন্য কোন মানে $3x+2=11$ হয় না।

উক্ত প্রকারের সাপেক্ষ সমীকরণই সাধারণতঃ সমীকরণ নামে পরিচিত।

2. সমীকরণে ব্যবহৃত যে অক্ষরটির মান অনির্দিষ্ট বা অজ্ঞাত তাহাকে **অজ্ঞাত রাশি** (Unknown Quantity) বলে, এবং অবশিষ্টগুলিকে **জ্ঞাত** বা **ধ্রুবক** (Known or Constant) রাশি বলিয়া মনে করা হয়।

সাধারণতঃ x, y, z দ্বারা অজ্ঞাত রাশি এবং a, b, c ও পাটীগণিতের সংখ্যা দ্বারা জ্ঞাত রাশি প্রকাশ করা হয়।

3. অজ্ঞাত রাশির যে মান দ্বারা উভয় পক্ষের সমতা সাধিত হয় তাহাকে ঐ সমীকরণের **বীজ** (Root or Solution) বলে। বীজদ্বারা সমীকরণটি **সিদ্ধ** (Satisfied) হয়—এইরূপ বলা যাইতে পারে। বীজ-নির্ণয়ের প্রক্রিয়াকেই সমীকরণের সমাধান বলা হয়। সুতরাং কোন সমীকরণের সমাধান করিতে বলিলে উহার বীজ নির্ণয় করিতে হয়।

4. **সরল সমীকরণ।** অজ্ঞাত রাশির সংখ্যা ও শক্তি-ভেদে সমীকরণ অনেক প্রকারের হয়। যে সমীকরণে একটিমাত্র প্রথম শক্তি বিশিষ্ট অজ্ঞাত রাশি থাকে তাহাকে **একবর্ণ সরল সমীকরণ** বলে। ইহাকে সংক্ষেপে **সরল সমীকরণ** (Simple Equation) বলা হয়। ইহাকে **প্রথম মানের সমীকরণ** (First Degree Equation) বলা হয়।

সরল সমীকরণে সাধারণতঃ অজ্ঞাত রাশির প্রতীক হিসাবে x অক্ষরটিই ব্যবহৃত হয়।

$7x+2=23$ একটি সরল সমীকরণ, কারণ এস্থলে অজ্ঞাত রাশি x প্রথম শক্তি যুক্ত।

5. **সরল সমীকরণের সমাধান।** যে কোন প্রকারের সরল সমীকরণের সমাধানের মৌলিক প্রক্রিয়া হইল জ্ঞাত এবং অজ্ঞাত রাশির পৃথকীকরণ। অর্থাৎ বিশেষ বিশেষ স্থলে বিভিন্ন প্রক্রিয়ার সাহায্যে সমিত চিহ্নের বাম দিকে অজ্ঞাত রাশি এবং ডান দিকে জ্ঞাত রাশি স্থানান্তরিত করিতে হয়। এই প্রক্রিয়ার জন্য নিম্নলিখিত স্বতঃসিদ্ধ কয়টির প্রয়োগ করিতে হয়, যথা—

(i) সমান সমান রাশির সহিত সমান সমান অথবা একই রাশি যুক্ত বা বিযুক্ত হইলে, যথাক্রমে যোগফল ও বিয়োগফল পরস্পর সমান হয়। সমীকরণ সমাধানের **পক্ষান্তর-প্রক্রিয়া** (Principle of Transposition) এই স্বতঃসিদ্ধের উপর প্রতিষ্ঠিত।

(ii) সমান সমান রাশিকে সমান সমান অথবা একই রাশিদ্বারা গুণ বা ভাগ করিলে যথাক্রমে গুণফল ও ভাগফল পরস্পর সমান হয়। সমীকরণ

সমাধানের **সরলীকরণ প্রক্রিয়া** (Principle of Simplification) এই স্বতঃসিদ্ধের উপর প্রতিষ্ঠিত।

6. সরল সমীকরণের সমাধান প্রণালী সপ্তম ও অষ্টম শ্রেণীর পাঠ্যাংশে আলোচিত হইয়াছে। এস্থলে কয়েকটি উদাহরণ দ্বারা উহার পুনরালোচনা করা হইল।

উদা. 1. সমাধান কর : (*i*) $3x=15$ (*ii*) $\frac{3}{5}x=12$ (*iii*) $ax=b$.

(*i*) $3x=15$ $\therefore\ x=\frac{15}{3}$ (উভয়পক্ষকে x এর সহগ 3 দ্বারা ভাগ করিয়া)

$=5.$

(*ii*) $\frac{3}{5}x=12$ $\therefore\ x=12\times\frac{5}{3}$ (উভয় পক্ষকে x এর সহগ $\frac{3}{5}$ দ্বারা ভাগ করিয়া)

$=20.$

(*iii*) $ax=b$ $\therefore\ x=\dfrac{b}{a}$

(উভয় পক্ষকে x এর সহগ a দ্বারা ভাগ করিয়া)

উদা. 2. সমাধান কর : $3(4x+5)-3(x-6)=2x$

$3(4x+5)-3(x-6)=2x$

অথবা, $12x+15-3x+18=2x$

অথবা, $12x-3x-2x=-15-18$ (পক্ষান্তর করিয়া)

অথবা, $12x-5x=-33$ অথবা, $7x=-33$

$\therefore\ x=-\frac{33}{7}=-4\frac{5}{7}.$

উদা. 3. সমাধান কর : $15(x^2-3)+20x=x(15x+17)$

$15(x^2-3)+20x=x(15x+17)$

অথবা, $15x^2-45+20x=15x^2+17x$

অথবা, $15x^2-15x^2+20x-17x=45$ (পক্ষান্তর করিয়া)

অথবা, $3x=45$, $\therefore\ x=\frac{45}{3}=15$

উদা. 4. সমাধান কর : $\frac{x}{2}-2=\frac{x}{4}-\frac{x}{5}-1$

$$\frac{x}{2}-2=\frac{x}{4}-\frac{x}{5}-1$$

অথবা, $20\left(\frac{x}{2}-2\right)=20\left(\frac{x}{4}-\frac{x}{5}-1\right)$,

(উভয় পক্ষকে উভয় পক্ষের হর সমূহের ল. সা. গু. 20 দ্বারা গুণ করিয়া)

অথবা, $10x-40=5x-4x-20$

অথবা, $10x-5x+4x=40-20$

অথবা, $9x=20$, $\therefore$ $x=\frac{20}{9}=2\frac{2}{9}$.

উদা. 5. সমাধান কর : $\frac{x+3}{4}-\frac{x+4}{5}=\frac{x+5}{6}-\frac{x+6}{7}$

$$\frac{x+3}{4}-\frac{x+4}{5}=\frac{x+5}{6}-\frac{x+6}{7}$$

উভয় পক্ষকে হরসমূহের ল সা. গু. 420 দ্বারা গুণ করিয়া

$$420\left(\frac{x+3}{4}-\frac{x+4}{5}\right)=420\left(\frac{x+5}{6}-\frac{x+6}{7}\right) *$$

অথবা, $105(x+3)-84(x+4)=70(x+5)-60(x+6)$

অথবা, $105x+315-84x-336=70x+350-60x-360$

অথবা, $105x-84x-70x+60x=350-360-315+336$

অথবা, $165x-154x=686-675$

অথবা, $11x=11$, $\therefore$ $x=1$

দ্রষ্টব্য। কার্যতঃ *চিহ্নিত পংক্তি বর্জন করা চলে।

উদা. 6. সমাধান কর : $\frac{3}{4}(5x-1)-\frac{5(4x-1)}{3}=2-3x$.

$$\frac{3}{4}(5x-1)-\frac{5(4x-1)}{3}=2-3x$$

উভয় পক্ষকে হরসমূহের ল. সা. গু. 12 দ্বারা গুণ করিয়া,

$$9(5x-1)-20(4x-1)=12(2-3x)$$

অথবা, $45x-9-80x+20=24-36x$

অথবা, $45x-80x+36x=24+9-20$

অথবা, $81x-80x=33-20$, $\therefore$ $x=13$

উদা. 7. $\cdot 5x + \frac{\cdot 02x + \cdot 07}{\cdot 03} - \frac{x+2}{9} = 9\cdot 5$ (C. U. 1933)

$$\cdot 5x + \frac{\cdot 02x + \cdot 07}{\cdot 03} - \frac{x+2}{9} = 9\cdot 5$$

বা, $\frac{5}{10}x + \frac{\frac{2}{100}x + \frac{7}{100}}{\frac{3}{100}} - \frac{x+2}{9} = \frac{95}{10}$

বা, $\frac{5}{10}x + \frac{100}{3}(\frac{2}{100}x + \frac{7}{100}) - \frac{x+2}{9} = \frac{95}{10}$

বা, $\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}x + \frac{7}{3} - \frac{x+2}{9} = \frac{19}{2}$

উভয় পক্ষকে হরসমূহের ল. সা. গু. 18 দ্বারা গুণ করিয়া,

$$9x + 12x + 42 - 2x - 4 = 171$$

বা, $21x - 2x = 171 - 42 + 4$, বা $19x = 133$, $\therefore$ $x = 7$

7. সমীকরণের সমাধানের শুদ্ধি পরীক্ষা।

সমীকরণের সমাধান বা উত্তর নির্ণয় করিয়া প্রদত্ত সমীকরণে x-এর পরিবর্তে উক্ত উত্তর বসাও। যদি উভয় পক্ষ সমান হয়, সমাধান শুদ্ধ হইয়াছে জানিবে।

উদা. 6. এ উত্তর হইয়াছে 13. প্রদত্ত সমীকরণে $x = 13$ বসাও। তাহা হইলে

বাম পক্ষ $= \frac{3}{4}(5 \times 13 - 1) - \frac{5(4 \times 13 - 1)}{3}$

$= \frac{3}{4} \times 64 - \frac{5 \times 51}{3} = 48 - 85 = -37$

দক্ষিণ পক্ষ $= 2 - 3 \times 13 = 2 - 39 = -37$

উভয় পক্ষই -37 এর সমান হইয়াছে। অতএব সমীকরণটি সিদ্ধ হইয়াছে। অর্থাৎ সমাধান শুদ্ধ হইয়াছে।

প্রশ্নমালা 5

সমাধান কর :

1. $9x = 30$ **2.** $\frac{5}{12}x = 15$ **3.** $\frac{1}{3}x = 1\frac{1}{3}$

4. $x + \frac{1}{2}x = 4\frac{1}{2}$ **5.** $3\cdot 5x = 7$ **6.** $5x - 8 = 22$

7. $17x + 5 = 124$ **8.** $7x + \frac{1}{2} = 21\frac{1}{2}$ **9.** $8(\frac{1}{2}x - 3) = 16$

সমস্যা সমাধানে সমীকরণ গঠন ও উহার প্রয়োগ।

8. সমাধানযোগ্য যে কোন প্রশ্নকেই সমস্যা (Problem) বলা যায়। সমস্য নানাবিধ, সরল ও জটিল। কোন সমস্যায় সমস্ত রাশিই জ্ঞাত, যেমন একটি সাধার যোগ অঙ্ক ; আবার কোন কোন সমস্যার কতকগুলি রাশি জ্ঞাত এবং কতকগুলি অজ্ঞাত। এইরূপ জ্ঞাত এবং অজ্ঞাত রাশি সম্বলিত সমস্যা বা প্রশ্নের সমাধা (solution of problem) বীজগণিতের সমীকরণের প্রয়োগে অতি সহজেই কর যাইতে পারে। সমীকরণের জ্ঞাত রাশির সাহায্যেই অজ্ঞাত রাশিটি নির্ণয় কর হয়। এই সমস্ত সমস্যার নির্ণেয় রাশিটিকে অজ্ঞাত রাশি ধরিয়া জ্ঞাত রাশি এব প্রদত্ত শর্তের সাহায্যে সমস্যাটিকে একটি বীজগণিতের সমীকরণের আকারে পরিণত করিয়া উহার বীজ নির্ণয় করিতে হয়। নির্ণীত বীজটিই প্রদত্ত সমস্যার সমাধান।

অজ্ঞাত রাশিগুলির প্রতীক হিসাবে সাধারণতঃ x, y, z প্রভৃতি অক্ষরগুলি ব্যবহৃত হইয়া থাকে। যে সমস্যায় একটি মাত্র অজ্ঞাত রাশি থাকে, সেইরূপ স্থলে সাধারণতঃ অজ্ঞাত রাশির প্রতীক হিসাবে x অক্ষরটি ব্যবহৃত হইয়া থাকে।

একটিমাত্র অজ্ঞাত রাশিবিশিষ্ট অতি সহজ সমস্যার সমাধানের জন্য সমীকরণ গঠন ও উহার সমাধান প্রণালী কয়েকটি উদাহরণ দ্বারা দেখান হইতেছে।

9. **সমীকরণ গঠন।** সমস্যা সমাধানের জন্য উপযুক্ত প্রতীকদ্বারা একটি সমীকরণ গঠন করিতে হয়। ঐ সমীকরণের বীজ হইতে নির্ণেয় সমাধান পাওয়া যায়। সমীকরণ গঠনই সমস্যা সমাধানের মুখ্য অংশ। বিশেষ বিশেষ শর্ত হইতে কিরূপে সমীকরণ গঠন করা যায় তাহার কতিপয় উদাহরণ প্রদত্ত হইল।

উদা. 1. y হইতে x, 10 বেশী।

সাঙ্কেতিক বাক্য : $x-y=10$ অথবা $x=y+10$

উদা. 2. দুইটি সংখ্যার যোগফল s, একটি সংখ্যা x, অপরটি কত ?

অপর সংখ্যাটি $=s-x$.

উদা. 3. 20-টি আমের মূল্য x টাকা, একটির মূল্য কত ?

একটির মূল্য $=\frac{x}{20}$ টাকা।

10. $69=3(5x-2)$ 11. $\frac{3}{4}x-6=2$ 12. $3x-7=2x+1$

13. $5x+2=3x+8$ 14. $15x-10=12x+2$

15. $3(x+2)=2(x+3)$ 16. $2(x-2)=x-3$

17. $16-3x=5x-16$ 18. $8x+2(x-5)=5x+10$

19. $3(2x+5)-2x=3(x+6)$ 20. $3x-10(2x-3)+21=0$

21. $(3x+2)(x+2)=x(3x+10)$

22. $x^2+3(5x-18)+3x^2=4x^2-3x$

23. $15(x^2-3)+20x=x(15x+17)$

24. $(2x+1)(3x+1)=6x(x+1)$

25. $4(x+1)+(x+4)(x-5)-(x+1)(x-1)=3.$

26. $\frac{x}{2}+3=\frac{x}{3}+4$ 27. $\frac{x}{2}-2=\frac{x}{4}+\frac{x}{5}-1$

28. $\frac{x}{2}-\frac{x}{3}+1=\frac{x}{4}$ 29. $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}=26$

30. $x-(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}x)=1,$

31. $x-\frac{1}{2}x+2=2x-\frac{2}{3}x+5$

32. $\frac{x-1}{2}-\frac{2x-3}{3}=\frac{x+1}{4}-\frac{3x-5}{8}$

33. $\frac{5x+6}{12}+\frac{3x-4}{5}=2(x-9)$

34. $\frac{4-x}{4}-\frac{5-x}{5}+\frac{6-x}{6}=1$

35. $\frac{6x+1}{15}+\frac{2x-4}{30}=\frac{2x-1}{5}$

36. $\frac{2x+1}{5}-\frac{3x-2}{6}-\frac{1}{2}=0$

37. $x-\frac{1}{9}(x-13)-\frac{1}{5}(6x+1)-\frac{2}{3}\left(6-\frac{3x}{2}\right)=0$

38. $\frac{x}{1\cdot5}-\frac{1}{\cdot15}+\frac{x}{\cdot015}-\frac{1}{\cdot0015}=0$

39. $1\cdot5+\frac{\cdot06x+\cdot21}{\cdot03}-\frac{x+2}{3}=28\cdot5$

40. $\frac{x-4}{\cdot0625}=\frac{x-2}{\cdot05}-4x$

উদা. 4. p-সংখ্যক আমের মূল্য x টাকা হইলে, 25টি আমের মূল্য কত ?

একটি আমের মূল্য $=\frac{x}{p}$ টাকা,

$\therefore$ 25-টি আমের মূল্য $=\frac{25x}{p}$ টাকা।

উদা. 5. দুইটি ক্রমিক সংখ্যার ছোটটি x, বড়টি কত ?

বড়টি $= x+1$.

উদা. 6. তিনটি ক্রমিক সংখ্যার ক্ষুদ্রতমটি x, অপর সংখ্যা দুইটি কত ?

অপর সংখ্যা দুইটি, $x+1$, $x+2$.

উদা. 7. তিনটি ক্রমিক সংখ্যার বৃহত্তমটি x, অপর সংখ্যা দুইটি কত ?

অপর সংখ্যা দুইটি, $x-1$, $x-2$.

উদা. 8. তিনটি ক্রমিক সংখ্যার মধ্য সংখ্যাটি x, অপর সংখ্যা দুইটি কত ?

অপর সংখ্যা দুইটি, $x-1$, $x+1$.

উদা. 9. কোন লোক x ঘণ্টায় 20 মাইল যায় ; ঘণ্টায় তাহার বেগ কত মাইল ?

ঘণ্টায় বেগ $=\frac{20}{x}$ মাইল।

উদা. 10. দুইটি থলেতে মোট 100 টাকা আছে ; একটি থলেতে x টাকা থাকিলে, অপরটিতে কত আছে ?

অপরটিতে আছে $(100-x)$ টাকা।

উদা. 11. একখানি ট্রেন ঘণ্টায় x মাইল চলে, 8 ঘণ্টায় উহা কত দূর চলিবে ?

নির্ণেয় দূরত্ব $= 8x$ মাইল।

উদা. 12. কোন লোকের বর্তমান বয়স x বৎসর ; 10 বৎসর পূর্বে তাহার বয়স কত ছিল ? 10 বৎসর পরে তাহার বয়স কত হইবে ? দ্বিতীয় একজন লোকের বয়স প্রথম লোকের বর্তমান বয়সের তিন গুণ হইলে, দ্বিতীয় লোকটির বর্তমান বয়স কত ?

প্রথম ব্যক্তির 10 বৎসর পূর্বের বয়স $= (x-10)$ বৎসর,

প্রথম ব্যক্তির 10 বৎসর পরের বয়স $= (x+10)$ বৎসর,

দ্বিতীয় লোকটির বর্তমান বয়স $= 3x$ বৎসর।

উদা. 13. 150 জন বালকের মধ্যে x সংখ্যক বালক প্রত্যেকে 8 আনা এবং অবশিষ্ট বালকের প্রত্যেকে 4 আনা করিয়া পাইল। 150 বালক মোট কত টাকা পাইল ?

8 আনা $= \frac{1}{2}$ টাকা, 4 আনা $= \frac{1}{4}$ টাকা

$\therefore$ x বালক পাইল $x \times \frac{1}{2}$ বা $\frac{x}{2}$ টাকা ......(i)

অবশিষ্ট বালকের সংখ্যা $= (150 - x)$

$\therefore$ $(150 - x)$ বালক পাইল $(150 - x) \times \frac{1}{4} = \frac{150 - x}{4}$ টাকা ......(ii)

$\therefore$ মোট টাকার পরিমাণ $= \frac{x}{2} + \frac{150 - x}{4} = \frac{2x + 150 - x}{4} = \frac{x + 150}{4}$

উদা. 14. দুই অঙ্কে গঠিত কোন সংখ্যার দশকের অঙ্ক x এবং এককের অঙ্ক y ; সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

আমরা জানি কোন সংখ্যার অঙ্কসমূহের স্থানীয় মানের সমষ্টি সংখ্যাটির সমান।

এস্থলে x দশক স্থানীয় অঙ্ক, সুতরাং উহার স্থানীয় মান $10x$

এবং y একক স্থানীয় অঙ্ক, সুতরাং উহার স্থানীয় মান y

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা $= 10x + y$.

উদা. 15. তিন অঙ্কে গঠিত কোন সংখ্যার শতকের অঙ্ক x, দশকের অঙ্ক y এবং এককের অঙ্ক z হইলে, সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

এস্থলে, x শতক স্থানীয় অঙ্ক, সুতরাং উহার স্থানীয় মান $100x$;

y দশক স্থানীয় অঙ্ক, সুতরাং উহার স্থানীয় মান $10y$;

এবং z একক স্থানীয় অঙ্ক, সুতরাং উহার স্থানীয় মান z.

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা $= 100x + 10y + z$.

10. **সমস্যা সমাধানে সমীকরণের প্রয়োগ।** প্রতীক সাহায্যে সমীকরণ গঠনের পর সাধারণ প্রণালীতে সমীকরণের সমাধান করিলেই সমস্যার সমাধান হয়।

উদা. 1. কোন্ রাশির আটগুণ 72 ?

প্রথমতঃ, মনে কর নির্ণেয় রাশিটি x ; সুতরাং উহার 8 গুণ $= 8x$

$\therefore$ সমস্যার শর্ত অনুসারে,

$8x = 72$ (একটি সমীকরণ গঠিত হইল)

উক্ত সমীকরণের সমাধান করিয়া x-এর মান নির্ণয় করিলেই প্রদত্ত সমস্যার উত্তর পাওয়া যাইবে।

এখন, $8x = 72$

$\therefore \quad x = \frac{72}{8} = 9$, ইহাই নির্ণেয় রাশি।

উদা. 2. 800 টাকায় একটি ঘোড়া বিক্রয় করায় কোন ব্যবসায়ীর ক্রয়মূল্যের $\frac{1}{5}$ অংশ ক্ষতি হইল। ঘোড়াটির ক্রয়মূল্য কত ছিল?

মনে কর ঘোড়াটির ক্রয়মূল্য x টাকা ছিল।

তাহা হইলে তাহার ক্ষতি হইল $\dfrac{x}{5}$ টাকা।

$\therefore$ বিক্রয়মূল্য হইল $(x - \frac{1}{5}x)$ টাকা।

সুতরাং সমস্যার শর্ত অনুসারে, $x - \frac{1}{5}x = 800$, বা $\frac{4}{5}x = 800$

$\therefore \quad x = 800 \times \frac{5}{4} = 1000$ $\quad \therefore$ নির্ণেয় ক্রয়মূল্য $= 1000$ টাকা।

উদা. 3. কোন ব্যবসায়ী প্রথম বৎসর মূলধনের এক-তৃতীয়াংশ লাভ করিল এবং দ্বিতীয় বৎসর আদি মূলধনের অর্ধাংশ লাভ করিয়া দুই বৎসরে মোট 1000 টাকা লাভ করিল; তাহার মূলধন কত?

মনে কর নির্ণেয় মূলধন $= x$ টাকা।

$\therefore$ প্রথম বৎসরের লাভ $= \frac{1}{3}x$ টাকা এবং দ্বিতীয় বৎসরের লাভ $= \frac{1}{2}x$ টাকা।

সুতরাং প্রশ্নের শর্ত অনুসারে, $\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}x = 1000$

অথবা, $\frac{5}{6}x = 1000$, $\quad \therefore \quad x = 1000 \times \frac{6}{5} = 1200$

$\therefore$ নির্ণেয় মূলধন $= 1200$ টাকা।

উদা. 4. কোন্ সংখ্যার তিনগুণের সহিত 10 যোগ করিলে 70 হয়?

মনে কর নির্ণেয় সংখ্যাটি x.

সুতরাং প্রশ্নের শর্ত অনুসারে, $3x + 10 = 70$

এখন, $3x + 10 = 70$

অথবা, $3x = 70 - 10$

অথবা, $3x = 60$

$\therefore \quad x = \frac{60}{3} = 20 =$ নির্ণেয় সংখ্যাটি।

উদা. 5. 25 হইতে কোন্ সংখ্যার তিন গুণ বাদ দিলে 10 থাকে ?

মনে কর নির্ণেয় সংখ্যাটি x.

সুতরাং প্রশ্নের শর্ত অনুসারে,

$$25 - 3x = 10$$

অথবা, $-3x = 10 - 25 = -15$

অথবা, $3x = 15$

$\therefore$ $x = \frac{15}{3} = 5 =$ নির্ণেয় সংখ্যা।

উদা. 6. কোন্ সংখ্যার তিন গুণ হইতে 3 বিয়োগ করিলে এবং দ্বিগুণের সহিত 3 যোগ করিলে একই সংখ্যা হয় ?

মনে কর নির্ণেয় সংখ্যাটি x.

সুতরাং প্রশ্নের শর্ত অনুসারে, $3x - 3 = 2x + 3$

অথবা, $3x - 2x = 3 + 3$

$\therefore$ $x = 6 =$ নির্ণেয় সংখ্যা।

উদা. 7. কোন্ সংখ্যার তিন গুণের সহিত 1 যোগ করিয়া যোগফলকে পাঁচ গুণ করিলে উহার সতর গুণ অপেক্ষা 1 কম হয় ?

মনে কর নির্ণেয় সংখ্যাটি x.

সুতরাং প্রশ্নের শর্ত অনুসারে, $5(3x + 1) = 17x - 1$

অথবা, $15x + 5 = 17x - 1$

অথবা, $15x - 17x = -1 - 5$

অর্থাৎ $-2x = -6$

$\therefore$ $x = \dfrac{-6}{-2} = 3 =$ নির্ণেয় সংখ্যা।

উদা. 8. 100 কে এরূপ দুই অংশে বিভক্ত কর যেন বৃহত্তর অংশের দ্বিগুণ 150 অপেক্ষা যত কম, ক্ষুদ্রতর অংশের তিনগুণ 90 অপেক্ষা তত বেশী।

মনে কর বৃহত্তর অংশ x ; তাহা হইলে ক্ষুদ্রতর অংশ হইবে $(100 - x)$. বৃহত্তর অংশের দ্বিগুণ $2x$, 150 অপেক্ষা $(150 - 2x)$ কম এবং ক্ষুদ্রতর অংশের তিন গুণ $3(100 - x)$, 90 অপেক্ষা $\{3(100 - x) - 90\}$ বেশী।

∴ প্রশ্নের শর্ত অনুসারে, $150-2x=3(100-x)-90$

বা, $150-2x=300-3x-90$

বা, $x=300-90-150=60$

∴ নির্ণেয় বৃহত্তর অংশ $=60$ এবং ক্ষুদ্রতর অংশ $=100-60=40$.

উদা. 9. একটি ভগ্নাংশের হর, লব অপেক্ষা 3 বেশী। লব হইতে 3 বিয়োগ করিয়া এবং হরের সহিত 4 যোগ করিয়া যে ভগ্নাংশ গঠিত হয় তাহার মান $\frac{1}{6}$. ভগ্নাংশটি নির্ণয় কর।

মনে কর, ভগ্নাংশটির লব x; তাহা হইলে হর হইবে $x+3$.

সুতরাং ভগ্নাংশটি হইবে $\dfrac{x}{x+3}$

প্রশ্নের শর্তানুসারে, $\dfrac{x-3}{x+3+4}=\frac{1}{6}$ বা, $\dfrac{x-3}{x+7}=\frac{1}{6}$

বজ্র গুণন করিয়া, $6x-18=x+7$

বা, $6x-x=7+18$ বা, $5x=25$, ∴ $x=5$

∴ নির্ণেয় ভগ্নাংশ $=\dfrac{5}{5+3}=\frac{5}{8}$

উদা. 10. 5 বৎসর পূর্বে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের তিন গুণ ছিল। 5 বৎসর পরে পিতা ও পুত্রের বয়সের সমষ্টি হইবে 68 বৎসর। পিতা ও পুত্রের বর্তমান বয়স কত?

মনে কর, 5 বৎসর পূর্বে পুত্রের বয়স ছিল x বৎসর। সুতরাং 5 বৎসর পূর্বে পিতার বয়স ছিল $3x$ বৎসর।

∴ পুত্রের বর্তমান বয়স $(x+5)$ বৎসর এবং পিতার বর্তমান বয়স $(3x+5)$ বৎসর।

5 বৎসর পরে পুত্র ও পিতার বয়স হইবে যথাক্রমে $(x+5+5)$ বা $(x+10)$ বৎসর এবং $(3x+5+5)$ বা $(3x+10)$ বৎসর।

∴ প্রশ্নের শর্ত অনুসারে, $(x+10)+(3x+10)=68$

বা, $4x=68-10-10$ বা, $4x=48$, ∴ $x=12$

অতএব পুত্রের বর্তমান বয়স $=(12+5)=17$ বৎসর এবং পিতার বর্তমান বয়স $=(3\times12+5)=41$ বৎসর।

উদা. 11. দুইটি সংখ্যার সমষ্টি 50 এবং প্রথমটির দ্বিগুণ দ্বিতীয়টির $\frac{5}{6}$ অংশ অপেক্ষা 15 বেশী। সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

মনে কর, প্রথম সংখ্যা x ; তাহা হইলে দ্বিতায় সংখ্যা হইবে $(50-x)$

সুতরাং প্রশ্নের শর্ত অনুসারে, $2x=\frac{5}{6}(50-x)+15$

বা, $12x=250-5x+90$ (উভয় পক্ষকে 6 দ্বারা গুণ করিয়া)

বা, $17x=340$, $\therefore$ $x=20$

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যাদ্বয় 20 এবং $(50-20)$ বা 30

উদা. 12. তিনটি ক্রমিক সংখ্যা নির্ণয় কর যাহাদিগকে যথাক্রমে 5, 7 ও 11 দ্বারা ভাগ করিলে, ভাগফলগুলির সমষ্টি 9 হইবে।

মনে কর, x, $x+1$, $x+2$ তিনটি ক্রমিক সংখ্যা।

প্রশ্নের শর্ত অনুসারে, $\frac{x}{5}+\frac{x+1}{7}+\frac{x+2}{11}=9$

বা, $77x+55x+55+35x+70+3465$

(উভয় পক্ষকে $5\times 7\times 11$ দ্বারা গুণ করিয়া)

বা, $77x+55x+35x=3465-55-70$

বা, $167x=3340$ বা, $x=20$

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা তিনটি 20, 21, 22.

উদা. 13. 96 কে এমন চারিটি অংশে বিভক্ত কর যেন প্রথম অংশের সহিত 1 যোগ করিলে, দ্বিতীয় অংশ হইতে 2 বিয়োগ করিলে, তৃতীয় অংশকে 3 দ্বারা গুণ করিলে এবং চতুর্থ অংশকে 4 দ্বারা ভাগ করিলে, প্রতি ক্ষেত্রে লব্ধ ফল একই হয়।

মনে কর প্রতিক্ষেত্রে লব্ধ ফল x.

তাহা হইলে প্রথম অংশ হইবে $x-1$, দ্বিতীয় অংশ হইবে $x+2$,

তৃতীয় অংশ হইবে $\frac{x}{3}$ এবং চতুর্থ অংশ হইবে $4x$.

যেহেতু চারিটি অংশের সমষ্টি 96,

সুতরাং $(x-1)+(x+2)+\frac{x}{3}+4x=96$

বা, $3x-3+3x+6+x+12x=288$ (উভয় পক্ষকে 3 দ্বারা গুণ করিয়া)

বা, $19x=285$, $\therefore$ $x=15$

$\therefore$ নির্ণেয় অংশগুলি হইবে $15-1$, $15+2$, $\frac{15}{3}$ এবং 15×4 অর্থাৎ 14, 17, 5 এবং 60.

11. অঙ্ক (Digit) ও সংখ্যা (Number)।

দুই অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার দশকের অঙ্কের 10 গুণ এবং এককের অঙ্কের যোগফল সংখ্যাটির সমান হয়।

তিন অঙ্কবিশিষ্ট সংখ্যার শতকের অঙ্কের 100 গুণ, দশকের অঙ্কের 10 গুণ এবং এককের অঙ্কের যোগফল সংখ্যাটির সমান হয়।

দশকের অঙ্ক x এবং এককের অঙ্ক y হইলে, দুই অঙ্কবিশিষ্ট সংখ্যাটি হইবে $(10x+y)$; আবার ঐ সংখ্যাটির অঙ্ক দুইটির স্থান পরিবর্তন করিলে অর্থাৎ উল্টাইলে যে সংখ্যা হয় উহা হইবে $(10y+x)$.

এইরূপে তিন অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার শতক, দশক এবং এককের অঙ্ক যথাক্রমে x, y, z হইলে, সংখ্যাটি হইবে $(100x+10y+z)$ এবং উক্ত অঙ্কগুলির স্থান পরিবর্তন করিলে বা উল্টাইলে যে সংখ্যা হয় উহা হইবে $(100z+10y+x)$।

উদা. 14. দুই অঙ্কে গঠিত একটি সংখ্যার দশকের অঙ্ক এককের অঙ্কের দ্বিগুণ। সংখ্যাটি হইতে 36 বিয়োগ করিলে অঙ্ক দুইটি পরস্পর স্থান পরিবর্তন করে। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

মনে কর এককের অঙ্ক x ; তাহা হইলে দশকের অঙ্ক হইবে $2x$.
সুতরাং সংখ্যাটি হইবে $(10.2x+x)=21x$.
অঙ্ক দুইটি পরস্পর স্থান পরিবর্তন করিলে নূতন সংখ্যা হয় $(10x+2x)=12x$.
প্রশ্নের শর্ত অনুসারে,

$$21x-36=12x \quad \text{বা,} \quad 9x=36 \quad \text{বা,} \quad x=4$$

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা $= 21.x = 21.4 = 84$.

উদা. 15. দুই অঙ্ক বিশিষ্ট একটি সংখ্যার অঙ্ক-সমষ্টি 7 ; সংখ্যাটির সহিত 45 যোগ করিলে অঙ্ক দুইটি পরস্পর স্থান পরিবর্তন করে। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

মনে কর, দশকের অঙ্ক x ; তাহা হইলে এককের অঙ্ক হইবে, $(7-x)$; সুতরাং নির্ণেয় সংখ্যা হইবে $10x+(7-x)=9x+7$.

অঙ্ক দুইটি পরস্পর স্থান পরিবর্তন করিলে নূতন সংখ্যা হয়

$$10(7-x)+x=70-9x$$

প্রশ্নের শর্ত অনুসারে,

$9x+7+45=70-9x$ বা, $18x=18$ $\therefore$ $x=1$

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা $=9x+7=9.\ 1+7=16.$

উদা. 16. 100 খানা আধুলি ও সিকি একত্রে 37 টাকা 75 নয়া পয়সা হইলে, আধুলি ও সিকির সংখ্যা কত ?

37 টাকা 75 নয়া পয়সা = $37\frac{3}{4}$ টাকা = $\frac{151}{4}$ টাকা।

মনে কর, আধুলির সংখ্যা x ; তাহা হইলে সিকির সংখ্যা হইবে $(100-x)$.

x আধুলি = $\frac{x}{2}$ টাকা ; $(100-x)$ সিকি = $\frac{100-x}{4}$ টাকা।

প্রশ্নের শর্ত অনুসারে, $\frac{x}{2}+\frac{100-x}{4}=\frac{151}{4}$

বা, $2x+100-x=151$ $\therefore$ $x=51$

$\therefore$ আধুলির সংখ্যা = 51 এবং সিকির সংখ্যা = $100-51=49$.

উদা. 17. 30 দিনের জন্য একটি লোক নিযুক্ত করা হইল এই শর্তে যে, যে দিন সে কাজ করিবে সে দিন 2 টাকা 50 নয়া পয়সা পাইবে, কিন্তু যে দিন কাজ করিবে না সে দিন তাহাকে 75 নয়া পয়সা জরিমানা দিতে হইবে। 30 দিন পরে লোকটি মোট 52 টাকা 25 নয়া পয়সা পাইল। সে কত দিন কাজ করিয়াছিল ?

2 টাকা 50 নয়া পয়সা $=2\frac{1}{2}$ টাকা $=\frac{5}{2}$ টাকা ; 75 নয়া পয়সা $=\frac{3}{4}$ টাকা ; 52 টাকা 25 নয়া পয়সা $=52\frac{1}{4}$ টাকা $=\frac{209}{4}$ টাকা।

মনে কর, লোকটি x দিন কাজ করিয়াছিল ; তাহা হইলে লোকটি কাজ করে নাই $(30-x)$ দিন। x দিন কাজ করার জন্য তাহার পাওনা হয় $\frac{5}{2}x$ টাকা, এবং $(30-x)$ দিন কাজ না করার জন্য জরিমানা বাবদ কাটা হয় $\frac{3}{4}(30-x)$ টাকা।

$\therefore$ প্রশ্নের শর্ত অনুসারে, $\frac{5}{2}x-\frac{3}{4}(30-x)=\frac{209}{4}$

বা, $10x-90+3x=209$

বা, $13x=299$ $\therefore$ $x=23$

$\therefore$ লোকটি 23 দিন কাজ করিয়াছিল।

উদা. 18. একটি মোটরগাড়ীচালক 6 ঘণ্টায় 80 মাইল পথ অতিক্রম করে, তন্মধ্যে কিছু পথ সে ঘণ্টায় 10 মাইল বেগে এবং অবশিষ্ট পথ ঘণ্টায় 18 মাইল বেগে যায়। প্রতি বেগে সে কত পথ অতিক্রম করিয়াছিল ?

মনে কর, মোটরচালক ঘণ্টায় 10 মাইল বেগে x মাইল এবং ঘণ্টায় 18 মাইল বেগে অবশিষ্ট $(80-x)$ মাইল অতিক্রম করিয়াছে।

ঘণ্টায় 10 মাইল বেগে x মাইল যাইতে সময় লাগে $\frac{x}{10}$ ঘণ্টা এবং ঘণ্টায় 18 মাইল বেগে $(80-x)$ মাইল যাইতে সময় লাগে $\frac{80-x}{18}$ ঘণ্টা।

প্রশ্নের শর্ত অনুসারে, $\frac{x}{10}+\frac{80-x}{18}=6$

বা, $9x+400-5x=540$, বা, $4x=140$, $\therefore$ $x=35$

$\therefore$ মোটরচালক ঘণ্টায় 10 মাইল বেগে 35 মাইল এবং ঘণ্টায় 18 মাইল বেগে $(80-35)$ বা 45 মাইল গিয়াছিল।

প্রশ্নমালা 6

1. কোন্ সংখ্যার $\frac{1}{2}$ ও $\frac{1}{3}$ এর অন্তর 10 ?

2. কোন্ সংখ্যার 8 গুণ হইতে 8 বিয়োগ করিলে বিয়োগফল 72 হয় ?

3. কোন্ সংখ্যার দ্বিগুণের সহিত 3 যোগ করিয়া যোগফলকে 5 দ্বারা গুণ করিলে গুণফল 35 হয় ?

4. কোন ফেরিওয়ালার নিকট যত আম ছিল সে উহার এক-তৃতীয়াংশ অপেক্ষা পাঁচটি আম বেশী বিক্রয় করিয়া দেখিল তাহার নিকট আরও 15টি আম আছে। তাহার নিকট কয়টি আম ছিল ?

5. কোন্ সংখ্যার $\frac{1}{2}$ এবং $\frac{1}{3}$ এর অন্তরের সহিত 10 যোগ করিলে যোগফল 100 হয় ?

6. পিতার বয়স পুত্রের বয়সের তিনগুণ অপেক্ষা 5 বৎসর বেশী। যদি পিতার বয়স 50 বৎসর হয়, তাহা হইলে পুত্রের বয়স কত ?

7. 20 হইতে কোন্ সংখ্যা বিয়োগ করিলে বিয়োগফল ঐ সংখ্যাটির তিনগুণ হইবে?

8. কোন্ সংখ্যা হইতে 2 বিয়োগ করিয়া বিয়োগফলকে তিন দ্বারা গুণ করিলে গুণফল ঐ সংখ্যাটি অপেক্ষা 4 বেশী হয়?

9. কোন্ সংখ্যার 15 গুণের সহিত 28 যোগ করিলে যত যোগফল হয়, 48-এর সহিত উহার পাঁচ গুণ যোগ করিলেও তত হয়?

10. 56 হইতে কোন সংখ্যার 21 গুণ বিয়োগ করিলে, বিয়োগফল উক্ত সংখ্যার 36 গুণ অপেক্ষা 1 কম হয়; সংখ্যাটি কত?

11. 100 কে এমন দুই অংশে বিভক্ত কর যেন বৃহত্তর অংশের চার গুণ ক্ষুদ্রতর অংশের ছয় গুণের সমান হয়।

12. 19 কে এমন দুই অংশে বিভক্ত কর যেন বৃহত্তর অংশের 4 গুণ ও ক্ষুদ্রতর অংশের 7 গুণের অন্তর 10 হয়।

13. দুইটি সংখ্যার যোগফল 30 এবং বিয়োগফল 4. সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

14. দুইটি সংখ্যার যোগফল 100 এবং বিয়োগফল 10. সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

15. 130টি বালক-বালিকার মধ্যে 40 টাকা এমনভাবে ভাগ করিয়া দেওয়া হইল যে প্রত্যেক বালক 25 নয়া পয়সা এবং প্রত্যেক বালিকা 50 নয়া পয়সা করিয়া পাইল। বালক-বালিকার সংখ্যা নির্ণয় কর।

16. পিতার বর্তমান বয়স পুত্রের বর্তমান বয়সের তিন গুণ; কিন্তু 16 বৎসর পরে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের দ্বিগুণ হইবে। পিতা ও পুত্রের বর্তমান বয়স নির্ণয় কর।

17. একখানি ট্রেন কোন স্টেশন হইতে ঘণ্টায় 20 মাইল বেগে রওনা হইল। ঠিক সেই সময় 20 মাইল অগ্রবর্তী আর এক স্টেশন হইতে আর একখানি ট্রেন একই দিকে ঘণ্টায় 15 মাইল বেগে রওনা হইল। উভয় ট্রেন একই সময়ে একটি জংশনে পৌঁছিল। প্রথম স্টেশন হইতে জংশনের দূরত্ব কত?

18. এমন একটি সংখ্য নির্ণয় কর যাহার এক-পঞ্চমাংশ অপেক্ষা এক-চতুর্থাংশ 3 বেশী।

19. একটি সংখ্যা 100 অপেক্ষা যত কম, চতুর্গুণ করিলে উহা 100 অপেক্ষা তত বেশী হইবে ; সংখ্যাটি কত ?

20. 210 টাকা 30 পুরুষ এবং 20 স্ত্রীলোকের মধ্যে এরূপে ভাগ করিয়া দাও, যেন প্রত্যেক পুরুষ প্রত্যেক স্ত্রীলোক অপেক্ষা দুই টাকা বেশী পায়।

21. A একটি কাজ 10 দিনে এবং B উহা 15 দিনে করিতে পারে। উভয়ে একত্র কাজ করিলে উহা কত দিনে সম্পন্ন হইবে ?

22. তিনটি ক্রমিক সংখ্যার সমষ্টি 63. সংখ্যা তিনটি নির্ণয় কর।

23. এমন একটি সংখ্যা নির্ণয় কর যাহার তিনগুণ 120 হইতে বিয়োগ করিলে, বিয়োগফল সংখ্যাটি অপেক্ষা 8 অধিক হয়।

24. কোন্ সংখ্যার দ্বিগুণ এবং তিনগুণের সমষ্টি 75 হইতে বিয়োগ করিলে বিয়োগফল 30 হইবে ?

25. দুইটি ক্রমিক সংখ্যার বর্গের অন্তর 25. সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

26. দুইটি সংখ্যার অন্তর 4 এবং উহাদের বর্গের অন্তর 80. সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

27. A, B, C-র মধ্যে 100 টাকা এমন ভাবে ভাগ কর যেন A, B অপেক্ষা 10 টাকা বেশী এবং C অপেক্ষা 20 টাকা কম পায়।

28. একটি থলিয়াতে 50-টি মুদ্রা আছে, তন্মধ্যে কতকগুলি টাকা এবং অবশিষ্টগুলি আধুলি। যদি মুদ্রাগুলির মোট মূল্য 40 টাকা হয়, তাহা হইলে কোন্ প্রকারের মুদ্রা কয়টি আছে ?

29. একটি বাঁশের এক-পঞ্চমাংশ কাদার মধ্যে, এক-তৃতীয়াংশ জলের মধ্যে এবং উপরে 14 ফুট আছে ; বাঁশটির দৈর্ঘ্য কত ?

30. একটি বাঁশের অর্ধেক ও এক-তৃতীয়াংশ কাটার পর দেখা গেল আর মাত্র 4 ফুট দীর্ঘ একটি খণ্ড আছে ; বাঁশটির দৈর্ঘ্য কত ?

31. 250 মাইল দূরবর্তী দুইটি স্টেশন হইতে A ও B দুইখানি ট্রেন একই সময় পরস্পরের অভিমুখে রওনা হইয়া 5 ঘণ্টা পরে পরস্পরের সম্মুখীন হইল। যদি দ্বিতীয় ট্রেনের বেগ প্রথম ট্রেনের বেগের দেড়গুণ হয়, তাহা হইলে প্রত্যেকের বেগ ঘণ্টায় কত মাইল ?

32. A-র বর্তমান বয়স B ও C-র বর্তমান বয়সের সমষ্টির সমান। পাঁচ বৎসর পরে A-র বয়সের 8 গুণ B ও C-এর বয়সের সমষ্টির 7 গুণ হইবে। A-র বর্তমান বয়স কত?

33. A-র নিকট 72 টাকা এবং B-র নিকট 12 টাকা আছে, A, B-কে কত টাকা দিলে, B-র নিকট A-র তিনগুণ টাকা হইবে?

34. দুইটি সংখ্যার সমষ্টি 61. প্রথম সংখ্যার দ্বিগুণ দ্বিতীয় সংখ্যার দুই-তৃতীয়াংশ অপেক্ষা 10 বেশী। সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

35. একটি খুঁটির অর্ধাংশ মাটির নীচে, এক-তৃতীয়াংশ জলের মধ্যে এবং জলের উপরে যে অংশ আছে উহার দৈর্ঘ্য 2 ফুট। খুঁটিটির দৈর্ঘ্য কত?

36. 75 কে এরূপ দুইটি অংশে ভাগ কর যেন বৃহত্তর অংশের এক-তৃতীয়াংশ 30 অপেক্ষা যত কম, ক্ষুদ্রতর অংশের চারি গুণ 50 অপেক্ষা তত বেশী।

37. দুইটি সংখ্যার একটি অপরটি অপেক্ষা 5 বেশী। বৃহত্তরটির তিন গুণের সহিত ক্ষুদ্রতরটির দ্বিগুণ যোগ করিলে যোগফল হয় সংখ্যা দুইটির অন্তরের 30 গুণ। সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

38. একটি ভগ্নাংশের লব হর অপেক্ষা 13 কম। লবের সহিত 3 যোগ করিয়া এবং হর হইতে 5 বিয়োগ করিয়া যে ভগ্নাংশ গঠিত হয় উহার মান হয় $\frac{3}{4}$; ভগ্নাংশটি নির্ণয় কর।

39. একটি প্রকৃত ভগ্নাংশের লব ও হরের অন্তর 2; লব ও হর উভয় হইতেই 5 বিয়োগ করিলে যে ভগ্নাংশ গঠিত হয়, উহার সহিত $\frac{1}{4}$ যোগ করিলে যোগফল হয় 1; ভগ্নাংশটি নির্ণয় কর।

40. তিনটি ক্রমিক সংখ্যা নির্ণয় কর যাহাদিগকে যথাক্রমে 2, 3 ও 4 দ্বারা ভাগ করিলে ভাগফলগুলির সমষ্টি হইবে 55.

41. তিনটি ক্রমিক সংখ্যা নির্ণয় কর যাহাদের প্রথমটির $\frac{1}{3}$ অংশ, দ্বিতীয়টির $\frac{1}{4}$ অংশ এবং তৃতীয়টির $\frac{1}{5}$ অংশ একত্রে 50 হয়।

42. এক ব্যক্তি 80টি আম মোট 9 টাকা মূল্যে ক্রয় করিয়াছিল। কয়েকটি সে কিনিয়াছিল টাকায় 8-টি দরে এবং অবশিষ্ট কয়টি কিনিয়াছিল টাকায় 12-টি দরে। লোকটি কোন্ দরে কয়টি করিয়া আম কিনিয়াছিল?

43. A, B-কে বলে, "আমার বর্তমান বেতনের $\frac{2}{5}$ অংশ তোমার বর্তমান বেতনের $\frac{4}{25}$ অংশের সমান এবং আমাদের উভয়ের বেতনের অন্তর 600 টাকা।" A-র বেতন কত ?

44. এক রাজা 30 বৎসর বয়সের সময় সিংহাসনে আরোহণ করেন এবং তাঁহার জীবনের $\frac{5}{11}$ অংশ কাল রাজত্ব করেন। তিনি কত বৎসর রাজত্ব করিয়াছিলেন ?

[C. U. 1930]

45. আমার বর্তমান বয়সের দ্বিগুণ হইতে 6 বৎসর পূর্বে আমার যত বয়স ছিল তাহার তিনগুণ বিয়োগ করিলে আমার বর্তমান বয়স হয়। আমার বর্তমান বয়স কত ?

46. 20 বৎসর পূর্বে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের চারগুণ ছিল। 4 বৎসর পরে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের দ্বিগুণ হইবে। পিতা ও পুত্র প্রত্যেকের বর্তমান বয়স নির্ণয় কর।

47. 10 বৎসর পূর্বে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের 3 গুণ ছিল। 10 বৎসর পরে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের 2 গুণ হইবে। পিতার বর্তমান বয়স কত ?

48. আমি কয়েকটি দ্রব্য 6 পেনিতে 7-টি দরে ক্রয় করিয়াছিলাম। উহাদের দর যদি 1 শিলিং-এ 13-টি হইত, তাহা হইলে আমার 6 পেনি বেশী ব্যয় হইত। আমি কয়টি দ্রব্য ক্রয় করিয়াছিলাম ?

49. এক ব্যক্তি 10 টাকা দিয়া 166টি আম ক্রয় করিল। উহাদের কতকগুলি টাকায় 18-টি দরে এবং অবশিষ্টগুলি টাকায় 15-টি দরে ক্রয় করিয়া থাকিলে, কোন্ প্রকারের কতগুলি আম সে ক্রয় করিয়াছিল ?

50. 120-টি সিকি ও 10 নয়া পয়সা মুদ্রা একত্রে 15 টাকা 30 নয়া পয়সার সমান হইলে সিকি ও 10 নয়া পয়সা মুদ্রার সংখ্যা কত ?

51. একটি থলিয়াতে 100-টি মুদ্রা আছে। উহাদের কতকগুলি আধুলি ও কতকগুলি সিকি। মুদ্রাগুলির মোট মূল্য 40 টাকা হইলে, আধুলি ও সিকির সংখ্যা কত ?

52. 246 টাকা দিয়া 13 খানা চেয়ার ও টেবিল ক্রয় করা হইল। প্রতি চেয়ারের মূল্য 12 টাকা এবং প্রতি টেবিলের মূল্য 30 টাকা হইলে, চেয়ার ও টেবিলের সংখ্যা কত কত ?

53. 20 দিনের জন্য একটি লোক নিযুক্ত করা হইল এই শর্তে যে, যে দিন সে কাজ করিবে সেদিন 2 টাকা 4 আনা পাইবে এবং যেদিন কাজ না করিবে প্রত্যহ 14 আনা হিসাবে জরিমানা তাহার প্রাপ্য হইতে কাটিয়া রাখা হইবে। 20 দিন পরে লোকটি 29 টাকা 6 আনা পাইয়া থাকিলে, সে কত দিন কাজ করিয়াছিল ?

54. কাজ করিলে প্রত্যহ 3 টাকা 2 আনা হিসাবে পাইবে, কিন্তু কাজ না করিলে প্রতি দিনের জন্য 1 টাকা 4 আনা করিয়া জরিমানা দিতে হইবে এই শর্তে 30 দিনের জন্য একটি লোককে রাখা হইল। লোকটি যদি 30 দিন পরে মোট 67 টাকা 8 আনা পাইয়া থাকে, তবে সে কত দিন কাজ করে নাই নির্ণয় কর।

55. 840 টাকা মূল্যে একটি ঘোড়া বিক্রয় করায় কিছু ক্ষতি হইল। যদি 1050 টাকা মূল্যে ঘোড়াটি বিক্রয় করা হইত, তাহা হইলে পূর্বের ক্ষতি যত তাহার $\frac{3}{4}$ অংশ লাভ হইত। ঘোড়াটির ক্রয়মূল্য নির্ণয় কর।

56. এক ব্যক্তির যত ঋণ ছিল সে তাহার $\frac{1}{3}$ অংশ অপেক্ষা 200 টাকা বেশী পরিশোধ করিয়া দেখিল যে সে যত টাকা পরিশোধ করিয়াছে তদপেক্ষা তাহার আরও 210 টাকা বেশী ঋণ অবশিষ্ট রহিয়াছে। তাহার সম্পূর্ণ ঋণের পরিমাণ কত ছিল ?

[C. U. 1913]

57. এক ব্যক্তি 4 আনায় ডজন হিসাবে কিছু লেবু ক্রয় করিয়া দেখিল যে উহার মধ্যে 50-টি লেবু পচা। অবশিষ্ট লেবু 4 আনায় 9-টি দরে বিক্রয় করিয়া সে মোট 6 টাকা 4 আনা লাভ করিল। সে কত লেবু ক্রয় করিয়াছিল ?

58. এক ব্যক্তির বয়স তাহার দুইটি পুত্রের বয়সের সমষ্টির তিন গুণ। 7 বৎসর পরে পুত্র দুইটির বয়সের সমষ্টির আটগুণ পিতার বয়সের পাঁচ গুণের সমান হইবে। ঐ ব্যক্তির বর্তমান বয়স কত ?

59. 20 কে এমন চারি অংশে ভাগ কর যেন প্রথম অংশের সহিত 1 যোগ করিলে, দ্বিতীয় অংশ হইতে 2 বিয়োগ করিলে, তৃতীয় অংশকে 3 দ্বারা গুণ করিলে এবং চতুর্থ অংশকে 4 দ্বারা ভাগ করিলে প্রতি ক্ষেত্রে লব্ধ ফল একই হইবে।

60. 154 কে এমন চারি অংশে ভাগ কর যেন প্রথম অংশের সহিত 5 যোগ করিলে, দ্বিতীয় অংশ হইতে 7 বিয়োগ করিলে, তৃতীয় অংশকে 3 দ্বারা গুণ করিলে এবং চতুর্থ অংশকে 4 দ্বারা ভাগ করিলে প্রতি ক্ষেত্রে লব্ধ ফল একই হইবে।

61. দুই অঙ্কে গঠিত একটি সংখ্যার দশকের অঙ্ক এককের অঙ্কের দ্বিগুণ। সংখ্যাটি হইতে 36 বিয়োগ করিলে অঙ্ক দুইটি পরস্পর স্থান পরিবর্তন করে। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

62. দুই অঙ্কে গঠিত একটি সংখ্যার অঙ্ক দুইটির সমষ্টি 11; বাম দিকের (দশকের) অঙ্কটির সহিত 2 যোগ করিলে যোগফল হইবে সংখ্যাটির $\frac{1}{8}$। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

63. দুই অঙ্কে গঠিত একটি সংখ্যার এককের অঙ্ক দশকের অঙ্কের 3 গুণ। সংখ্যাটির সহিত 36 যোগ করিলে অঙ্ক দুইটি উল্টাইয়া যায়। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

64. দুই অঙ্কে গঠিত একটি সংখ্যার অঙ্ক দুইটির অন্তর 4; ক্ষুদ্রতর দশকের অঙ্কের 13 গুণের সহিত 36 যোগ করিলে অঙ্ক দুইটি উল্টাইয়া যায়। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

65. দুই অঙ্কে গঠিত একটি সংখ্যার অঙ্ক দুইটির সমষ্টি 10; সংখ্যাটি হইতে 36 বিয়োগ করিলে অঙ্ক দুইটি স্থান পরিবর্তন করে। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

66. তিনটি অঙ্কে গঠিত একটি সংখ্যার প্রত্যেক অঙ্ক উহার পরবর্তী অঙ্ক অপেক্ষা 1 কম। সংখ্যাটি হইতে 27 বিয়োগ করিলে বিয়োগফল অঙ্ক তিনটির সমষ্টির 16 গুণ হয়। সংখ্যাটি নির্ণয় কর। [C. U. 1949]

67. তিন অঙ্কে গঠিত কোন সংখ্যার অঙ্ক তিনটি ক্রমিক সংখ্যা। একক ও শতকের অঙ্ক দুইটি পরস্পর স্থান পরিবর্তন করিলে যে সংখ্যা হয় উহার এবং নির্ণেয় সংখ্যার অন্তর হয় বৃহত্তম অঙ্কের 33 গুণ। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

68. একখানি ঘরের দৈর্ঘ্য বিস্তার অপেক্ষা 5 ফুট বেশী। যদি দৈর্ঘ্য 5 ফুট বাড়ান এবং বিস্তার 3 ফুট কমান হইত, তাহা হইলে ক্ষেত্রফলের কোন পরিবর্তন হইত না। ঘরের দৈর্ঘ্য ও বিস্তার নির্ণয় কর।

69. একখানি ঘরের দৈর্ঘ্য বিস্তারের দ্বিগুণ। দৈর্ঘ্য 6 ফুট বাড়াইলে এবং বিস্তার 2 ফুট কমাইলে যে ক্ষেত্রফল হয় উহা পূর্বের ক্ষেত্রফল অপেক্ষা 12 বর্গফুট বেশী। ঘরখানির দৈর্ঘ্য ও বিস্তার কত নির্ণয় কর।

70. এক ব্যক্তি 1 ঘণ্টা 15 মিনিটে মোট 7 মাইল পথ অতিক্রম করে। উক্ত পথের কিছু অংশ সে ঘণ্টায় 4 মাইল বেগে পদব্রজে এবং অবশিষ্ট পথ ঘণ্টায় 10 মাইল বেগে অশ্বারোহণে যায়। পদব্রজে সে কত মাইল পথ গিয়াছিল ?

চতুর্থ অধ্যায়

সূত্রাবলী ও উহাদের প্রয়োগ

1. সপ্তম ও অষ্টম শ্রেণীর পাঠ্যাংশে যে কয়েকটি বৈজিক স্থত্র ও উহাদের প্রয়োগের বিষয় আলোচিত হইয়াছে এস্থলে সংক্ষেপে উহাদের পুনরালোচনা করা হইল।

2. সূত্র ঃ

(1) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

(2) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

(3) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

অনুসিদ্ধান্ত (*i*) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$
$=(a-b)^2+2ab$

(*ii*) $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

(*iii*) $(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$

(*iv*) $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$

(*v*) $(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$

(*vi*) $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab.$

উদা. 1. স্থত্র সাহায্যে উত্তর নির্ণয় কর ঃ

(*i*) $(4x+3y)^2$, (*ii*) $(3x^2-5y^3)^2$, (*iii*) $(2a+3b+4c)^2$.

(*i*) $(4x+3y)^2=(4x)^2+2.4x.3y.+(3y)^2$
$=16x^2+24xy+9y^2$

(*ii*) $(3x^2-5y^3)^2=(3x^2)^2-2.3x^2.5y^3+(5y^3)^2$
$=9x^4-30x^2y^3+25y^6.$

(*iii*) $(2a+3b+4c)^2=(2a)^2+(3b)^2+(4c)^2$
$+2.2a.3b+2.3b.4c+2.4c.2a.$
$=4a^2+9b^2+16c^2+12ab+24bc+16ca.$

উদা. 2. $(3x-4y-5z)^2$

$$=\{3x+(-4y)+(-5z)\}^2$$
$$=(3x)^2+(-4y)^2+(-5z)^2+2.(3x)(-4y)+2(-4y)(-5z)+2(-5z)(3x)$$
$$=9x^2+16y^2+25z^2-24xy+40yz-30zx.$$

উদা. 3. পূর্ণবর্গ রূপে প্রকাশ কর :

(i) $9x^2+30xy+25y^2$, (ii) $4a^4-36a^2b^3+81b^6$,

(iii) $9x^2-2+\dfrac{1}{9x^2}$

(i) $9x^2+30xy+25y^2=(3x)^2+2.3x.5y+(5y)^2$
$=(3x+5y)^2$

(ii) $4a^4-36a^2b^3+81b^6=(2a^2)^2-2.2a^2.9b^3+(9b^3)^2$
$=(2a^2-9b^3)^2$

(iii) $9x^2-2+\dfrac{1}{9x^2}=(3x)^2-2.3x.\dfrac{1}{3x}+\left(\dfrac{1}{3x}\right)^2=\left(3x-\dfrac{1}{3x}\right)^2$.

উদা. 4. সরল কর :

(i) $13{\cdot}7\times13{\cdot}7 + 2\times13{\cdot}7\times6{\cdot}3 + 6{\cdot}3\times6{\cdot}3$

(ii) $69{\cdot}8\times69{\cdot}8 - 139{\cdot}6\times58{\cdot}8 + 58{\cdot}8\times58{\cdot}8$

(i) ধর $a=13{\cdot}7$ এবং $b=6{\cdot}3$, তাহা হইলে $a+b=13{\cdot}7+6{\cdot}3=20$.

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $=a^2+2ab+b^2=(a+b)^2=(20)^2=400$.

(ii) ধর $a=69{\cdot}8$ এবং $b=58{\cdot}8$. তাহা হইলে $a-b=69{\cdot}8-58{\cdot}8=11$,
এবং $2ab=2\times69{\cdot}8\times58{\cdot}8=139{\cdot}6\times58{\cdot}8$.

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $=a^2-2ab+b^2=(a-b)^2=(11)^2=121$.

উদা. 5. মান নির্ণয় কর : $169x^2-390xy+225y^2$, যখন $x=7$, $y=6$.

$169x^2-390xy+225y^2=(13x)^2-2.13x.15y+(15y)^2$
$=(13x-15y)^2=(13\times7-15\times6)^2=(91-90)^2=(1)^2=1$.

উদা. 6. সরল কর :

$$(6x-5y)^2-2(6x-5y)(5x-4y)+(5x-4y)^2$$

ধর $a=6x-5y$ এবং $b=5x-4y$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

$$=\{(6x-5y)-(5x-4y)\}^2=(x-y)^2$$

উদা. 7. $a+b=4$ এবং $ab=3$ হইলে, দেখাও যে $a^2+b^2=10$

$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(4)^2-2\times 3=16-6=10.$$

উদা. 8. $a-\frac{1}{a}=3$ হইলে, $a^2+\frac{1}{a^2}$ এর মান নির্ণয় কর।

$$a^2+\frac{1}{a^2}=(a)^2+\left(\frac{1}{a}\right)^2=\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+2.a.\frac{1}{a}=(3)^2+2$$

$$=9+2=11.$$

উদা. 9. $x+y=8$ এবং $xy=15$ হইলে, $x-y$ এর মান নির্ণয় কর।

$$(x-y)^2=(x+y)^2-4xy=(8)^2-4\times 15=64-60=4.$$

$\therefore\ x-y=\sqrt{4}=2.$

উদা. 10. $x-y=1$ এবং $xy=12$ হইলে, $x+y$ এর মান নির্ণয় কর।

$$(x+y)^2=(x-y)^2+4xy=(1)^2+4.12.=1+48=49$$

$\therefore\ x+y=7.$

উদা. 11. $a+b+c=6$ এবং $ab+bc+ca=11$ হইলে, $a^2+b^2+c^2$ এর মান কত ?

$$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$$

$$=(6)^2-2.11=36-22=14.$$

উদা. 12. $x+y=4$ এবং $x-y=2$ হইলে, $8xy(x^2+y^2)$ এর মান নির্ণয় কর।

$$8xy(x^2+y^2)=2.(x^2+y^2).4xy$$

$$=\{(x+y)^2+(x-y)^2\}\{(x+y)^2-(x-y)^2\}$$

$$=(4^2+2^2)(4^2-2^2)$$

$$=20\times 12=240.$$

প্রশ্নমালা 7

সূত্র সাহায্যে উত্তর নির্ণয় কর :

1. $(2a+3b)^2$ 2. $(5x+3a)^2$ 3. $(3a^2+2b^2)^2$

4. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$ 5. $\left(\frac{1}{p}+\frac{2}{q}\right)^2$ 6. $(2xy+ab)^2$

7. $\left(3a+\frac{2}{3a}\right)^2$ 8. $(2a^2-3b^2)^2$ 9. $\left(a-\frac{1}{a}\right)^2$

10. $\left(3x-\frac{1}{3x}\right)^2$ 11. $(p^4-2q^2)^2$ 12. $(3x+4y+z)^2$

13. $(x-y+z)^2$ 14. $(3a^2-b^2-4c^2)^2$ 15. $(px-qy-rz)^2$

পূর্ণবর্গরূপে প্রকাশ কর :

16. $16a^2+40ab+25b^2$ 17. $49a^4-14a^2+1$

18. $25x^2-30xy+9y^2$ 19. $36a^2b^2-12abx+x^2$

20. $4a^2-2a+\frac{1}{4}$ 21. $\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{2}xy+\frac{9}{4}y^2$

22. $9x^2+\frac{1}{9x^2}+2$ 23. $\frac{4}{a^2b^2}-1+\frac{a^2b^2}{16}$

মান নির্ণয় কর :

24. $64a^2+192ab+144b^2$, যখন $a=2$, $b=7$

25. $49a^2-56ab+16b^2$, যখন $a=15$, $b=25$

26. $7{\cdot}23\times7{\cdot}23+7{\cdot}23\times5{\cdot}54+2{\cdot}77\times2{\cdot}77$

27. $8{\cdot}27\times8{\cdot}27-2\times8{\cdot}27\times8{\cdot}22+8{\cdot}22\times8{\cdot}22$

28. $29{\cdot}76\times29{\cdot}76-59{\cdot}52\times28{\cdot}26+28{\cdot}26\times28{\cdot}26$

সরল কর :

29. $(a+b)^2-2(a+b)(a-b)+(a-b)^2$

30. $(2a+3b)^2-2(2a+3b)(2a-3b)+(2a-3b)^2$

31. $(a+b+c)^2-2(a+b+c)(a+b-c)+(a+b-c)^2$

32. $(x-2y)^2+(3x-5y)^2-2(x-2y)(3x-5y)$

33. $a+b=5$ এবং $ab=6$ হইলে, দেখাও যে $a^2+b^2=13$

34. $x+y=8$ এবং $xy=15$ হইলে, x^2+y^2 এর মান নির্ণয় কর।

35. $x-y=1$ এবং $xy=30$ হইলে, x^2+y^2 এর মান নির্ণয় কর।

36. $x+y=13$, $xy=42$ হইলে, $x-y$ এর মান কত ?

37. $x-y=2$, $xy=35$ হইলে, $x+y$ এর মান কত ?

38. $a+\frac{1}{a}=2$ হইলে, $a^2+\frac{1}{a^2}=$ কত ?

39. $a+\frac{1}{a}=\sqrt{2}$ হইলে, প্রমাণ কর $a^2+\frac{1}{a^2}=0$.

40. $x+\frac{1}{x}=3$ হইলে, প্রমাণ কর $x^2+\frac{1}{x^2}=7$.

41. $x-\frac{1}{x}=3$ হইলে, $x^2+\frac{1}{x^2}=$ কত ?

42. $x+\frac{1}{x}=a$ হইলে, প্রমাণ কর $x^2+\frac{1}{x^2}=a^2-2$.

43. $a+b=8$ এবং $ab=15$ হইলে, $(a-b)^2$ এর মান নির্ণয় কর।

44. $a-b=2$, $ab=15$ হইলে, a^2+b^2 এবং a^4+b^4 এর মান নির্ণয় কর।

45. $x+\frac{1}{x}=5$ হইলে, প্রমাণ কর :

(i) $x^2+\frac{1}{x^2}=23$, (ii) $x^4+\frac{1}{x^4}=527$, (iii) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=21$.

46. $a+b=3$, $a-b=1$ হইলে, $8ab(a^2+b^2)$ এর মান নির্ণয় কর।

---

3. দুইটি রাশির সমষ্টি ও অন্তরের গুণফল উহাদের বর্গের অন্তরের সমান। উক্ত নিয়মটির বৈজিক প্রতিসূত্র :

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

উদা. 1. সূত্রের সাহায্যে $2x+3y$ এবং $2x-3y$ এর গুণফল নির্ণয় কর।

নির্ণেয় গুণফল $=(2x+3y)(2x-3y)$

$=(2x)^2-(3y)^2=4x^2-9y^2$

উদা. 2. সূত্রের সাহায্যে $2a-3b$, $2a+3b$ এবং $4a^2+9b^2$ এর ধারাবাহিক গুণফল নির্ণয় কর :

নির্ণেয় গুণফল $=(2a-3b)(2a+3b)(4a^2+9b^2)$

$=\{(2a)^2-(3b)^2\}(4a^2+9b^2)$

$=(4a^2-9b^2)(4a^2+9b^2)$

$=(4a^2)^2-(9b^2)^2$

$=16a^4-81b^4$

উদা. 3. $(a+b+c)$ এবং $(a+b-c)$ এর গুণফল নির্ণয় কর।

নির্ণেয় গুণফল $=(a+b+c)(a+b-c)$

$=\{(a+b)+c\}\{(a+b)-c\}$

$=(a+b)^2-c^2$

$=a^2+b^2+2ab-c^2$

$=a^2+b^2-c^2+2ab.$

উদা. 4. a^2+ab+b^2 কে a^2-ab+b^2 দ্বারা গুণ কর।

নির্ণেয় গুণফল $=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$

$=\{(a^2+b^2)+ab\}\{(a^2+b^2)-ab\}$

$=(a^2+b^2)^2-(ab)^2$

$=a^4+b^4+2a^2b^2-a^2b^2$

$=a^4+a^2b^2+b^4.$

উদা. 5. মান নির্ণয় কর : 937^2-927^2

$937^2-927^2=(937+927)(937-927)$

$=1864\times10=18640.$

উদা. 6. 915 ও 885 এর গুণফল নির্ণয় কর।

$915\times885=(900+15)(900-15)$

$=900^2-15^2=810000-225=809775.$

প্রশ্নমালা 8

সূত্র সাহায্যে গুণফল নির্ণয় কর :

1. $(5a+6b)(5a-6b)$
2. $(a^2+2x)(a^2-2x)$
3. $(ab-ac)(ab+ac)$
4. $(a^3+bc)(a^3-bc)$
5. $(a^3+b^3)(a^3-b^3)$
6. $(x+\frac{1}{2}y)(x-\frac{1}{2}y)$
7. $(2m^2+3n^2)(2m^2-3n^2)$
8. $(2ac+bd)(2ac-bd)$
9. $(a+b)(a-b)(a^2+b^2)$
10. $(x-y)(x+y)(x^2+y^2)$
11. $(a+2b)(a-2b)(a^2+4b^2)$
12. $(1+x)(1+x^2)(1-x)$

সূত্র সাহায্যে মান নির্ণয় কর :

13. 729^2-719^2
14. 8748^2-8648^2
15. $57285^2-57185^2$
16. 424×376
17. 1216×1184
18. 2525×2475

সূত্র সাহায্যে গুণফল নির্ণয় কর :

19. $(x+y-z)(x+y+z)$
20. $(x+y-z)(x-y+z)$
21. $(2x-3y-3z)(2x+3y-3z)$
22. $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$
23. $(x^2+2xy+2y^2)(x^2-2xy+2y^2)$
24. $(x^4+x^2y^2+y^4)(x^4-x^2y^2+y^4)$
25. $(a+b+c+d)(a+b-c-d)$
26. $(a+b-c-d)(a+b-c+d)$

---

4. সূত্র : $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \quad \cdots \quad (i)$

$=a^3+b^3+3ab(a+b) \quad \cdots \quad (ii)$

সূত্রের (ii) আকার হইতে যথাক্রমে $3ab(a+b)$ ও (a^3+b^3) কে পক্ষান্তর করিয়া দুইটি অনুসিদ্ধান্ত প্রতিষ্ঠিত করা যায়।

অনুসিদ্ধান্ত 1. $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

অনুসিদ্ধান্ত 2. $(a+b)^3-(a^3+b^3)=3ab(a+b)$

উদা. 1. $2x+3$-এর ঘন নির্ণয় কর।

(i) অনুসারে, $(2x+3)^3 = (2x)^3+3.(2x)^2.(3)+3.(2x).(3)^2+(3)^3$

$= 8x^3+3.4x^2.3+3.2x.9+27$

$= 8x^3+36x^2+54x+27.$

(*ii*) অনুসারে, $(2x+3)^3 = (2x)^3+(3)^3+3.(2x).(3).(2x+3)$
$= 8x^3+27+18x(2x+3)$
$= 8x^3+27+36x^2+54x$
$= 8x^3+36x^2+54x+27.$

সূত্রের (*i*) বা (*ii*) যে কোন আকার ধরিয়াই উত্তর নির্ণয় করা যায়।

উদা. 2. $3a^2+5b^3$-এর ঘন নির্ণয় কর।

$$(3a^2+5b^3)^3 = (3a^2)^3+3.(3a^2)^2.(5b^3)+3.(3a^2).(5b^3)^2+(5b^3)^3$$
$$= 27a^6+3.9a^4.5b^3+3.3a^2.25b^6+125b^9$$
$$= 27a^6+135a^4b^3+225a^2b^6+125b^9$$

উদা. 3. $(35)^3$ কত হইবে বৈজিক সূত্রের সাহায্যে নির্ণয় কর।

$$(35)^3 = (30+5)^3 = (30)^3+(5)^3+3\times 30\times 5(30+5)$$
$$= 27000+125+450\times 35$$
$$= 27000+125+15750 = 42875$$

উদা. 4. $a+b+c$-এর ঘন নির্ণয় কর।

$$(a+b+c)^3 = \{(a+b)+c\}^3$$
$$= (a+b)^3+3(a+b)^2.(c)+3(a+b).(c)^2+(c)^3$$
$$= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3c(a^2+2ab+b^2)+3c^2(a+b)+c^3$$
$$= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3a^2c+6abc+3b^2c+3ac^2+3bc^2+c^3$$
$$= a^3+b^3+c^3+3a^2b+3ab^2+3b^2c+3bc^2+3c^2a+3ca^2+6abc.$$

উদা. 5. সরল কর :

$$(2x+3y)^3+3(2x+3y)^2(y-2x)+3(2x+3y)(y-2x)^2+(y-2x)^3.$$

ধর $a = 2x+3y$
এবং $b = y-2x$

প্রদত্ত রাশি $= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
$= (a+b)^3$
$= (2x+3y+y-2x)^3$
$= (4y)^3 = 64y^3.$

উদা. 6. সরল কর :

$$(a+b-c)^3+(a-b+c)^3+6a\{a^2-(b-c)^2\}$$

ধর $x = a+b-c$

এবং $y = a-b+c$

যোগ করিয়া, $x+y=2a \quad \therefore \quad 3(x+y)=6a$

এখন, প্রদত্ত রাশি $= x^3+y^3+3(x+y)\{(a)^2-(b-c)^2\}$

$$= x^3+y^3+3(x+y)(a+b-c)(a-b+c)$$
$$= x^3+y^3+3(x+y)xy$$
$$= x^3+y^3+3xy(x+y)$$
$$= (x+y)^3=(2a)^3=8a^3.$$

উদা. 7. সরল কর :

$$(\cdot875)^3+3\times(\cdot875)^2\times\cdot125+3\times\cdot875\times(\cdot125)^2+(\cdot125)^3$$

ধর $a=\cdot875$ এবং $b=\cdot125$, তাহা হইলে $a+b=\cdot875+\cdot125=1$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$$= (a+b)^3=(1)^3=1.$$

উদা. 8. যদি $a+b=7$ এবং $ab=10$ হয়, a^3+b^3 এর মান নির্ণয় কর।

$$a^3+b^3 = (a+b)^3-3ab(a+b)$$
$$= (7)^3-3.10.7=343-210=133.$$

উদা. 9. যদি $x+\frac{1}{x}=4$ হয়, প্রমাণ কর যে $x^3+\frac{1}{x^3} = 52.$

$$x^3+\frac{1}{x^3} = (x)^3+\left(\frac{1}{x}\right)^3$$
$$= \left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3.x.\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right)$$
$$= (4)^3-3.4=64-12=52.$$

উদা. 10. যদি $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=3$ হয়, প্রমাণ কর যে, $x^3+\frac{1}{x^3}=0.$

$$x^3+\frac{1}{x^3}=(x)^3+\left(\frac{1}{x}\right)^3=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3x.\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

$$=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2\left(x+\frac{1}{x}\right)-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

$$=3\left(x+\frac{1}{x}\right)-3\left(x+\frac{1}{x}\right) \quad \left[\because \left(x+\frac{1}{x}\right)^2=3\right]$$

$$=0.$$

উদা. 11. যদি $a+b=4$ হয়, a^3+b^3+12ab এর মান নির্ণয় কর।

$$a^3+b^3+12ab=(a+b)^3-3ab(a+b)+12ab$$

$$=(4)^3-3ab.4+12ab \quad [\because a+b=4]$$

$$=64-12ab+12ab=64.$$

উদা. 12. যদি $a+b+c=0$ হয়, প্রমাণ কর যে $a^3+b^3+c^3=3abc$

$a+b+c=0$

বা, $a+b=-c$

$$\because a^3+b^3+c^3=(a+b)^3-3ab(a+b)+c^3$$

$$=(-c)^3-3ab(-c)+c^3 \quad [\because a+b=-c]$$

$$=-c^3+3abc+c^3$$

$$=3abc.$$

উদা. 13. যদি $a^3+b^3=9$ এবং $a+b=3$ হয়, ab এর মান নির্ণয় কর।

$3ab(a+b)=(a+b)^3-(a^3+b^3)$

বা, $3ab.3=(3)^3-9$

বা, $9ab=27-9=18 \quad \therefore ab=2.$

উদা. 14. $x=\frac{2}{3}$ হইলে, $8+36x+54x^2+27x^3$ এর মান নির্ণয় কর।

$$8+36x+54x^2+27x^3=(2)^3+3.2^2.3x+3.2.(3x)^2+(3x)^3$$

$$=(2+3x)^3$$

$$=(2+3\times\tfrac{2}{3})^3=(4)^3=64.$$

প্রশ্নমালা 9

ঘন নির্ণয় কর :

1. $1+2x$ 2. $5x+2$ 3. $a+3b$
4. $4x+3y$ 5. $2a^2+3b^2$ 6. $ax+by$
7. ax^2+a^2x 8. px^2+q 9. x^3+5y^2
10. ab^2+bc 11. $5ax+2by$ 12. $4a^3+5b^2$
13. $2a+b+c$ 14. a^2+bc+d 15. $2x+3y+5z$
16. $a^2+b^2+2c^2$

17. সূত্রের সাহায্যে মান নির্ণয় কর :

(i) $(45)^3$ (ii) $(75)^3$ (iii) $(205)^3$

সরল কর :

18. $(ax+by)^3+3(ax+by)^2(ax-by)+3(ax+by)(ax-by)^2+(ax-by)^3$
19. $(x^2+x+1)^3+(x^2-x-1)^3+3(x^2+x+1)^2(x^2-x-1)+3(x^2+x+1)(x^2-x-1)^2$
20. $(a+b+c)^3+(b-c-a)^3+6b\{b^2-(c+a)^2\}$
21. $(3x+4y-5z)^3+(5z-3x+4y)^3+24y\{16y^2-(5z-3x)^2\}$
22. $(a+b)^6+3(a+b)^4(a-b)^2+3(a+b)^2(a-b)^4+(a-b)^6$
23. $\cdot327\times\cdot327\times\cdot327+\cdot673\times\cdot673\times\cdot673+3\times\cdot327\times\cdot673(\cdot327+\cdot673)$
24. $(2\cdot671)^3+3\times(2\cdot671)^2\times2\cdot329+3\times2\cdot671\times(2\cdot329)^2+(2\cdot329)^3$
25. মান নির্ণয় কর :

(i) $1+15x+75x^2+125x^3$ এর, যখন $x=\frac{3}{5}$

(ii) $64x^3+144x^2+108x+30$ এর, যখন $x=\frac{1}{4}$

26. a^3+b^3 এর মান নির্ণয় কর, যখন

(i) $a+b=5$ এবং $ab=4$ (ii) $a+b=8$ এবং $ab=15$

(iii) $a+b=7$ এবং $ab=6$ (iv) $a+b=6$ এবং $ab=8$

27. যদি $x+\frac{1}{x}=p$ হয়, প্রমাণ কর $x^3+\frac{1}{x^3}=p^3-3p$.

28. $x+\frac{1}{x}=3$ হইলে, $x^3+\frac{1}{x^3}$ এর মান নির্ণয় কর।

29. যদি $a+b=5$ হয়, প্রমাণ কর যে, $a^3+b^3+15ab=125$.

30. যদি $a+b=c$ হয়, প্রমাণ কর যে $a^3+b^3+3abc=c^3$.

31. যদি $a=b+c$ হয়, প্রমাণ কর যে $a^3-b^3-c^3=3abc$.

32. যদি $a+b=4$ এবং $ab=3$ হয়, $a^3+b^3=$ কত ?

33. যদি $a^3+b^3=133$ এবং $a+b=7$ হয়, ab-এর মান নির্ণয় কর।

34. যদি $a^2+b^2=5$ এবং $a-b=1$ হয়, a^3+b^3-এর মান নির্ণয় কর।

---

5. সূত্র : $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 \quad \cdots \quad (i)$

$=a^3-b^3-3ab(a-b) \quad \cdots \quad (ii)$

সূত্রের (ii)-আকার হইতে $-3ab(a-b)$ ও (a^3-b^3) কে পক্ষান্তর করিয়া দুইটি অনুসিদ্ধান্ত প্রতিষ্ঠিত করা যায়—

অনুসিদ্ধান্ত 1. $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

অনুসিদ্ধান্ত 2. $(a^3-b^3)-(a-b)^3=3ab(a-b)$

উদা. 1. $2x-3$ এর ঘন নির্ণয় কর।

(i) অনুসারে, $(2x-3)^3=(2x)^3-3.(2x)^2.3+3(2x).(3)^2-(3)^3$
$=8x^3-3.4x^2.3+3.2x.9-27$
$=8x^3-36x^2+54x-27.$

(ii) অনুসারে, $(2x-3)^3=(2x)^3-(3)^3-3.2x.3(2x-3)$
$=8x^3-27-18x(2x-3)$
$=8x^3-27-36x^2+54x$
$=8x^3-36x^2+54x-27.$

সূত্রের (i) বা (ii) যে কোন আকার ধরিয়াই উত্তর নির্ণয় করা যায়।

উদা. 2. $3a^2-5b^3$ এর ঘন নির্ণয় কর।

$(3a^2-5b^3)^3=(3a^2)^3-3.(3a^2)^2(5b^3)+3.(3a^2)(5b^3)^2-(5b^3)^3$
$=27a^6-3.9a^4.5b^3+3.3a^2.25b^6-125b^9$
$=27a^6-135a^4b^3+225a^2b^6-125b^9.$

উদা. 3. বৈজিক সূত্রের সাহায্যে 996 এর ঘন নির্ণয় কর।

$$(996)^3 = (1000-4)^3$$
$$= (1000)^3 - 3.(1000)^2.4 + 3.1000.(4)^2 - (4)^3$$
$$= (1000000000 - 12000000 + 48000 - 64$$
$$= 1000048000 - 12000064 = 988047936.$$

উদা. 4. $(a-b-c)$ এর ঘন নির্ণয় কর।

$$(a-b-c)^3 = \{(a-b)-c\}^3$$
$$= (a-b)^3 - 3(a-b)^2.(c) + 3(a-b).(c)^2 - (c)^3$$
$$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 - 3c(a^2 - 2ab + b^2) + 3c^2(a-b) - c^3$$
$$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 - 3ca^2 + 6abc - 3b^2c + 3c^2a - 3bc^2 - c^3$$
$$= a^3 - b^3 - c^3 - 3a^2b + 3ab^2 - 3b^2c - 3bc^2 + 3c^2a - 3ca^2 + 6abc.$$

উদা. 5. সরল কর :

$$(2x-y+z)^3 - 3(2x-y+z)^2(2x-y-z) + 3(2x-y+z) \times (2x-y-z)^2 - (2x-y-z)^3$$

ধর $a = 2x - y + z$

এবং $b = 2x - y - z$; তাহা হইলে, $a - b = 2z$.

প্রদত্ত রাশি $= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$= (a-b)^3 = (2z)^3 = 8z^3.$

উদা. 6. সরল কর : $(\cdot948) \times (\cdot948) \times (\cdot948) - 3 \times (\cdot948) \times (\cdot948) \times (\cdot448) + 3 \times (\cdot948) \times (\cdot448) \times (\cdot448) - (\cdot448) \times (\cdot448) \times (\cdot448)$.

ধর $a = \cdot948$ এবং $b = \cdot448$, $\therefore \ a - b = \cdot5$

প্রদত্ত রাশি $= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$= (a-b)^3 = (\cdot5)^3 = \cdot125.$

উদা. 7. যদি $x = 4$ হয়, $27x^3 - 54x^2 + 36x + 5$ এর মান নির্ণয় কর।

$$27x^3 - 54x^2 + 36x + 5$$
$$= (3x)^3 - 3.(3x)^2.(2) + 3.(3x).(2)^2 - (2)^3 + 13$$
$$= (3x-2)^3 + 13$$
$$= (3 \times 4 - 2)^3 + 13$$
$$= (10)^3 + 13 = 1000 + 13 = 1013.$$

উদা. 8. সরল কর : $(a-b+c)^3-(a-b-c)^3-6c\{(a-b)^2-c^2\}$

ধর $x = a-b+c$

এবং $y = a-b-c$

$\therefore\ x-y = 2c \qquad \therefore\ 3(x-y) = 6c.$

এখন, প্রদত্ত রাশি $= x^3-y^3-3(x-y)\{(a-b+c)(a-b-c)\}$

$= x^3-y^3-3(x-y)xy$

$= x^3-y^3-3xy(x-y)$

$= (x-y)^3=(2c)^3=8c^3.$

উদা. 9. যদি $x-y=1$ এবং $xy=12$ হয়, x^3-y^3 এর মান নির্ণয় কর।

$x^3-y^3 = (x-y)^3+3xy(x-y)$

$= (1)^3+3.12.1$

$= 1+36=37.$

উদা. 10. যদি $x-\frac{1}{x} = 2$ হয়, দেখাও যে, $x^3-\frac{1}{x^3} = 14$

$$x^3-\frac{1}{x^3} = (x)^3-\left(\frac{1}{x}\right)^3$$

$$= \left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3.x.\frac{1}{x}\left(x-\frac{1}{x}\right)$$

$$= (2)^3+3.(2)=8+6=14.$$

উদা. 11. যদি $a-b = 5c$ হয়, $a^3-b^3-15abc$ এর মান নির্ণয় কর।

$a^3-b^3-15abc = (a-b)^3+3ab(a-b)-15abc$

$= (5c)^3+3ab(5c)-15abc$

$= 125c^3+15abc-15abc=125c^3.$

উদা. 12. যদি $a^3-b^3 = 117$ এবং $a-b = 3$ হয়, ab এর মান নির্ণয় কর।

$3ab(a-b) = (a^3-b^3)-(a-b)^3$

বা, $3ab.3 = 117-(3)^3$

বা, $9ab = 90$ বা, $ab = 10.$

প্রশ্নমালা 20

ঘন নির্ণয় কর :

1. $2a-3b$ 2. $1-3x$ 3. $4x-3y$

4. $2a^2-5b^2$ 5. $3x^3-5$ 6. $2a^3-5b^2$

7. a^2-bc 8. $5x-3x^2$ 9. ab^2-a^2b

10. $a+b-c$ 11. $2a-3b-1$ 12. $a^2+bc-3d$

13. 89 14. 497 15. 295

সরল কর :

16. $(4a-3b)^3-3(4a-3b)^2(a-3b)+3(4a-3b)(a-3b)^2-(a-3b)^3$

17. $(p+q-r)^3-3(p+q-r)^2(p-3q-r)+3(p+q-r)(p-3q-r)^2-(p-3q-r)^3$

18. $(3x+4y)^3-(3x-4y)^3-24y(9x^2-16y^2)$

19. $(a+b+c)^3-(a-b-c)^3-6(b+c)\{a^2-(b+c)^2\}$

20. $(a+1)^6-(a-1)^6-12a(a^2-1)^2$

21. $(2{\cdot}357)^3-3\times(2{\cdot}357)^2\times(1{\cdot}857)+3\times(2{\cdot}357)\times(1{\cdot}857)^2-(1{\cdot}857)^3$

22. $({\cdot}926)\times({\cdot}926)\times({\cdot}926)-({\cdot}826)\times({\cdot}826)\times({\cdot}826)-3\times({\cdot}926)\times({\cdot}826)\times({\cdot}1)$

23. $x=2\frac{1}{2}$ হইলে, $64x^3-48x^2+12x-1$ এর মান নির্ণয় কর।

24. $x=2\frac{1}{3}$ হইলে, $27x^3-135x^2+225x-113$ এর মান নির্ণয় কর।

25. a^3-b^3 এর মান নির্ণয় কর, যখন—

(i) $a-b=1$ এবং $ab=2$ (ii) $a-b=3$ এবং $ab=10$

(iii) $a-b=2$ এবং $ab=24$ (iv) $a-b=4$ এবং $ab=5$

26. যদি $x-\frac{1}{x}=2$ হয়, $x^3-\left(\frac{1}{x}\right)^3$ এর মান নির্ণয় কর।

27. যদি $x-\frac{1}{x}=m$ হয়, $x^3-\left(\frac{1}{x}\right)^3$ এর মান নির্ণয় কর।

28. যদি $a-b=10$ হয়, a^3-b^3-30ab এর মান কত ?

29. যদি $x-y=a$ হয়, প্রমাণ কর যে $x^3-y^3-3axy=a^3$.

30. যদি $a^2-b^2=c$, হয় $a^6-b^6-3a^2b^2c$ এর মান কত ?

31. যদি $a^3-b^3=26$ এবং $a-b=2$ হয়, ab এর মান নির্ণয় কর।

32. যদি $a^3-b^3=784$ এবং $a-b=4$ হয়, ab এর মান নির্ণয় কর।

---

6. সূত্র : $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

উদা. 1. সূত্রের সাহায্যে x^2-3x+9 কে $x+3$ দ্বারা গুণ কর।

$$(x+3)(x^2-3x+9)$$
$$=(x+3)\{(x)^2-x.3+(3)^2\}$$
$$=(x)^3+(3)^3=x^3+27.$$

উদা. 2. $5a^2+6b^3$ ও $25a^4-30a^2b^3+36b^6$ এর গুণফল নির্ণয় কর।

$$(5a^2+6b^3)(25a^4-30a^2b^3+36b^6)$$
$$=(5a^2+6b^3)\{(5a^2)^2-5a^2.6b^3+(6b^3)^2\}$$
$$=(5a^2)^3+(6b^3)^3=125a^6+216b^9.$$

উদা. 3. সরল কর :

$$(x+y)(x^2-xy+y^2)-(y+z)(y^2-yz+z^2)+(z+x)(z^2-zx+x^2)$$

প্রদত্ত রাশি $=(x^3+y^3)-(y^3+z^3)+(z^3+x^3)$

$$=x^3+y^3-y^3-z^3+z^3+x^3=2x^3.$$

উদা. 4. $27a^3+64b^6$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

$$27a^3+64b^6=(3a)^3+(4b^2)^3$$
$$=(3a+4b^2)\{(3a)^2-3a.4b^2+(4b^2)^2\}$$
$$=(3a+4b^2)(9a^2-12ab^2+16b^4).$$

প্রশ্নমালা 11

গুণ কর (সূত্রের সাহায্যে) :

1. $25x^2-5x+1$ কে $5x+1$ দ্বারা

2. $9a^2-12ab+16b^2$ কে $3a+4b$ দ্বারা

3. $a^2b^2-4ab+16$ কে $ab+4$ দ্বারা

4. $100x^2-30xy+9y^2$ কে $10x+3y$ দ্বারা

5. $a^4 - a^2 + 1$ কে $a^2 + 1$ দ্বারা

6. $a^4b^2 - 6a^2b + 36$ কে $a^2b + 6$ দ্বারা

7. $ab + bc$ কে $a^2b^2 - ab^2c + b^2c^2$ দ্বারা

8. $a^3 + 5b^6$ কে $a^6 - 5a^3b^6 + 25b^{12}$ দ্বারা

9. $a + b$, $a^2 - ab + b^2$ ও $a^3 - b^3$ এর ধারাবাহিক গুণফল নির্ণয় কর।

10. $x + y$, $x^2 - xy + y^2$ ও $x^6 - x^3y^3 + y^6$ এর ধারাবাহিক গুণফল নির্ণয় কর।

সরল কর :

11. $(5x + 6y)(25x^2 - 30xy + 36y^2) - (2x + 3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2) - (4x + 5y)(16x^2 - 20xy + 25y^2)$

12. $(2a + b)(4a^2 - 2ab + b^2) - (a + 2b)(a^2 - 2ab + 4b^2) - (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর (Resolve into factors) :

13. $27x^3 + 64$ 14. $1 + a^3b^3$ 15. $343x^3 + 8y^3$

16. $125a^3 + 216b^3$ 17. $1000a^6 + 729b^6$

---

7. সূত্রঃ $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

উদা. 1. সূত্রের সাহায্যে $4a^2 + 6ab + 9b^2$ কে $2a - 3b$ দ্বারা গুণ কর।

$$(2a - 3b)(4a^2 + 6ab + 9b^2) = (2a - 3b)\{(2a)^2 + 2a.3b + (3b)^2\}$$
$$= (2a)^3 - (3b)^3$$
$$= 8a^3 - 27b^3.$$

উদা. 2. $x - 2y$, $x^2 + 2xy + 4y^2$ ও $x^6 + 8x^3y^3 + 64y^6$ এর ধারাবাহিক গুণফল নির্ণয় কর।

$$(x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2)(x^6 + 8x^3y^3 + 64y^6)$$
$$= (x - 2y)\{(x)^2 + x.2y + (2y)^2\}(x^6 + 8x^3y^3 + 64y^6)$$
$$= \{x^3 - (2y)^3\}(x^6 + 8x^3y^3 + 64y^6)$$
$$= (x^3 - 8y^3)\{(x^3)^2 + x^3.8y^3 + (8y^3)^2\}$$
$$= (x^3)^3 - (8y^3)^3 = x^9 - 512y^9.$$

উদা. 3. সরল কর :

$(a-b)(a^2+ab+b^2)+(b-c)(b^2+bc+c^2)+(c-a)(c^2+ca+a^2)$

প্রদত্ত রাশি $=(a^3-b^3)+(b^3-c^3)+(c^3-a^3)$

$=a^3-b^3+b^3-c^3+c^3-a^3$

$=0.$

উদা. 4. a^9-b^9 কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

$$\begin{aligned} a^9-b^9 &= (a^3)^3-(b^3)^3 \\ &= (a^3-b^3)\{(a^3)^2+a^3b^3+(b^3)^2\} \\ &= (a^3-b^3)(a^6+a^3b^3+b^6) \\ &= (a-b)(a^2+ab+b^2)(a^6+a^3b^3+b^6) \end{aligned}$$

প্রশ্নমালা 12

সূত্রের সাহায্যে গুণ কর :

1. x^4+x^2+1 কে x^2-1 দ্বারা
2. $16a^4+4a^2+1$ কে $4a^2-1$ দ্বারা
3. $4a^4+6a^2b^2+9b^4$ কে $2a^2-3b^2$ দ্বারা
4. $25x^2+15xy+9y^2$ কে $5x-3y$ দ্বারা
5. $9x^2y^2+12xyz+16z^2$ কে $3xy-4z$ দ্বারা
6. $100a^6+30a^3+9$ কে $10a^3-3$ দ্বারা

ধারাবাহিক গুণফল নির্ণয় কর :

7. $a-b$, a^2+ab+b^2 এবং $a^6+a^3b^3+b^6$
8. x^2-y^2, $x^4+x^2y^2+y^4$ এবং $x^{12}+x^6y^6+y^{12}$

সরল কর :

9. $(2x-3y)(4x^2+6xy+9y^2)+(3y-4z)(9y^2+12yz+16z^2)$ $+(4z-2x)(16z^2+8zx+4x^2)$
10. $(a-b)(a^2+ab+b^2)-(c-b)(c^2+bc+b^2)$ $-(a-c)(a^2+ac+c^2)$

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর (Resolve into factors) :

11. $8x^3-27$
12. $125x^3-64y^3$
13. $216-125a^3$
14. $a^3b^3-c^3$
15. $64a^6-1$
16. $1000-a^6b^6$

8. সূত্র ঃ

(i) $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

(ii) $(x-a)(x-b)=x^2-(a+b)x+ab$

(iii) $(x+a)(x-b)=x^2+(a-b)x-ab$

(iv) $(x-a)(x+b)=x^2-(a-b)x-ab$

সূত্রের প্রয়োগ।

উদা. 1. $x+3$ ও $x+4$ এর গুণফল নির্ণয় কর।

$$(x+3)(x+4)=x^2+(3+4)x+3\times4$$
$$=x^2+7x+12.$$

উদা. 2. $x+15$ ও $x-10$ এর গুণফল নির্ণয় কর।

$$(x+15)(x-10)=x^2+(15-10)x+15\times(-10)$$
$$=x^2+5x-150$$

দ্বিতীয় প্রণালী। $(x+15)(x-10)=x^2+(15-10)x-15\times10$
$$=x^2+5x-150$$

উদা. 3. $x-10$ ও $x+8$ এর গুণফল নির্ণয় কর।

$$(x-10)(x+8)=x^2+(-10+8)x+(-10\times8)$$
$$=x^2-2x-80$$

দ্বিতীয় প্রণালী। $(x-10)(x+8)=x^2-(10-8)x-10\times8$
$$=x^2-2x-80$$

উদা. 4. $x-7$ ও $x-5$ এর গুণফল নির্ণয় কর।

$$(x-7)(x-5)=x^2+(-7-5)x+(-7)\times(-5)$$
$$=x^3-12x+35$$

দ্বিতীয় প্রণালী। $(x-7)(x-5)=x^2-(7+5)x+7\times5$
$$=x^2-12x+35$$

উদা. 5. $5x-7$ ও $5x+3$ এর গুণফল নির্ণয় কর।

$$(5x-7)(5x+3)=(5x)^2+(-7+3)\times5x+(-7)\times3$$
$$=25x^2-20x-21$$

প্রশ্নমালা 13

গুণফল নির্ণয় কর :

1. $(x+1)(x+3)$
2. $(x+10)(x+7)$
3. $(x+7)(x+9)$
4. $(a-4)(a-3)$
5. $(a-8)(a-5)$
6. $(a+10)(a-1)$
7. $(a-12)(a+5)$
8. $(a+18)(a-25)$
9. $(a-11)(a+10)$
10. $(x^2+5)(x^2-7)$
11. $(a^3+9)(a^3-8)$
12. $(a^2b^2+1)(a^2b^2-7)$
13. $(3x+10)(3x+2)$
14. $(5x^2+16)(5x^2-20)$
15. $(5a^3-3)(5a^3-10)$
16. $(ax^2-13)(ax^2+10)$

পঞ্চম অধ্যায়

উৎপাদক নির্ণয় ও অভেদ

উৎপাদক নির্ণয়

1. উৎপাদক নির্ণয়। দ্বিপদ, ত্রিপদ বা বহুপদ রাশিমালার প্রত্যেক পদে একই সাধারণ উৎপাদক (common factor) থাকিলে প্রথমতঃ উক্ত উৎপাদকটি বাহির করিয়া লইয়া একটি বন্ধনী আরম্ভ করিতে হয়। এই বন্ধনীর মধ্যে রাশিমালার প্রত্যেক পদকে সাধারণ উৎপাদক দ্বারা ভাগ করিলে যে যে ভাগফল হয় সেই সেই ভাগফলগুলি এক একটি করিয়া স্ব স্ব চিহ্ন সহ লিখিয়া বন্ধনী শেষ করিতে হয়।

উদা. 1. $x(a+b+c)+y(a+b+c)+z(a+b+c)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

$x(a+b+c)+y(a+b+c)+z(a+b+c)$
$=(a+b+c)(x+y+z)$

বন্ধনীসহ সাধারণ উৎপাদক $(a+b+c)$ বাহির করিয়া লইয়া বন্ধনী আরম্ভ করা হইয়াছে এবং এই বন্ধনীর মধ্যে $x+y+z$ লিখিয়া বন্ধনী শেষ করা হইয়াছে।

উদা. 2. $(a-b)(a+b)+(a-b)(b+c)+(a-b)(c+a)$ এর গুণনীয়ক নির্ণয় কর।

$$\begin{aligned}&(a-b)(a+b)+(a-b)(b+c)+(a-b)(c+a)\\&=(a-b)\{(a+b)+(b+c)+(c+a)\}\\&=(a-b)(2a+2b+2c)\\&=(a-b).2(a+b+c)\\&=2(a-b)(a+b+c)\end{aligned}$$

বিশেষ দ্রষ্টব্য। কোন রাশিমালার উৎপাদক নির্ণয় করিতে হইলে সর্বপ্রথম লক্ষ্য করিতে হয় যে উহার পদগুলির মধ্যে কোন সাধারণ উৎপাদক আছে কিনা। সাধারণ উৎপাদক থাকিলে প্রথমেই অথবা যখনই পাওয়া যাইবে তখনই উহা বাহির করিয়া লইতে হয়।

প্রশ্নমালা 14

উৎপাদক নির্ণয় কর :

1. $a(x-y)+(b+c)(x-y)$
2. $(a+b)(x^2+y^2)-(c+d)(x^2+y^2)$
3. $a^2(x-y)+b^2(x-y)+(x-y)$
4. $(x+y)(b+c)+(x+y)(c+a)+(x+y)(a+b)$
5. x^3+x^2+x+1
6. $2x^3-2x^2-x+1$
7. $ax+bx+cx+ay+by+cy+az+bz+cz$
8. $3(x+y)^2+5(a+b)(x+y)$

---

2. সূত্রের সাহায্যে উৎপাদক নির্ণয়।

কয়েকটি বৈজিক সূত্র ও উহাদের প্রয়োগের বিষয় আলোচিত হইয়াছে। এস্থলে উহাদের সাহায্যে বৈজিক রাশিমালার উৎপাদক নির্ণয়ের প্রণালী উদাহরণ সাহায্যে প্রদর্শিত হইতেছে।

উদা. 1. $9x^4+24x^2y^2+16y^4$ এর উৎপাদক নির্ণয় কর।

$$\begin{aligned}&9x^4+24x^2y^2+16y^4\\&=(3x^2)^2+2.3x^2.4y^2+(4y^2)^2\\&=(3x^2+4y^2)^2\end{aligned}$$

উদা. 2. $(a+b)^4-4(a+b)^2c+4c^2$ এর উৎপাদক নির্ণয় কর।

$$(a+b)^4-4(a+b)^2c+4c^2$$
$$=\{(a+b)^2\}^2-2.(a+b)^2.2c+(2c)^2$$
$$=\{(a+b)^2-2c\}^2$$
$$=(a^2+2ab+b^2-2c)^2$$

উদা. 3. $196x^4-112x^2y^2+16y^4$ এর উৎপাদক নির্ণয় কর।

$$196x^4-112x^2y^2+16y^4$$
$$=4(49x^4-28x^2y^2+4y^4)$$
$$=4\{(7x^2)^2-2.7x^2.2y^2+(2y^2)^2)\}$$
$$=4(7x^2-2y^2)^2$$

প্রশ্নমালা 15

উৎপাদক নির্ণয় কর :

1. $4a^2+4a+1$
2. $x^2-30x+225$
3. $36a^4+120a^2+100$
4. $25a^2b^2-10abc+c^2$
5. $(a^2+b^2)^2+4ab(a^2+b^2)+4a^2b^2$
6. $4(a-b)^2-12(a-b)c+9c^2$
7. $(a-b)^2x^4-8(a^2-b^2)x^2y^2+16(a+b)^2y^4$ (M. U. 1906)

---

3. সূত্র : $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

$$a^2-b^2=a^2+ab-ab-b^2$$
$$=a(a+b)-b(a+b)$$
$$=(a+b)(a-b)$$

উদা. 1. $25x^2-81y^2$ এর উৎপাদক নির্ণয় কর।

$$25x^2-81y^2=(5x)^2-(9y)^2$$
$$=(5x+9y)(5x-9y)$$

উদা. 2. $48x^4-243y^4$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

$$48x^4-243y^4=3(16x^4-81y^4)$$
$$=3\{(4x^2)^2-(9y^2)^2\}$$
$$=3(4x^2-9y^2)(4x^2+9y^2)$$
$$=3\{(2x)^2-(3y)^2\}\ (4x^2+9y^2)$$
$$=3(2x-3y)\ (2x+3y)\ (4x^2+9y^2)$$

উদা. 3. $(x+y)^2-(y-z)^2$ এর উৎপাদক নির্ণয় কর।

$$\begin{aligned}&(x+y)^2-(y-z)^2\\&=\{(x+y)+(y-z)\}\{(x+y)-(y-z)\}\\&=(x+y+y-z)(x+y-y+z)\\&=(x+2y-z)(x+z)\end{aligned}$$

উদা. 4. $9(a+b)^2-16(c-d)^2$ এর উৎপাদক নির্ণয় কর।

$$\begin{aligned}&9(a+b)^2-16(c-d)^2\\&=\{3(a+b)\}^2-\{4(c-d)\}^2\\&=(3a+3b)^2-(4c-4d)^2\\&=\{(3a+3b)+(4c-4d)\}\{(3a+3b)-(4c-4d)\}\\&=(3a+3b+4c-4d)(3a+3b-4c+4d)\end{aligned}$$

প্রশ্নমালা 16

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

1. a^2-9b^2 **2.** $4x^2-25y^2$

3. $15a^4-135a^2b^2$ **4.** $2a^3-32ab^4$

5. $36x^2y^2-225z^2$ **6.** a^4-b^4

7. $81a^4-1$ **8.** $(a+b)^2-(c+d)^2$

9. $16-(p+q+r)^2$ **10.** $4(a+b)^2-25$

11. $(x+y)^2-9(y-z)^2$ **12.** $25(3a-2b)^2-36(a+3b)^2$

13. $a^2b^2(c-d)^2-a^2(c+d)^2$

14. $(a+b+c)^2-(a-b+c)^2$

15. $(2a-b-c)^2-(a+2b-c)^2$

16. $px^3(2q-r)^2-pxy^2(q-2r)^2$

4. দুই বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ করিয়া উৎপাদক নির্ণয়।

উদা. 1. $a^4+a^2b^2+b^4$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

$$\begin{aligned}a^4+a^2b^2+b^4&=a^4+2a^2b^2+b^4-a^2b^2\\&=(a^2+b^2)^2-(ab)^2\\&=(a^2+b^2+ab)(a^2+b^2-ab)\\&=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)\end{aligned}$$

$\boldsymbol{(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)=a^4+a^2b^2+b^4}$ ইহার প্রয়োজন এত বেশী যে ইহাকে সূত্ররূপে মুখস্থ রাখা উচিত।

প্রয়োজনমত যে কোন রাশির সহিত একই রাশি একবার যোগ ও একবার বিয়োগ করিলে মূল রাশির মানের কোন পরিবর্তন হয় না। কিন্তু এই যোগ ও বিয়োগে উৎপাদক বিশ্লেষণ কার্য সহজতর হয়।

উদা. 2. $4a^4+81$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

$$\begin{aligned}4a^4+81&=(2a^2)^2+(9)^2+2.2a^2.9-2.2a^2.9\\&=(2a^2+9)^2-(6a)^2\\&=(2a^2+9+6a)(2a^2+9-6a)\\&=(2a^2+6a+9)(2a^2-6a+9)\end{aligned}$$

উদা. 3. $20x^4y+5y^5$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

$$\begin{aligned}20x^4y+5y^5&=5y(4x^4+y^4)\\&=5y(4x^4+4x^2y^2+y^4-4x^2y^2)\\&=5y\{(2x^2+y^2)^2-(2xy)^2\}\\&=5y(2x^2+2xy+y^2)\ (2x^2-2xy+y^2)\end{aligned}$$

উদা. 4. $x^2-2y-1-y^2$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

$$\begin{aligned}x^2-2y-1-y^2&=x^2-(y^2+2y+1)\\&=(x)^2-(y+1)^2\\&=(x+y+1)\ (x-y-1)\end{aligned}$$

উদা. 5. $a^2 - b^2 - c^2 + d^2 - 2ad + 2bc$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

$$a^2 - b^2 - c^2 + d^2 - 2ad + 2bc$$
$$= (a^2 + d^2 - 2ad) - (b^2 + c^2 - 2bc)$$
$$= (a-d)^2 - (b-c)^2$$
$$= (a - d + b - c)(a - d - b + c) = (a + b - c - d)(a - b + c - d)$$

উদা. 6. $a^2 - 4ab - 12bc - 9c^2$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

$$a^2 - 4ab - 12bc - 9c^2$$
$$= a^2 - 4ab + 4b^2 - 4b^2 - 12bc - 9c^2 \quad [\,4b^2 \text{ যোগ ও বিয়োগ করিয়া}\,]$$
$$= (a^2 - 4ab + 4b^2) - (4b^2 + 12bc + 9c^2)$$
$$= (a - 2b)^2 - (2b + 3c)^2$$
$$= (a - 2b + 2b + 3c)(a - 2b - 2b - 3c) = (a + 3c)(a - 4b - 3c)$$

দ্বিতীয় প্রণালী। $a^2 - 4ab - 12bc - 9c^2$

$$= (a^2 - 9c^2) - (4ab + 12bc)$$
$$= (a + 3c)(a - 3c) - 4b(a + 3c)$$
$$= (a + 3c)(a - 3c - 4b)$$

উদা. 7. $9x^2 - 16y^2 + 6x - 40y - 24$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

$$9x^2 - 16y^2 + 6x - 40y - 24$$
$$= 9x^2 + 6x + 1 - 16y^2 - 40y - 25$$
$$= (9x^2 + 6x + 1) - (16y^2 + 40y + 25)$$
$$= (3x + 1)^2 - (4y + 5)^2$$
$$= (3x + 1 + 4y + 5)(3x + 1 - 4y - 5)$$
$$= (3x + 4y + 6)(3x - 4y - 4)$$

প্রশ্নমালা 17

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

1. $a^4 + a^2 + 1$
2. $a^4b^4 + a^2b^2c^2 + c^4$
3. $4x^4 + 1$
4. $a^4 + 64$
5. $a^4 + 3a^2b^2 + 4b^4$
6. $x^4 - 7x^2 + 1$
7. $a^8 + a^4 + 1$
8. $a^8 + a^4b^4 + b^8$
9. $9x^4 + 576$
10. $x^4 - 32x^2 + 4$
11. $1 - a^2 - 2ab - b^2$
12. $9x^2 - 6xy + y^2 - 4z^2$
13. $x^4 - 4x^2y^2 + 4y^4 - 1$
14. $a^2 + 2ab - 2bc - c^2$
15. $a^2 + b^2 - 2ab - c^2 - d^2 + 2cd$

16. $4x^2 - y^2 + 9z^2 - 12zx - 1 - 2y$

17. $4x^2 - 4xy - 3y^2 - 12yz - 9z^2$

18. $a^2 - 10a - b^2 - 4b + 21$

19. $(x^2 - 6y) - (4y^2 + 3x)$

20. $2x^4 - 22x^2y^2 + 2y^4$

21. $3x^4 + 6x^2 + 27$

22. $9a^4 - 28a^2 + 16$

23. $9a^4 + 47a^2 + 64$

24. $16x^4 + 71x^2 + 81$

25. $4x^4 + 3x^2y^2 + 9y^4$

26. $4x^2 - 4xy - 2yz - z^2$

27. $81x^8 - 7x^4y^4 + y^8$ (M. U. 1929)

28. $x^4 - 32x^2 + 4$ (Pat. U. 1934)

29. $x^4 - 7x^2 + 9 - 4y^2 + 4xy$

30. $a^2 - 4a + 3 - y^2 + 2y$

31. $a^2 - 6a + 8 - y^2 + 2y$

32. $(x^2 - y^2)(a^2 - b^2) + 4abxy$ (Pat. U. 1933)

33. $(x - y)^2 - (1 - xy)^2$ (D. B. 1943)

34. $4(xy - ab)^2 - (x^2 + y^2 - a^2 - b^2)^2$

---

5. সূত্র :

(i) $\boldsymbol{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b) = (a+b)^3}$

(ii) $\boldsymbol{a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b) = (a-b)^3}$

(i) $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$= a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3$

$= a^2(a + b) + 2ab(a + b) + b^2(a + b)$

$= (a + b)(a^2 + 2ab + b^2)$

$= (a + b)(a + b)^2$

$= (a + b)^3$

(ii) $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$= a^3 - a^2b - 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 - b^3$

$= a^2(a - b) - 2ab(a - b) + b^2(a - b)$

$= (a - b)(a^2 - 2ab + b^2)$

$= (a - b)(a - b)^2$

$= (a - b)^3$

উদা. 1. $27x^3+54x^2+36x+8$ এর উৎপাদক নির্ণয় কর।

প্রদত্ত রাশি $=(3x)^3+3.(3x)^2.2+3.3x.(2)^2+(2)^3$
$=(3x+2)^3$.

উদা. 2. $125x^6-225x^4y^2+135x^2y^4-27y^6$ এর উৎপাদক নির্ণয় কর।

প্রদত্ত রাশি $=(5x^2)^3-3.(5x^2)^2.3y^2+3.5x^2.(3y^2)^2-(3y^2)^3$.
$=(5x^2-3y^2)^3$.

উদা. 3. $8(2a+b)^3-60(2a+b)^2(a-b)+150(2a+b)(a-b)^2$
$-125(a-b)^3$ এর উৎপাদক নির্ণয় কর।

ধর $2a+b=x$ এবং $a-b=y$,

তাহা হইলে, প্রদত্ত রাশি $= 8x^3-60x^2y+150xy^2-125y^3$
$= (2x)^3-3.(2x)^2.5y+3.2x.(5y)^2-(5y)^3$
$= (2x-5y)^3$
$= \{2(2a+b)-5(a-b)\}^3$
$= (4a+2b-5a+5b)^3$
$= (7b-a)^3$.

প্রশ্নমালা 18

উৎপাদক নির্ণয় কর :

1. $27x^3+27x^2+9x+1$
2. $125x^3-150x^2+60x-8$
3. $8a^3+84a^2b+294ab^2+343b^3$
4. $1-24x+192x^2-512x^3$
5. $64x^3-144x^2+108x-27$
6. $216a^6+540a^4b^2-450a^2b^4+125b^6$
7. $8a^3b^3-12a^2b^2c+6abc^2-c^3$
8. $250a^4b+600a^3b^2-480a^2b^3+128ab^4$
9. $8(a+b)^3+27c^3+18(a+b)c(2a+2b+3c)$
10. $(a^2+1)^3-(7a-11)^3-3(a^2+1)(7a-11)(a^2-7a+12)$.

6. সূত্র ঃ (i) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

(ii) $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

(i) $a^3+b^3 = (a+b)^3-3ab(a+b)$
$= (a+b)\{(a+b)^2-3ab\}$
$= (a+b)(a^2+b^2+2ab-3ab)$
$= (a+b)(a^2-ab+b^2)$

অথবা, $a^3+b^3 = a^3+a^2b-a^2b-ab^2+ab^2+b^3$
$= a^2(a+b)-ab(a+b)+b^2(a+b)$
$= (a+b)(a^2-ab+b^2)$

(ii) $a^3-b^3 = (a-b)^3+3ab(a-b)$
$= (a-b)\{(a-b)^2+3ab\}$
$= (a-b)(a^2+b^2-2ab+3ab)$
$= (a-b)(a^2+ab+b^2)$

অথবা, $a^3-b^3 = a^3-a^2b+a^2b-ab^2+ab^2-b^3$
$= a^2(a-b)+ab(a-b)+b^2(a-b)$
$= (a-b)(a^2+ab+b^2)$

উদা. 1. $8x^3+27y^3$ এর উৎপাদক নির্ণয় কর।

$8x^3+27y^3 = (2x)^3+(3y)^3$
$= (2x+3y)\{(2x)^2-2x.3y+(3y)^2\}$
$= (2x+3y)(4x^2-6xy+9y^2)$

উদা. 2. $54x^4y-250xy^7$ এর উৎপাদক নির্ণয় কর।

$54x^4y-250xy^7 = 2xy(27x^3-125y^6)$
$= 2xy\{(3x)^3-(5y^2)^3\}$
$= 2xy(3x-5y^2)\{(3x)^2+3x.5y^2+(5y^2)^2\}$
$= 2xy(3x-5y^2)(9x^2+15xy^2+25y^4)$

উদা. 3. a^6-b^6 এর উৎপাদক নির্ণয় কর।

$a^6-b^6 = (a^3)^2-(b^3)^2$
$= (a^3+b^3)(a^3-b^3)$
$= (a+b)(a^2-ab+b^2)(a-b)(a^2+ab+b^2)$

উদা. 4. $(x^2+4y^2)^3+64x^3y^3$ এর উৎপাদক নির্ণয় কর।

$(x^2+4y^2)^3+64x^3y^3$
$=(x^2+4y^2)^3+(4xy)^3$
$=\{(x^2+4y^2)+4xy\}\{(x^2+4y^2)^2-(x^2+4y^2).4xy+(4xy)^2\}$
$=(x^2+4y^2+4xy)(x^4+8x^2y^2+16y^4-4x^3y-16xy^3+16x^2y^2)$
$=(x+2y)^2(x^4-4x^3y+24x^2y^2-16xy^3+16y^4)$

প্রশ্নমালা 19

উৎপাদক নির্ণয় কর :

1. $27x^3+1$
2. $8x^3+125y^3$
3. $64x^3-1$
4. $3a^4-24ab^3$
5. x^9+y^9
6. $27x^6-64y^6$
7. x^6-729
8. $729x^3-8y^6$
9. $343x^3+8$
10. $x^{12}-y^{12}$
11. $125x^5y^2-27x^2y^5$
12. $(a-b)^3+(b-c)^3$
13. $8x^3-(y+z)^3$
14. $8(x-y)^3-27(y-z)^3$
15. $(a+b)(x-y)^3+(a+b)(y-z)^3$
16. $(4a^2+1)^3-64a^3$
17. $8(a-b)^4-a+b$

---

7. x^2+px+q আকারের রাশিমালার উৎপাদক নির্ণয়।

প্রথম প্রণালী : ধর x^2+px+q-এর উৎপাদক $x+a$ এবং $x+b$; তাহা হইলে উৎপাদক ছুইটির গুণফল হইবে x^2+px+q এর সমান।

অর্থাৎ $x^2+px+q=(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab.$

তাহা হইলে $p=a+b$ এবং $q=ab$

দেখা যাইতেছে x^2+px+q-এর উৎপাদক হইবে $(x+a)(x+b)$, যখন $p=a+b$ এবং $q=ab$. অর্থাৎ x^2+px+q-এর উৎপাদক নির্ণয় করিতে হইলে q-এর এমন ছুইটি উৎপাদক স্থির করিতে হইবে যাহার বৈজিক সমষ্টি p.

উদা. 1. $x^2+8x+12$ এর উৎপাদক নির্ণয় কর।

এস্থলে 12-এর এমন ছুইটি উৎপাদক স্থির করিতে হইবে যাহাদের সমষ্টি 8 ; অর্থাৎ এমন ছুইটি সংখ্যা স্থির করিতে হইবে যাহাদের সমষ্টি 8 এবং গুণফল 12.

12-এর তিনটি উৎপাদক হইতে পারে 1, 12 ; 2, 6 ; 3, 4. ইহাদের মধ্যে শুধু 2 ও 6-এর সমষ্টি 8. সুতরাং $x^2+8x+12$-এর নির্ণেয় উৎপাদক হইল $x+2$ এবং $x+6$.

কার্যতঃ প্রয়োজনীয় সংখ্যা ছুইটি (এস্থলে 2, 6) মনে মনে স্থির করিয়া নিম্নলিখিত পদ্ধতি অবলম্বন করিতে হয়—

$x^2+8x+12=x^2+2x+6x+12$ [এমন ছুইটি সংখ্যা স্থির করা হইয়াছে যাহাদের সমষ্টি 8 এবং গুণফল 12]

$=x(x+2)+6(x+2)$

$=(x+2)(x+6)$

দ্বিতীয় প্রণালী : x^2+px+q কে দুইটি বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ করিয়া উৎপাদক নির্ণয় করা যায়।

$$x^2+px+q$$

$$=x^2+px+\left(\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{2}\right)^2+q$$

[x এর সহগের অর্ধের বর্গ যোগ ও বিয়োগ করিয়া]

$$=\left\{x^2+2.x.\frac{p}{2}+\left(\frac{p}{2}\right)^2\right\}-\frac{p^2}{4}+q$$

$$=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p^2-4q}{4}\right)=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}\right)^2$$

$$=\left\{x+\frac{p}{2}+\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}\right\}\left\{x+\frac{p}{2}-\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}\right\}$$

উদা. 1. (a) $x^2+8x+12$ এর উৎপাদক নির্ণয় কর।

$$x^2+8x+12=x^2+8x+(\tfrac{8}{2})^2-(\tfrac{8}{2})^2+12$$
$$=x^2+8x+(4)^2-16+12$$
$$=(x+4)^2-(2)^2=(x+4+2)(x+4-2)=(x+6)(x+2)$$

[x এর সহগ 8 এর অর্ধের বর্গ যোগ ও বিয়োগ করিয়া]

উদা. 2. $x^2-7x+12$ এর উৎপাদক নির্ণয় কর।

প্রথম প্রণালী : $x^2-7x+12$

$$=x^2-3x-4x+12$$
$$=x(x-3)-4(x-3)$$
$$=(x-3)(x-4)$$

[এমন দুইটি সংখ্যা স্থির করা হইয়াছে যাহাদের বৈজিক সমষ্টি -7 এবং গুণফল 12]

দ্বিতীয় প্রণালী :

$$x^2-7x+12=x^2-7x+(-\tfrac{7}{2})^2-(-\tfrac{7}{2})^2+12$$
$$=x^2+2.x.(-\tfrac{7}{2})+(-\tfrac{7}{2})^2-(-\tfrac{7}{2})^2+12$$
$$=(x-\tfrac{7}{2})^2-\tfrac{49}{4}+12$$
$$=(x-\tfrac{7}{2})^2-\tfrac{1}{4}=(x-\tfrac{7}{2})^2-(\tfrac{1}{2})^2$$
$$=(x-\tfrac{7}{2}+\tfrac{1}{2})(x-\tfrac{7}{2}-\tfrac{1}{2})=(x-3)(x-4).$$

[xএর সহগ -7 এর অর্ধের বর্গ যোগ ও বিয়োগ করিয়া]

উদা. 3. x^2+5x-6 এর উৎপাদক নির্ণয় কর।

প্রথম প্রণালী : x^2+5x-6

$$=x^2+6x-x-6$$
$$=x(x+6)-1(x+6)$$
$$=(x+6)(x-1)$$

[এমন দুইটি সংখ্যা স্থির করা হইয়াছে যাহাদের বৈজিক সমষ্টি 5 এবং গুণফল -6]

দ্বিতীয় প্রণালী : x^2+5x-6

$$=x^2+5x+(\tfrac{5}{2})^2-(\tfrac{5}{2})^2-6$$
$$=(x+\tfrac{5}{2})^2-\tfrac{49}{4}=(x+\tfrac{5}{2})^2-(\tfrac{7}{2})^2$$
$$=(x+\tfrac{5}{2}+\tfrac{7}{2})(x+\tfrac{5}{2}-\tfrac{7}{2})=(x+6)(x-1).$$

উদা. 4. $x^2-10xy-264y^2$ এর উৎপাদক নির্ণয় কর।

প্রথম প্রণালী : $x^2-10xy-264y^2$

$$=x^2-22xy+12xy-264y^2$$
$$=x(x-22y)+12y(x-22y)=(x-22y)(x+12y).$$

$[\,264=2\times2\times2\times3\times11\;;\;-(11\times2)+(2\times2\times3)=-10\,]$

দ্বিতীয় প্রণালী : $x^2-10xy-264y^2$

$$=x^2-10xy+(5y)^2-(5y)^2-264y^2$$
$$=(x-5y)^2-25y^2-264y^2=(x-5y)^2-(17y)^2$$
$$=(x-5y+17y)(x-5y-17y)=(x+12y)(x-22y).$$

উদা. 5. $x^4-14x^2y^2-95y^4$ এর উৎপাদক নির্ণয় কর।

$$x^4-14x^2y^2-95y^4$$
$$=x^4-19x^2y^2+5x^2y^2-95y^4 \quad [-95=-19\times5\;;\;-19+5=-14]$$
$$=x^2(x^2-19y^2)+5y^2(x^2-19y^2)$$
$$=(x^2-19y^2)(x^2+5y^2).$$

উদা. 6. $3x^3-57x^2-360x$ এর উৎপাদক নির্ণয় কর।

$$3x^3-57x^2-360x$$
$$=3x(x^2-19x-120)$$
$$=3x(x^2-24x+5x-120) \quad [-120=(-24)\times5\;;\;-24+5=-19]$$
$$=3x\{x(x-24)+5(x-24)\}$$
$$=3x(x-24)(x+5).$$

উদা. 7. $2x^5-68x^3y^2+450xy^4$ এর উৎপাদক নির্ণয় কর।

$$2x^5-68x^3y^2+450xy^4=2x(x^4-34x^2y^2+225y^4)$$
$$=2x(x^4-9x^2y^2-25x^2y^2+225y^4)$$
$$=2x\{x^2(x^2-9y^2)-25y^2(x^2-9y^2)\}$$
$$=2x(x^2-9y^2)(x^2-25y^2)=2x\{(x)^2-(3y)^2\}\{(x)^2-(5y)^2\}$$
$$=2x(x+3y)(x-3y)(x+5y)(x-5y).$$

উদা. 8. $(x^2+3x)^2-16(x^2+3x)-36$ এর উৎপাদক নির্ণয় কর।

ধর $x^2+3x=a$; তাহা হইলে,

প্রদত্ত রাশি $=a^2-16a-36=a^2+2a-18a-36$

$=a(a+2)-18(a+2)=(a+2)(a-18)$

$=(x^2+3x+2)(x^2+3x-18)$ [a-এর পরিবর্তে x^2+3x ধরিয়া]

$=(x^2+x+2x+2)(x^2+6x-3x-18)$

$=\{x(x+1)+2(x+1)\}\{x(x+6)-3(x+6)\}$

$=(x+1)(x+2)(x-3)(x+6)$.

প্রশ্নমালা 20

উৎপাদক নির্ণয় কর :

1. x^2+3x+2 2. x^2-3x+2 3. x^2+x-2
4. x^2-x-2 5. x^2+5x+6 6. x^2-5x+6
7. x^2+7x+6 8. x^2-7x+6 9. x^2+x-6
10. x^2-x-6 11. x^2+5x-6 12. x^2-5x-6
13. $x^2+14x+24$ 14. $x^2-14x+24$ 15. $x^2+10x-24$
16. $x^2-10x-24$ 17. $x^2+10x+24$ 18. $x^2-10x+24$
19. $x^2+2x-24$ 20. $x^2-2x-24$ 21. $x^2+25x+24$
22. $x^2-25x+24$ 23. $x^2+23x-24$ 24. $x^2-23x-24$
25. $x^2-22x+96$ 26. $x^2-3x-108$ 27. $x^2-14x-480$
28. $x^2-x-110$ 29. $x^2-38x-600$ 30. $x^2-6x-216$
31. $3x^2+42x-153$ 32. x^3-3x^2-180x
33. $8x^3-184x^2+816x$ 34. $a^2x^2-7abx-78b^2$
35. $a^3x^2+38a^2x-80a$ 36. $a^2+77a+1020$
37. $a^2+11a-570$ 38. a^4+20a^2-44
39. x^4+39x^2-40 40. x^5-10x^3-39x

দুই বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ করিয়া উৎপাদক নির্ণয় কর :

41. $x^2-14x+48$ 42. $x^2-17x+72$
43. $x^2-x-132$ 44. $x^2+11x-126$
45. a^4-31a^2+234 46. a^4+a^2-2550
47. $x^2y^2-6xyz-72z^2$

উৎপাদক নির্ণয় কর :

48. $(a+b)^2-17(a+b)+72$

49. $(x^2+y^2)^2-2(x^2+y^2)-63$

50. $(x^2+5x)^2-3(x^2+5x)-28$

51. $(x^2+y^2)^2-9xy(x^2+y^2)+14x^2y^2$

52. $(x^2-3x)^2-38(x^2-3x)-80$

53. $(x^2-4x)(x^2-4x-1)-20$

---

8. px^2+qx+r আকারের রাশিমালার উৎপাদক নির্ণয়।

প্রথম প্রণালী :

ধর px^2+qx+r এর উৎপাদক $ax+b$ এবং $cx+d$;

তাহা হইলে এই উৎপাদক দুইটির গুণফল হইবে px^2+qx+r এর সমান।

অর্থাৎ $px^2+qx+r=(ax+b)(cx+d)$

$$=acx^2+bcx+adx+bd$$

$$=acx^2+(bc+ad)x+bd$$

তাহা হইলে $p=ac,\quad q=bc+ad,\quad r=bd$

যেহেতু $p=ac,$ এবং $r=bd \quad \therefore \quad p\times r=(ac)\times(bd)=(bc)\times(ad)$

দেখা যাইতেছে px^2+qx+r এর উৎপাদক হইবে $(ax+b)(cx+d)$.

যখন $pr=(bc)\times(ad)$ এবং $q=bc+ad$, অর্থাৎ px^2+qx+r এর উৎপাদক নির্ণয় করিতে হইলে pr-এর এমন দুইটি উৎপাদক স্থির করিতে হইবে যাহাদের বৈজিক সমষ্টি হইবে q.

উদা. 1. $12x^2+35x+18$-এর উৎপাদক নির্ণয় কর।

$12x^2+35x+18$

$=12x^2+8x+27x+18$ $[\,12\times18=(2\times2\times3)(2\times3\times3)\,;$

$=4x(3x+2)+9(3x+2)$ $(2\times2\times2)+(3\times3\times3)=35\,]$

$=(3x+2)(4x+9).$

দ্বিতীয় প্রণালী :

$$px^2+qx+r=p\left(x^2+\frac{q}{p}x+\frac{r}{p}\right).$$

$$=p\left\{x^2+\frac{q}{p}x+\left(\frac{q}{2p}\right)^2-\left(\frac{q}{2p}\right)^2+\frac{r}{p}\right\}$$

$$=p\left\{\left(x+\frac{q}{2p}\right)^2-\left(\frac{q^2}{4p^2}-\frac{r}{p}\right)\right\}$$

$$=p\left\{\left(x+\frac{q}{2p}\right)^2-\frac{q^2-4pr}{4p^2}\right\}$$

$$=p\left\{\left(x+\frac{q}{2p}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{q^2-4pr}}{2p}\right)^2\right\}$$

$$=p\left\{x+\frac{q}{2p}+\frac{\sqrt{q^2-4pr}}{2p}\right\}\left\{x+\frac{q}{2p}-\frac{\sqrt{q^2-4pr}}{2p}\right\}$$

উদা. 1(a). $12x^2+35x+18$ এর উৎপাদক নির্ণয় কর।

$$12x^2+35x+18=12(x^2+\tfrac{35}{12}x+\tfrac{3}{2})$$
$$=12\{x^2+\tfrac{35}{12}x+(\tfrac{35}{24})^2-(\tfrac{35}{24})^2+\tfrac{3}{2}\}$$

[x-এর সহগ $\frac{35}{12}$-এর অর্ধেক $\frac{35}{24}$-এর বর্গ যোগ এবং বিয়োগ করিয়া]

$$=12\{(x+\tfrac{35}{24})^2-(\tfrac{1225}{576}-\tfrac{3}{2})\}=12\{(x+\tfrac{35}{24})^2-\tfrac{361}{576}\}$$
$$=12\{(x+\tfrac{35}{24})^2-(\tfrac{19}{24})^2\}=12(x+\tfrac{35}{24}+\tfrac{19}{24})(x+\tfrac{35}{24}-\tfrac{19}{24})$$
$$=12(x+\tfrac{9}{4})(x+\tfrac{2}{3})=4.(x+\tfrac{9}{4}).3(x+\tfrac{2}{3})=(4x+9)(3x+2).$$

উদা. 2. $6x^2+13x-8$ এর উৎপাদক নির্ণয় কর।

প্রথম প্রণালী : $6x^2+13x-8$

$$=6x^2+16x-3x-8 \quad [6\times(-8)=-48=16\times(-3)\,;$$
$$=2x(3x+8)-1(3x+8) \qquad 16-3=13]$$
$$=(3x+8)(2x-1).$$

দ্বিতীয় প্রণালী : $6x^2+13x-8=6(x^2+\frac{13}{6}x-\frac{4}{3})$

$$=6\{x^2+\tfrac{13}{6}x+(\tfrac{13}{12})^2-(\tfrac{13}{12})^2-\tfrac{4}{3}\}$$
$$=6\{(x+\tfrac{13}{12})^2-(\tfrac{169}{144}+\tfrac{4}{3})\}$$
$$=6\{(x+\tfrac{13}{12})^2-(\tfrac{19}{12})^2\}$$
$$=6\{(x+\tfrac{13}{12}+\tfrac{19}{12})(x+\tfrac{13}{12}-\tfrac{19}{12})$$
$$=6(x+\tfrac{8}{3})(x-\tfrac{1}{2})$$
$$=3(x+\tfrac{8}{3}).2(x-\tfrac{1}{2})=(3x+8)(2x-1).$$

উদা. 3. $8x^4+10x^2y^2-3y^4$ এর উৎপাদক নির্ণয় কর।

$$8x^4+10x^2y^2-3y^4$$
$$=8x^4-2x^2y^2+12x^2y^2-3y^4 \quad [8\times(-3)=-24=(-2)\times 12;\ -2+12=10]$$
$$=2x^2(4x^2-y^2)+3y^2(4x^2-y^2)$$
$$=(4x^2-y^2)(2x^2+3y^2)$$
$$=\{(2x)^2-(y)^2\}(2x^2+3y^2)$$
$$=(2x-y)(2x+y)(2x^2+3y^2).$$

উদা. 4. $3(x+y)^2-2(x+y)-16$ এর উৎপাদক নির্ণয় কর।

ধর $x+y=a$; তাহা হইলে,

প্রদত্ত রাশিমালা $=3a^2-2a-16=3a^2-8a+6a-16$
$$=a(3a-8)+2(3a-8)=(a+2)(3a-8)$$
$$=(x+y+2)\{3(x+y)-8\} \quad [\,a\text{-এর পরিবর্তে } x+y \text{ বসাইয়া}\,]$$
$$=(x+y+2)(3x+3y-8)$$

উদা. 5. $10(a+b)^2+13(a+b)(c+d)-3(c+d)^2$ এর উৎপাদক নির্ণয় কর।

ধর $a+b=x$ এবং $c+d=y$; তাহা হইলে,

প্রদত্ত রাশি $=10x^2+13xy-3y^2$
$$=10x^2+15xy-2xy-3y^2$$
$$=5x(2x+3y)-y(2x+3y)$$
$$=(2x+3y)(5x-y)$$
$$=\{2(a+b)+3(c+d)\}\{5(a+b)-(c+d)\} \quad [\,x \text{ ও } y\text{-এর মান বসাইয়া}\,]$$
$$=(2a+2b+3c+3d)(5a+5b-c-d)$$

প্রশ্নমালা 21

উৎপাদক নির্ণয় কর :

1. $2x^2+3x+1$ **2.** $2x^2-3x+1$ **3.** $2x^2+x-1$
4. $2x^2-x-1$ **5.** $2x^2+5x+3$ **6.** $2x^2-5x+3$
7. $2x^2+x-3$ **8.** $2x^2-x-3$ **9.** $3x^2+5x+2$
10. $3x^2-5x+2$ **11.** $3x^2+x-2$ **12.** $3x^2-x-2$
13. $3x^2+7x+2$ **14.** $3x^2-7x+2$ **15.** $6x^2+7x+1$
16. $6x^2-7x+1$ **17.** $6x^2+5x-1$ **18.** $6x^2-5x-1$
19. $3x^2+10x+8$ **20.** $3x^2-10x+8$ **21.** $8x^2+10x-3$
22. $3x^2-10x-8$ **23.** $5x^2+12x-9$ **24.** $15x^2-19x-8$

25. $15x^2-32x+16$
26. $14a^2b^2-47abc-7c^2$
27. $3x^2-28x+32$
28. $30x^2-x-20$
29. $25a^2-85a+16$
30. $16a^4-22a^2-15$
31. $5x^2-42xy+81y^2$
32. $10x^2-19xy-15y^2$
33. $18m^2-87mn-15n^2$
34. $6a^4-15a^2b^2-75b^4$
35. $3a^5-19a^3b-40ab^2$
36. $36x^4-181x^2+225$
37. $28x^4+13x^2-5$
38. $9x^4-32x^2y^2-16y^4$
39. $12x^4+17x^2-5$
40. $16x^4y^4-71x^2y^2-45$
41. $8a^4+2a^2-45$
42. $5x^2y^2-2xyz-16z^2$
43. $6x^2-23xy+20y^2$
44. $15x^4+11x^2-12$
45. $35x^2-x-12$
46. $12x^2+65x+77$
47. $18x^3-27x^2-35x$

দুই বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ করিয়া উৎপাদক নির্ণয় কর :

48. $4x^2+15x+9$
49. $5x^2-7x-24$
50. $9x^2+18x-40$
51. $3x^2-2x-385$
52. $6x^2-25x-9$
53. $2a^4-5a^2-25$
54. $4x^4-35x^2+24$

উৎপাদক নির্ণয় কর :

55. $3(a-b)^2-20(a-b)-7$
56. $2(a+b)^2-7(a+b)(b-c)-15(b-c)^2$
57. $8(a+b)^2-10(a^2-b^2)-7(a-b)^2$

অভেদ

9. **অভেদ (Identity)**। সমীকরণ ও অভেদ কাহাকে বলে এবং উহাদের পার্থক্য কি তাহা পূর্বে আলোচিত হইয়াছে। স্মরণ রাখিবে বৈজিক সূত্রগুলি প্রত্যেকেই অভেদ।

অভেদ দুই প্রকার—**নিরপেক্ষ অভেদ** (Unconditional Identity) এবং **সাপেক্ষ অভেদ** (Conditional Identity। দুইটি রাশিতে ব্যবহৃত অক্ষর বা অক্ষরসমূহের যে কোন মানের জন্য যদি অভেদের উভয় রাশির সমতা অব্যাহত থাকে তবে ঐ প্রকার অভেদকে নিরপেক্ষ অভেদ বলে। কোন কোন অভেদের উভয় পক্ষের সমতা এক বা একাধিক শর্তের উপর নির্ভর করে ; এই প্রকার অভেদকে সাপেক্ষ অভেদ বলে।

নিরপেক্ষ অভেদ '≡' চিহ্ন দিয়া সূচিত করিবার রীতি আছে।

10. নিরপেক্ষ অভেদ (Unconditional Identity)।

নিরপেক্ষ অভেদ বিষয়ক অঙ্কের সমাধানের নির্দিষ্ট কোন নিয়ম নাই। সাধারণতঃ বাম পক্ষের রাশিটিকে সরল করিয়া দক্ষিণ পক্ষের রাশিটির সমান দেখাইতে হয়। স্থলবিশেষে দক্ষিণ পক্ষের রাশিটিকে সরল করিয়া বাম পক্ষের রাশিটির সমান দেখাইতে হয়। উভয় পক্ষের রাশি দুইটিকে সরল করিয়া একই আকারে পরিণত করিলেও উভয় পক্ষের সমতা প্রতিপন্ন হয়।

উদা. 1. প্রমাণ কর যে, $a^2-b^2-c^2-2bc-a-b-c$
$=(a+b+c)(a-b-c-1)$

বাম পক্ষ $=a^2-(b^2+c^2+2bc)-(a+b+c)$
$=(a)^2-(b+c)^2-(a+b+c)$
$=(a+b+c)(a-b-c)-1(a+b+c)$
$=(a+b+c)(a-b-c-1)=$ দক্ষিণ পক্ষ।

উদা. 2. প্রমাণ কর যে, $a^2-(a+b)(a+c)=b^2-(b+c)(b+a)$
$=c^2-(c+a)(c+b)$

$a^2-(a+b)(a+c)=a^2-(a^2+ca+ab+bc)$
$=a^2-a^2-ca-ab-bc$
$=-(ab+bc+ca)$

$b^2-(b+c)(b+a)=b^2-(b^2+ab+bc+ca)$
$=b^2-b^2-ab-bc-ca$
$=-(ab+bc+ca)$

$c^2-(c+a)(c+b)=c^2-(c^2+bc+ca+ab)$
$=c^2-c^2-bc-ca-ab$
$=-(ab+bc+ca)$

$\therefore\ a^2-(a+b)(a+c)=b^2-(b+c)(b+a)=c^2-(c+a)(c+b).$

উদা. 3. প্রমাণ কর যে,

$(5a-3b)^3+(3a-5b)^3+24(a-b)(5a-3b)(3a-5b)=512(a-b)^3$

ধর, $x=5a-3b$

এবং $y=3a-5b$

$\therefore\ x+y=8a-8b=8(a-b)\quad \therefore\ 3(x+y)=24(a-b),$

$\therefore$ বাম পক্ষ $=x^3+y^3+3(x+y)xy=(x+y)^3$
$=\{8(a-b)\}^3=512(a-b)^3=$ দক্ষিণ পক্ষ।

উদা. 4. প্রমাণ কর যে, $a(a+2b)^3-b(b+2a)^3=(a+b)(a-b)^3$

বাম পক্ষ $= a\{(a+b)+b\}^3-b\{(a+b)+a\}^3$

$= a\{(a+b)^3+b^3+3(a+b)b(a+b+b)\}$

$\quad -b\{(a+b)^3+a^3+3(a+b)a(a+b+a)\}$

$= a(a+b)^3+ab^3+3ab(a+b)(a+2b)$

$\quad -b(a+b)^3-a^3b-3ab(a+b)(2a+b)$

$=(a-b)(a+b)^3-ab(a^2-b^2)+3ab(a+b)(a+2b-2a-b)$

$=(a-b)(a+b)^3-ab(a+b)(a-b)+3ab(a+b)(b-a)$

$=(a-b)(a+b)^3-ab(a+b)(a-b)-3ab(a+b)(a-b)$

$=(a-b)(a+b)\{(a+b)^2-ab-3ab\}$

$=(a-b)(a+b)\{(a+b)^2-4ab\}$

$=(a-b)(a+b)(a-b)^2$

$=(a+b)(a-b)^3$

= দক্ষিণ পক্ষ।

উদা. 5. প্রমাণ কর যে,

$\{(ax+by)^2+(ay-bx)^2\}\{(ax+by)^2-(ay+bx)^2\}=(a^4-b^4)(x^4-y^4)$

বাম পক্ষ $=\{a^2x^2+b^2y^2+2abxy+a^2y^2+b^2x^2-2abxy\}$

$\{a^2x^2+b^2y^2+2abxy-a^2y^2-b^2x^2-2abxy\}$

$=\{a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2\}\{a^2x^2-a^2y^2-b^2x^2+b^2y^2\}$

$=\{a^2(x^2+y^2)+b^2(x^2+y^2)\}\{a^2(x^2-y^2)-b^2(x^2-y^2)\}$

$=(x^2+y^2)(a^2+b^2)(x^2-y^2)(a^2-b^2)$

$=(a^4-b^4)(x^4-y^4)$

= দক্ষিণ পক্ষ।

উদা. 6. প্রমাণ কর যে,

$$(ac-bd)^2-(bc-ad)^2=(a+b)(c+d)(a-b)(c-d)$$

বাম পক্ষ $=\{(ac-bd)+(bc-ad)\}\{(ac-bd)-(bc-ad)\}$

$=(ac+bc-ad-bd)(ac-bc+ad-bd)$

$=\{c(a+b)-d(a+b)\}\{c(a-b)+d(a-b)\}$

$=(a+b)(c-d)(a-b)(c+d)=$ দক্ষিণ পক্ষ।

উদা. 7. প্রমাণ কর যে, $(3x^2-2)^3+(8x-1)^3+3(3x^2-2)(8x-1)(3x^2+8x-3)=(x+3)^3(3x-1)^3$

ধর $3x^2-2=a$ এবং $8x-1=b$;

তাহা হইলে $a+b=3x^2-2+8x-1=3x^2+8x-3.$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশিমালা $=a^3+b^3+3ab(a+b)$

$$=(a+b)^3$$
$$=(3x^2+8x-3)^3$$
$$=(3x^2+9x-x-3)^3$$
$$=\{3x(x+3)-1(x+3)\}^3$$
$$=\{(x+3)(3x-1)\}^3$$
$$=(x+3)^3(3x-1)^3$$

11. বৈজিক রাশিকে দুইটি বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ।

সূত্র ঃ (i) $4ab=(a+b)^2-(a-b)^2$

(ii) $ab=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$

পূর্ব প্রতিষ্ঠিত সূত্র হইতে, $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

এবং $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

বিয়োগ করিয়া, $4ab=(a+b)^2-(a-b)^2$ ......(i)

উভয় পক্ষকে 4 দ্বারা ভাগ করিয়া, $ab=\frac{(a+b)^2}{4}-\frac{(a-b)^2}{4}$

$$=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \quad ......(ii)$$

উদা. 1. $4(2x+y)(x-3y)$ কে দুই বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ কর।

$2x+y$ এর পরিবর্তে a এবং $x-3y$ এর পরিবর্তে b ধর।

তাহা হইলে, প্রদত্ত রাশি $=4ab$

$$=(a+b)^2-(a-b)^2$$
$$=\{(2x+y)+(x-3y)\}^2-\{(2x+y)-(x-3y)\}^2$$
$$=(3x-2y)^2-(x+4y)^2.$$

উদা. 2. $(3a+5b)(a-b)$ কে দুই বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ কর।

$3a+5b$ এর পরিবর্তে x এবং $a-b$ এর পরিবর্তে y ধর।

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= xy$

$$= \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2$$

$$= \left\{\frac{(3a+5b)+(a-b)}{2}\right\}^2 - \left\{\frac{(3a+5b)-(a-b)}{2}\right\}^2$$

$$= \left(\frac{4a+4b}{2}\right)^2 - \left(\frac{2a+6b}{2}\right)^2$$

$$= (2a+2b)^2 - (a+3b)^2.$$

সূত্রের সাহায্য ব্যতীতও বৈজিক রাশিকে দুই বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ করা যায়।

উদা. 3. $x^2+2xy-2yz-z^2$ কে দুই বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ কর।

$x^2+2xy-2yz-z^2$

$= x^2+2xy+y^2-y^2-2yz-z^2$ [y^2 যোগ ও বিয়োগ করিয়া]

$= (x+y)^2-(y^2+2yz+z^2)$

$= (x+y)^2-(y+z)^2.$

উদা. 4. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$ কে দুই বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ কর।

প্রথম প্রণালী।

প্রদত্ত রাশি $= (x+1)(x+4)(x+2)(x+3)$ [এইরূপে সাজান হইয়াছে যে দুই দুইটি উৎপাদকের গুণফলে x^2 এবং x-এর সহগ সমান হয়]

$= (x^2+5x+4)(x^2+5x+6)$

$= (a+4)(a+6)$ [x^2+5x এর পরিবর্তে a লিখিয়া]

$= a^2+10a+24$

$= a^2+10a+25-1$

$= (a+5)^2-(1)^2$

$= (x^2+5x+5)^2-(1)^2$ [a-র পরিবর্তে x^2+5x লিখিয়া]

দ্বিতীয় প্রণালী।

প্রদত্ত রাশি $=(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$

$$=(x^2+3x+2)(x^2+7x+12)$$

$$=ab \quad [\, a=x^2+3x+2 \text{ এবং } b=x^2+7x+12 \text{ ধরিয়া} \,]$$

$$=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

$$=\left\{\frac{(x^2+3x+2)+(x^2+7x+12)}{2}\right\}^2 - \left\{\frac{(x^2+3x+2)-(x^2+7x+12)}{2}\right\}^2$$

$$=\left(\frac{2x^2+10x+14}{2}\right)^2-\left(\frac{-4x-10}{2}\right)^2$$

$$=(x^2+5x+7)^2-(-2x-5)^2$$

$$=(x^2+5x+7)^2-(2x+5)^2.$$

দ্রষ্টব্য। দুই প্রণালীতে উত্তর বিভিন্ন আকারের হইয়াছে বটে, কিন্তু উহাদের মান অভিন্ন।

12. বৈজিক রাশির দুইটি বর্গের সমষ্টিরূপে প্রকাশ।

সূত্র ঃ $\boldsymbol{2(a^2+b^2)=(a+b)^2+(a-b)^2}$.

পূর্ব প্রতিষ্ঠিত স্থত্র হইতে, $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

এবং $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

$\therefore$ যোগ করিয়া, $2(a^2+b^2)=(a+b)^2+(a-b)^2$

উদা. 1. $2\{(3a+b)^2+(a+2b)^2\}$ কে দুই বর্গের সমষ্টিরূপে প্রকাশ কর।

ধর, $x=3a+b$ এবং $y=a+2b$;

তাহা হইলে, প্রদত্ত রাশি $=2(x^2+y^2)=(x+y)^2+(x-y)^2$

$$=(3a+b+a+2b)^2+(3a+b-a-2b)^2$$

$$=(4a+3b)^2+(2a-b)^2$$

13. $(a^2+b^2+4ab)^2-(a^2+b^2)^2=8ab(a+b)^2$

14. $(x^2+y^2)^2-xy(x^2+y^2)-2x^2y^2=(x-y)^2(x^2+xy+y^2)$

15. $(a+b)^2-2(a-c)(b+c)=(a-c)^2+(b+c)^2$

16. $(ac-1)(bx+1)-(bc-1)(ax+1)=(a-b)(x+c)$

17. $(a+b)^2(c-d)^2-(a-b)^2(c+d)^2=4\{ab(c-d)^2-cd(a-b)^2\}$

18. $(1+x^2)(1+y)^2-(1+y^2)(1+x)^2=2(x-y)(xy-1)$

19. $(a+bc)^2-(1-b^2)(1-c^2)$
$=(b+ca)^2-(1-c^2)(1-a^2)$
$=(c+ab)^2-(1-a^2)(1-b^2)$

20. দুইটি বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ কর :

(1) $4(a+b)(c+d)$ (2) $4(2a-b)(a-2b)$
(3) $(x+a)(x+b)$ (4) $(7x-2y)(5x+4y)$
(5) x^2-2x-y^2+2y (6) $4x^2-9y^2-12x+30y-16$
(7) x^2+xy (8) $x^2-7x-18$
(9) $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)$
(10) $(2x-1)(2x-3)(2x-5)(2x-7)$

21. দুইটি বর্গের সমষ্টিরূপে প্রকাশ কর :

(1) $2\{(3x+5y)^2+(2x+4y)^2\}$ (2) $2\{(a+2b-3c)^2+(a-b+2c)^2\}$
(3) $2\{x^2+2xy+1)^2+(y^2-2xy+1)^2\}$
(4) $x(x+1)(x+2)(x+3)+10$
(5) $(2x-1)(2x-3)(2x+5)(2x+7)+89$

---

13. সাপেক্ষ অভেদ। কোন অভেদের সমতা এক বা একাধিক শর্তের উপর নির্ভর করিলে উহাকে **সাপেক্ষ অভেদ** (Conditional Identity) বলে।

উদা. 1. যদি $x+y=1+xy$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$x^3+y^3=1+x^3y^3$$

$$\begin{aligned} x^3+y^3 &= (x+y)^3-3xy(x+y) \\ &= (1+xy)^3-3xy(1+xy) \quad [\because x+y=1+xy] \\ &= (1+xy)^3-3.1.xy(1+xy) \\ &= (1)^3+(xy)^3 \\ &= 1+x^3y^3, \text{ (প্রমাণিত)} \end{aligned}$$

সূত্রের সাহায্য ব্যতীতও বৈজিক রাশিকে দুই বর্গের সমষ্টিরূপে প্রকাশ করা যায়।

উদা. 2. $(2x+1)(2x+3)(2x+5)(2x+7)+212$ কে দুই বর্গের সমষ্টিরূপে প্রকাশ কর।

প্রদত্ত রাশি $=(2x+1)(2x+7)(2x+3)(2x+5)+212$

$=(4x^2+16x+7)(4x^2+16x+15)+212$

$=(a+7)(a+15)+212$ [$4x^2+16x$ এর পরিবর্তে a ধরিয়া]

$=a^2+22a+105+212=a^2+22a+317$

$=a^2+22a+121+196$

$=(a+11)^2+(14)^2=(4x^2+16x+11)^2+(14)^2$

প্রশ্নমালা 22

প্রমাণ কর যে—

1. $(a+2b)^2(a-2b)+(a-2b)^2(a+2b)=2a(a^2-4b^2)$

2. $(a+2b)^2(a-2b)-(a-2b)^2(a+2b)=4b(a^2-4b^2)$

3. $x^3(x+1)(2x-1)+2x^2(2x-1)(x^2+1)-x^2(2x-1)(3x^2+2)$
$=x^3(2x-1)$

4. $\{a^2+bc+a(b+c)\}\{b^2+ca+b(c+a)\}\{c^2+ab+c(a+b)\}$
$=(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2$

5. $(a^2-b^2)^2-3(a^2-b^2)c^2-4c^4=(a^2-b^2-4c^2)(a^2-b^2+c^2)$

6. $(ac-bd)^2+(bc+ad)^2=(a^2+b^2)(c^2+d^2)$

7. $x^3(x-1)(x+2)+2x^2(x-1)(x+1)-x(x-1)(x^2-x-1)$
$=x(x-1)(x+1)^3$

8. $(2a+b)^2+(b+2c)^2=4(a+b+c)^2-2(2a+b)(b+2c)$

9. $a(a-1)(a-2)+3a(a-1)+a=a^3$

10. $(1+a+a^2)^2-(1-a+a^2)^2=4a(1+a^2)$

11. $(a+3b)^3+(3a+b)^3+12(a+b)(a+3b)(3a+b)=64(a+b)^3$

12. $(a+2b+c)^3+(2a+b+2c)^3$
$+9(a+b+c)(a+2b+c)(2a+b+2c)=27(a+b+c)^3$

উদা. 2. যদি $bx = ay$ হয়, প্রমাণ কর যে,

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2) = (ax+by)^2$$

$$\begin{aligned}(a^2+b^2)(x^2+y^2) &= a^2(x^2+y^2)+b^2(x^2+y^2)\\ &= a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2\\ &= a^2x^2+b^2y^2+ay.ay+bx.bx\\ &= a^2x^2+b^2y^2+ay.bx+bx.ay \quad [\because bx=ay]\\ &= a^2x^2+b^2y^2+2abxy\\ &= (ax+by)^2, \text{ (প্রমাণিত)}\end{aligned}$$

উদা. 3. যদি $x^2+y^2 = 1$ হয়, প্রমাণ কর যে,

$$(3x-4x^3)^2+(4y^3-3y)^2 = 1$$

$$\begin{aligned}&(3x-4x^3)^2+(4y^3-3y)^2\\ &= 9x^2+16x^6-24x^4+16y^6+9y^2-24y^4\\ &= 9(x^2+y^2)-24(x^4+y^4)+16(x^6+y^6)\\ &= 9\times1-24\{(x^2+y^2)^2-2x^2y^2\}+16\{(x^2+y^2)^3-3x^2y^2(x^2+y^2)\}\\ &= 9-24\{(1)^2-2x^2y^2)+16\{(1)^3-3x^2y^2\times1\}\\ &= 9-24(1-2x^2y^2)+16(1-3x^2y^2)\\ &= 9-24+48x^2y^2+16-48x^2y^2\\ &= 9+16-24\\ &= 1, \text{ (প্রমাণিত)}\end{aligned}$$

উদা. 4. যদি $a+b = 2p$ হয়, প্রমাণ কর যে, $a^3+b^3+6abp = 8p^3$

$$\begin{aligned}&a^3+b^3+6abp\\ &= (a+b)^3-3ab(a+b)+6abp\\ &= (2p)^3-3ab.2p+6abp \quad [\because a+b=2p]\\ &= 8p^3-6abp+6abp\\ &= 8p^3\end{aligned}$$

উদা. 5. যদি $a+b+c = 0$ হয়, প্রমাণ কর যে,

$$a^2-bc = b^2-ca = c^2-ab$$

$$\begin{aligned}(a^2-bc)-(b^2-ca) &= (a^2-b^2)+(ca-bc)\\ &= (a+b)(a-b)+c(a-b)\\ &= (a-b)(a+b+c)\\ &= (a-b)\times0 \quad [\because a+b+c=0]\\ &= 0\end{aligned}$$

যেহেতু, $(a^2-bc)-(b^2-ca)=0$

$\because\ a^2-bc=b^2-ca$ [পক্ষান্তর করিয়া]

আবার, $(b^2-ca)-(c^2-ab)=(b^2-c^2)+(ab-ca)$

$=(b+c)(b-c)+a(b-c)$

$=(b-c)(b+c+a)$

$=(b-c)\times 0$

$=0$

যেহেতু, $(b^2-ca)-(c^2-ab)=0$

$\therefore\ b^2-ca=c^2-ab$ [পক্ষান্তর করিয়া]

অতএব, $a^2-bc=b^2-ca=c^2-ab.$

দ্বিতীয় প্রণালী। $a+b+c=0$

$\therefore\ a=-b-c,\quad b=-c-a,\quad c=-a-b$

$\therefore\ a^2-bc=a.a.-bc$

$=a(-b-c)-bc$ [$\because\ a=-b-c$]

$=-ab-ca-bc$

$=-(ab+bc+ca)$

$b^2-ca=b.b-ca$

$=b(-c-a)-ca$

$=-bc-ab-ca$

$=-(ab+bc+ca)$

তদ্রূপ, $c^2-ab=-(ab+bc+ca)$

$\therefore\ a^2-bc=b^2-ca=c^2-ab.$

উদা. 6. যদি $2s=a+b+c$ হয়, প্রমাণ কর যে,

$(s-a)^3+(s-b)^3+3(s-a)(s-b)c=c^3$

$2s=a+b+c$ বা, $s+s=a+b+c$

$\therefore\ (s-a)+(s-b)=c$

এখন, $(s-a)^3+(s-b)^3+3(s-a)(s-b)c$

$=(s-a)^3+(s-b)^3+3(s-a)(s-b)\{(s-a)+(s-b)\}$

[$\because\ c=(s-a)+(s-b)$]

$=\{(s-a)+(s-b)\}^3$

$=c^3$ [$\because\ (s-a)+(s-b)=c$]

প্রশ্নমালা 23

1. যদি $x=y+z$ হয়, প্রমাণ কর যে, $x^3-y^3-z^3=3xyz$
2. যদি $2a-3b=1$ হয়, প্রমাণ কর যে, $8a^3-18ab=1+27b^3$
3. যদি $a^2+b^2=1$ এবং $c^2+d^2=1$ হয়, প্রমাণ কর যে, $(ac-bd)^2+(ad+bc)^2=1$
4. যদি $x+y=1$ হয়, প্রমাণ কর যে, $(x^2-y^2)^2=x^3+y^3-xy$
5. যদি $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2=3$ হয়, প্রমাণ কর যে, $a^3+\frac{1}{a^3}=0$
6. যদি $p=3+\frac{1}{p}$ হয়, প্রমাণ কর যে, $p^4=119-\frac{1}{p^4}$

যদি $a+b+c=0$ হয়, প্রমাণ কর যে,

7. $(ab+bc+ca)^2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$
8. $a(a+b)(a+c)=b(b+c)(b+a)=c(c+a)(c+b)$
9. $a^2+ab+b^2=b^2+bc+c^2=c^2+ca+a^2$
10. $a^2-bc=a^2+ab+b^2=-(ab+bc+ca)$
11. $(b+c)(b-c)+a(a+2b)=0$

যদি $s=a+b+c$ হয়, প্রমাণ কর যে,

12. $(s-a)^2+(s-b)^2+(s-c)^2=s^2+a^2+b^2+c^2$
13. $(as+bc)(bs+ca)(cs+ab)=(b+c)^2(c+a)^2(a+b)^2$

যদি $2s=a+b+c$ হয়, প্রমাণ কর যে,

14. $s^2+(s-a)^2+(s-b)^2+(s-c)^2=a^2+b^2+c^2$
15. $s^2+(s-a)(s-b)+(s-b)(s-c)+(s-c)(s-a)=ab+bc+ca$
16. $4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2=16s(s-a)(s-b)(s-c)$
17. যদি $mx+ny=m$, $nx-my=n$ হয়, প্রমাণ কর যে, $x^2+y^2=1$

ষষ্ঠ অধ্যায়

গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক ও লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক

1. উৎপাদক সাহায্যে গ. সা. গু. নির্ণয়।

উৎপাদক সাহায্যে গ. সা. গু. নির্ণয়ের প্রণালী অষ্টম শ্রেণীর পাঠ্যাংশে আলোচিত হইয়াছে। পুনরালোচনার জন্য এস্থলে মাত্র কয়েকটি উদাহরণ ও একটি প্রশ্নমালা প্রদত্ত হইল।

উদা. 1. $49a^7b^3cd$, $63a^3b^2c^2d^2$ এবং $35a^4b^4d^3$ এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

$49 = 7 \times 7$, $63 = 3 \times 3 \times 7$, $35 = 5 \times 7$ $\therefore$ 49, 63, 35-এর গ. সা. গু. = 7

a^7, a^3, a^4 ইহাদের মধ্যে a^3 বৃহত্তম সাধারণ ;

b^3, b^2, b^4 ইহাদের মধ্যে b^2 বৃহত্তম সাধারণ ;

d, d^2, d^3 ইহাদের মধ্যে d বৃহত্তম সাধারণ ;

c তৃতীয় রাশিতে নাই ;

সুতরাং নির্ণেয় গ. সা. গু. $= 7a^3b^2d$.

উদা. 2. $15x^2y - 135y^3$ এবং $10x^2 - 60xy + 90y^2$ এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

প্রথম রাশি $= 15x^2y - 135y^3$

$= 15y(x^2 - 9y^2)$

$= 3 \times 5.y(x+3y)(x-3y)$

দ্বিতীয় রাশি $= 10x^2 - 60xy + 90y^2$

$= 10(x^2 - 6xy + 9y^2)$

$= 2 \times 5(x-3y)^2$

$\therefore$ নির্ণেয় গ. সা. গু. $= 5(x-3y)$

উদা. 3. $15a^2b^3(a^6-b^6)$, $45a^2b^2(a^4+a^2b^2+b^4)$ এবং $25a^3b^2(a^2+ab+b^2)^2$ এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

প্রথম রাশি $= 3.5a^2b^3(a^3+b^3)(a^3-b^3)$

$= 3.5.a^2b^3(a+b)(a^2-ab+b^2)(a-b)(a^2+ab+b^2)$

দ্বিতীয় রাশি $= 3.3.5.a^2b^2\{(a^2+b^2)^2-(ab)^2\}$

$= 3.3.5.a^2b^2(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$

তৃতীয় রাশি $= 5.5.a^3b^2(a^2+ab+b^2)^2$

$\therefore$ নির্ণেয় গ. সা. গু. $=5a^2b^2(a^2+ab+b^2)$

উদা. 4. $a^2-b^2+2bc-c^2$ ও $c^2-a^2-2ab-b^2$ এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

প্রথম রাশি $= a^2-(b^2-2bc+c^2)$

$= (a)^2-(b-c)^2$

$= (a+b-c)(a-b+c)$

দ্বিতীয় রাশি $= c^2-(a^2+2ab+b^2)$

$= (c)^2-(a+b)^2$

$=(c-a-b)(c+a+b)$

$= -(a+b-c)(a+b+c)$

$\therefore$ নির্ণেয় গ. সা. গু. $= a+b-c.$

প্রশ্নমালা 24

নিম্নলিখিত রাশি সমূহের গ. সা. গু. নির্ণয় কর :

1. $12a^3b^2c$, $18a^2b^3c^2$. **2.** $10x^2y^3z^4$, $15x^3y^2z^3$, $35x^4y^4z^3$.

3. x^2+2x, x^2+5x+6. **4.** $2x^2-4x$, x^2-4x+4.

5. x^6-4x^4, $x^4+4x^3+4x^2$.

6. x^2+5x+6, $x^2+7x+12$.

7. x^2+5x+6, x^2+3x+2, x^2+4x+4.

8. $a^2-2a-15$, a^2-6a+5, $35-2a-a^2$.

9. $4-x^2$, x^2-4x+4, x^2-5x+6.

10. $a^2b(a^3-b^3)$, $a^2b^2(a^4+a^2b^2+b^4)$, $a^3b^2+a^2b^3+ab^4$.

11. $16x^4-2x$, $12x^4+2x^3-4x^2$, $18x^4-39x^3+15x^2$,

12. $6x^3+5x^2y+xy^2$, $8x^3+12x^2y+6xy^2+y^3$,
$4x^3-4x^2y-3xy^2$.

13. $1+2x-8x^3-16x^4$, $1+4x+4x^2-16x^4$.

14. x^4-y^4, x^6-y^6, x^8-y^8, $x^{12}-y^{12}$. (B. U. 1935)

15. $27x^4+x$, $87x^2+8x-7$, $27x^3+27x^2+9x+1$. (B. U. 1916)

---

2. উৎপাদক সাহায্যে ল. সা গু. নির্ণয়।

উৎপাদক সাহায্যে ল. সা. গু. নির্ণয়ের প্রণালী অষ্টম শ্রেণীর পাঠ্যাংশে আলোচিত হইয়াছে। পুনরালোচনার জন্য এস্থলে মাত্র কয়েকটি উদাহরণ ও একটি প্রশ্নমালা প্রদত্ত হইল।

উদা. 1. $16ax^2y^3z^2$, $24bx^3y^3z^3$, এবং $40a^2b^2x^2z^2$ এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

প্রথম রাশি $=2\times2\times2\times2\times a\times x^2\times y^3\times z^2=2^4\times a\times x^2\times y^3\times z^2$

দ্বিতায় রাশি $=2\times2\times2\times3\times b\times x^3\times y^3\times z^3=2^3\times3\times b\times x^3\times y^3\times z^3$

তৃতীয় রাশি $=2\times2\times2\times5\times a^2\times b^2\times x^2\times z^2=2^3\times5\times a^2\times b^2\times x^2\times z^2$

$\therefore$ নির্ণেয় ল. সা. গু. $=2^4\times3\times5\times a^2\times b^2\times x^3\times y^3\times z^3$
$=240a^2b^2x^3y^3z^3$.

উদা. 2. $2(a-b)$, $3(a^2-b^2)$ এবং $4(a^3-b^3)$ এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

প্রথম রাশি $=2(a-b)$

দ্বিতীয় রাশি $=3(a+b)(a-b)$

তৃতীয় রাশি $=2^2(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$\therefore$ নির্ণেয় ল. সা. গু. $=2^2\times3\times(a-b)(a+b)(a^2+ab+b^2)$
$=12(a+b)(a-b)(a^2+ab+b^2)$
$=12(a+b)(a^3-b^3)$

উদা. 3. $3ab-6b^2$, $12a^3-48ab^2$ এবং $6a^3-6a^2b-12ab^2$ এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

প্রথম রাশি $=3ab-6b^2=3b(a-2b)$

দ্বিতীয় রাশি $=12a^3-48ab^2$

$=12a(a^2-4b^2)$

$=3\times 2^2\times a(a+2b)(a-2b)$

তৃতীয় রাশি $=6a^3-6a^2b-12ab^2$

$=6a(a^2-ab-2b^2)$

$=6a(a^2-2ab+ab-2b^2)$

$=6a\{a(a-2b)+b(a-2b)\}$

$=3\times 2\times a(a-2b)(a+b)$

$\therefore$ নির্ণেয় ল. সা. গু. $=3\times 2^2\times a\times b(a+2b)(a-2b)(a+b)$

$=12ab(a+2b)(a-2b)(a+b)$

উদা. 4. $3x^2-15x+18$, $2x^2+2x-24$, $4x^2+36x+80$ এবং $6x^2+18x-60$ এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

প্রথম রাশি $=3(x^2-5x+6)$

$=3(x^2-2x-3x+6)$

$=3\{x(x-2)-3(x-2)\}$

$=3(x-2)(x-3)$

দ্বিতীয় রাশি $=2(x^2+x-12)$

$=2(x^2+4x-3x-12)$

$=2\{x(x+4)-3(x+4)\}$

$=2(x+4)(x-3)$

তৃতীয় রাশি $=4(x^2+9x+20)$

$=4(x^2+4x+5x+20)$

$=4\{x(x+4)+5(x+4)\}$

$=2^2(x+4)(x+5)$

চতুর্থ রাশি $=6(x^2+3x-10)$

$=6(x^2+5x-2x-10)$

$=6\{x(x+5)-2(x+5)\}$

$=2\times 3(x+5)(x-2)$

$\therefore$ নির্ণেয় ল. সা. গু. $=3\times 2^2(x-2)(x-3)(x+4)(x+5)$

$=12(x-2)(x-3)(x+4)(x+5)$

প্রশ্নমালা 25

নিম্নলিখিত রাশিসমূহের ল. সা. গু. নির্ণয় কর :

1. $14a^3b^4c^5, 21ab^3$
2. $3x^3, 4xy^3z, 5x^4y^2z^2, xy^4z^2$
3. $x^2(x^2-4), x^4+2x^3-8x^2$ (W. B. S. B., 1952)
4. $x^2-x-6, x^2+x-12, x^2+6x+8$
5. $x^2-9y^2, x^2-xy-6y^2, x^2+xy-12y^2$
6. $2x^2-x-1, x^2-1, 2x^2+3x+1$
7. $a^2-b^2, a^3-b^3, a^4-b^4$
8. $x^2+x-6, x^2-3x+2, x^2+2x-3$
9. $x^2-x-6, x^2+x-12, x^2+6x+8$
10. $x^2-3x+2, x^2-4x+3, x^2-5x+6$
11. $2x^2-3x-2, x^2-5x+6, 2x^2-5x-3$
12. $x^6-2x^4y^2+x^2y^4-y^6, x^6-x^2y^4-2xy^5-y^6$ (M. U. 1904)
13. $8a^3-27b^3, 3a^2-ab-2b^2, 6a^2-5ab-6b^2$ (B. U. 1911)
14. $15(x^3+y^3), 5(x^2-xy+y^2), 4(x^2+xy+y^2), 6(x^2-y^2)$
15. $1-x+x^2, 1+x+x^2, 1+x^2+x^4$
16. $x^3+a^3, x^3-a^3, x^4+a^2x^2+a^4, x^2-ax+a^2$ (M. U. 1896)
17. $a^5-ab^4, b^3-a^3, a^6+b^6+a^2b^2(a^2+b^2)$
18. $9x^4-28x^2+3, 27x^4-12x^2+1, 27x^4+6x^2-1, x^4-6x^2+9$ (C. U. 1886)
19. $x^3-3x^2+3x-1, x^3-x^2-x+1, x^4-2x^3+2x-1$ (B. U. 1890)
20. $4x^2-6yz-(9y^2+z^2), 9y^2+4xz-(4x^2+z^2), z^2-12xy-(4x^2+9y^2)$

দুরূহ গ. সা. গু.

3. উৎপাদক সাহায্যে গ. সা. গু. নির্ণয়ের প্রণালী পূর্বেই আলোচিত হইয়াছে। যে সকল রাশির উৎপাদক নির্ণয় সহজ নয়, উহাদের গ. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইলে অনেকটা পাটীগণিতের মত প্রক্রিয়া করিয়া যাইতে হয়।

4. দুইটি রাশিমালার কোন সরল বা একপদ উৎপাদক না থাকিলে রাশিমালা দুইটিকে উহাদের কোন সাধারণ অক্ষরের ঘাতসমূহের ঊর্ধ্বগ বা নিম্নগক্রমে সাজাও এবং অক্ষর হিসাবে নিম্নতর মানের রাশিমালা দ্বারা উচ্চতর মানের রাশিমালাকে

ভাগ কর। অক্ষর হিসাবে দুইটি রাশির মান সমান হইলে যে কোন রাশিমালা দ্বারা অপর রাশিমালাকে ভাগ করা যাইতে পারে।

রাশিমালা দুইটির একটির প্রথম পদের সংখ্যাত্মক সহগ দ্বারা অপরটির প্রথম পদের সংখ্যাত্মক সহগ নিঃশেষে বিভাজ্য না হইলে প্রয়োজন মত যে কোন রাশিমালাকে পাটীগণিতীয় সংখ্যা দ্বারা গুণ কর। এখন সাধারণ ভাগের প্রণালীতে উচ্চতর মানের রাশিমালাকে নিম্নতর মানের রাশিমালা দ্বারা ভাগ কর। যদি ভাগ মিলিয়া যায় অর্থাৎ ভাগশেষ না থাকে তবে, ভাজক হইবে গ. সা. গু.।

যদি ভাগশেষ থাকে, তবে প্রথমেই লক্ষ্য কর এই ভাগশেষের কোন সাধারণ উৎপাদক আছে কিনা। যদি থাকে তবে এই সাধারণ উৎপাদক ত্যাগ করিয়া যাহা থাকে তাহা দ্বারা ভাজককে ভাগ কর। এই ভাগের পর যদি ভাগশেষ থাকে, তবে এই ভাগশেষ হইতে উহার সাধারণ উৎপাদক থাকিলে উহা ত্যাগ করিয়া যাহা থাকে তাহা দ্বারা পূর্ববর্তী ভাজককে ভাগ কর।

এইরূপ ভাগ করিতে করিতে যখন ভাগশেষ থাকিবে না তখন শেষ ভাজক যাহা থাকিবে উহাই হইবে প্রদত্ত রাশিমালা দুইটির গ. সা. গু.।

প্রতি ভাগশেষের প্রথম পদের চিহ্ন '−' থাকিলে -1 কে সাধারণ উৎপাদক হিসাবে ত্যাগ করিলে উক্ত ভাগশেষের প্রথম পদের চিহ্ন ধনাত্মক (positive) হইবে এবং ইহাতে ভাগ কার্যও সহজতর হইবে।

উদা. 1. $6x^3-2x^2-13x-6$ ও $12x^3-x^2-30x-16$ এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

$$6x^3-2x^2-13x-6\ )\ 12x^3-x^2-30x-16\ (\ 2$$
$$\underline{12x^3-4x^2-26x-12}$$
$$3x^2-4x-4)\ 6x^3-2x^2-13x-6\ (2x+2$$
$$\underline{6x^3-8x^2-8x}$$
$$6x^2-5x-6$$
$$\underline{6x^2-8x-8}$$
$$3x+2$$

$$3x+2\ )\ 3x^2-4x-4\ (\ x-2$$
$$\underline{3x^2+2x}$$
$$-6x-4$$
$$\underline{-6x-4}$$

∴ নির্ণেয় গ. সা গু. $=3x+2$.

সংক্ষিপ্ত আকারে নিম্নলিখিতভাবে উপরের রাশিমালা দুইটির গ. সা. গু. নির্ণয় করা যায়।

$$\begin{array}{r|r|r|l} 2x & 6x^3-2x^2-13x-6 & 12x^3-x^2-30x-16 & 2 \\ & 6x^3-8x^2-8x & 12x^3-4x^2-26x-12 & \\ \hline 2 & 6x^2-5x-6 & 3x^2-4x-4 & x \\ & 6x^2-8x-8 & 3x^2+2x & \\ \hline & 3x+2 & -6x-4 & -2 \\ & & -6x-4 & \\ \hline \end{array}$$

$\therefore$ নির্ণেয় গ. সা. গু. $= 3x+2$

উদা. 2. $2x^3-x^2-2x+1$ এবং $3x^3+2x^2-7x+2$ এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

$$\begin{array}{l}
2x^3-x^2-2x+1\,)\ 3x^3+2x^2-7x+2 \\
\qquad\qquad\qquad\quad 2 \\
\qquad\qquad\qquad\quad \overline{6x^3+4x^2-14x+4}\ (\,3 \\
\qquad\qquad\qquad\quad 6x^3-3x^2-6x+3 \\
\qquad\qquad\qquad\quad \overline{\qquad 7x^2-8x+1}\,)\,2x^3-x^2-2x+1\,(\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 7 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \overline{14x^3-7x^2-14x+7}\ (\,2x \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 14x^3-16x^2+2x \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \overline{\qquad\quad 9x^2-16x+7} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 7 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \overline{63x^2-112x+49}\ (\,9 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 63x^2-72x+9 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \overline{\qquad -40x+40} \\
\\
\qquad\qquad\qquad -40 \mid -40x+40 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \overline{x-1\,)\ 7x^2-8x+1}\ (\,7x-1 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 7x^2-7x \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \overline{\qquad -x+1} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \qquad -x+1 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \overline{\qquad\qquad}
\end{array}$$

$\therefore$ নির্ণেয় গ. সা. গু. $= x-1$

5. প্রদত্ত রাশিমালা দুইটির যদি সরল অর্থাৎ একপদ উৎপাদক থাকে, তবে প্রথমেই ঐ সরল উৎপাদক বাহির করিয়া লইয়া অবশিষ্ট অংশ দুইটির গ. সা. গু. নির্ণয় কর। যে সরল উৎপাদকগুলি বাহির করিয়া লওয়া হইল উহাদের গ. সা. গু. এবং অবশিষ্ট অংশগুলির গ. সা. গু. এই দুই গ. সা. গু.-র গুণফলই নির্ণেয় গ. সা. গু. হইবে।

যদি একটি রাশিমালার সরল উৎপাদক থাকে কিন্তু অপরটির না থাকে, তাহা হইলেও যেটির সরল উৎপাদক থাকে উহাকে বাহির করিয়া লও এবং উহার অবশিষ্টাংশ ও অপর রাশির গ. সা. গু. হইবে নির্ণেয় গ. সা. গু.।

উদা. 3. $6x^5+6x^4-6x^3+12x^2$ এবং $12x^5-16x^4+16x^3-4x^2$ এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

$$6x^5+6x^4-6x^3+12x^2=6x^2(x^3+x^2-x+2)$$
$$12x^5-16x^4+16x^3-4x^2=4x^2(3x^3-4x^2+4x-1)$$

$$x^3+x^2-x+2\ )\ 3x^3-4x^2+4x-1\ (\ 3$$
$$3x^3+3x^2-3x+6$$
$$-7\,|\,-7x^2+7x-7$$
$$x^2-x+1\ )\ x^3+x^2-x+2\ (\ x+2$$
$$x^3-x^2+x$$
$$2x^2-2x+2$$
$$2x^2-2x+2$$

$\therefore$ x^3+x^2-x+2 এবং $3x^3-4x^2+4x-1$ এর গ. সা. গু. $=x^2-x+1$.

কিন্তু $6x^2$ এবং $4x^2$ এর গ. সা. গু. $=2x^2$

$\therefore$ নির্ণেয় গ. সা. গু. $=2x^2(x^2-x+1)$.

6. সাধারণ উৎপাদক সম্বন্ধে দুইটি নিয়ম বিশেষরূপে স্মরণ রাখা প্রয়োজন।

(1) যদি কোন রাশির একটি উৎপাদক থাকে, তবে রাশিটির যে কোন গুণিতকের ঐ উৎপাদক থাকিবে।

(2) দুইটি রাশির যদি একটি সাধারণ উৎপাদক থাকে, তবে রাশি দুইটির সমষ্টি ও অন্তরেরও ঐ সাধারণ উৎপাদক থাকিবে অর্থাৎ রাশি দুইটির সমষ্টি ও অন্তর সাধারণ উৎপাদক দ্বারা বিভাজ্য হইবে; এবং রাশি দুইটির যে কোন গুণিতকের সমষ্টি ও অন্তরেরও ঐ সাধারণ উৎপাদক থাকিবে অর্থাৎ রাশি দুইটির যে কোন গুণিতকের সমষ্টি ও অন্তর সাধারণ উৎপাদক দ্বারা বিভাজ্য হইবে।

(1) F যদি A-র একটি উৎপাদক হয়, তাহা হইলে F, mA-এরও একটি উৎপাদক হইবে।

মনে কর $A=A_1F$; তাহা হইলে $mA=mA_1F$

সুতরাং F, mA-র একটি উৎপাদক হইল।

(2) F যদি A ও B-র একটি সাধারণ উৎপাদক হয়, তাহা হইলে F, $(mA+nB)$ এবং $(mA-nB)$ ইহাদেরও একটি উৎপাদক হইবে অর্থাৎ $(mA+nB)$ এবং $(mA-nB)$, F দ্বারা বিভাজ্য হইবে।

মনে কর $A = A_1F$ এবং $B = B_1F$

তাহা হইলে, $mA+nB = mA_1F + nB_1F = F(mA_1+nB_1)$

সুতরাং F, $(mA+nB)$-র একটি উৎপাদক হইল।

আবার, $mA-nB = mA_1F - nB_1F = F(mA_1 - nB_1)$

সুতরাং F, $(mA-nB)$-র একটি উৎপাদক হইল।

7. সংক্ষিপ্ত প্রণালীতে গ. সা. গু. নির্ণয়।

দুইটি রাশিমালার কোন সরল অর্থাৎ একপদ উৎপাদক না থাকিলে রাশিমালা দুইটিকে উহাদের কোন সাধারণ অক্ষরের ঘাতের নিম্নগ ক্রমে সাজাইয়া পর্যায়ক্রমে উহাদের উক্ত অক্ষরের সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মাত্রাবিশিষ্ট দুই দুইটি পদ অপসারিত কর। এই প্রক্রিয়া দ্বারা লব্ধ রাশি দুইটি নিম্নতর মাত্রাবিশিষ্ট হইবে এবং উহাদের সরল উৎপাদক পরিত্যাগ করিয়া অবশিষ্টাংশের গ. সা. গু. নির্ণয় কর। ইহাই নির্ণেয় গ. সা. গু. হইবে। প্রাপ্ত নিম্নতর মাত্রাবিশিষ্ট রাশি দুইটির গ. সা. গু. নির্ণয় করিতে প্রয়োজনবোধে উক্ত প্রণালীর পুনঃ পুনঃ প্রয়োগ করা চলে।

উদা. 4. $2x^4-2x^3+x^2+3x-6$ এবং $4x^4-2x^3+3x-9$-এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

মনে কর $A = 2x^4-2x^3+x^2+3x-6$

এবং $B = 4x^4-2x^3+3x-9$

$\therefore\ 2A-B = 2(2x^4-2x^3+x^2+3x-6)-(4x^4-2x^3+3x-9)$

$= -2x^3+2x^2+3x-3$

$= -(2x^3-2x^2-3x+3)$

এবং $3A-2B = 3(2x^4-2x^3+x^2+3x-6)-2(4x^4-2x^3+3x-9)$

$= -2x^4-2x^3+3x^2+3x)$

$= -x(2x^3+2x^2-3x-3)$

সুতরাং A ও B-র গ. সা. গু. $=(2A-B)$ ও $(3A-2B)$এর গ. সা. গু.

$=2x^3-2x^2-3x+3$ ও $2x^3+2x^2-3x-3$ এর গ. সা. গু.

[সরল উৎপাদক ত্যাগ করিয়া]

আবার, মনে কর $A'=2x^3-2x^2-3x+3$

এবং $B'=2x^3+2x^2-3x-3$

$\therefore\ A'+B'=4x^3-6x=2x(2x^2-3)$

এবং $A'-B'=-4x^2+6=-2(2x^2-3)$

সুতরাং A′ ও B′-এর গ. সা. গু. $=(A'+B')$ ও $(A'-B')$-এর গ. সা. গু.

$=2x^2-3$ [সরল উৎপাদ ত্যাগ করিয়া]

সুতরাং A ও B-র গ. সা. গু. অর্থাৎ প্রদত্ত রাশিমালা দুইটির

গ. সা. গু. $=2x^2-3.$

উদা. 5. x^5+x^4+1 এবং $x^6-2x^4+x^2-1$-এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

মনে কর $A=x^5+x^4+1$

$B=x^6-2x^4+x^2-1$

$A+B=x^6+x^5-x^4+x^2=x^2(x^4+x^3-x^2+1)$

এখন A ও B-এর গ. সা. গু. $=$ A ও $(A+B)$-এর গ. সা. গু. $=x^5+x^4+1$

এবং $x^4+x^3-x^2+1$ এর গ. সা. গু.

মনে কর, $C=x^4+x^3-x^2+1$

$\therefore\ A-C=(x^5+x^4+1)-(x^4+x^3-x^2+1)$

$=x^5-x^3+x^2=x^2(x^3-x+1)$

এখন A ও $(A+B)$-এর গ. সা. গু. $=$ C ও $(A-C)$-এর গ. সা. গু.

$=x^4+x^3-x^2+1$ ও x^3-x+1-এর গ. সা. গু.

আবার, মনে কর $D=x^3-x+1$

$\therefore\ C-D=(x^4+x^3-x^2+1)-(x^3-x+1)$

$=x^4-x^2+x$

$=x(x^3-x+1)$

এখন, C ও $(A-B)$-এর গ. সা. গু. $=$ D ও $(C-D)$-এর গ. সা. গু.

$=x^3-x+1$

$\therefore$ A ও B-এর গ. সা. গু. অর্থাৎ প্রদত্ত রাশি দুইটির গ. সা. গু. $=x^3-x+1$

8. তিন বা তদধিক রাশিমালার গ. সা. গু. নির্ণয়।

তিন বা তদধিক রাশিমালার গ. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইলে যে কোন দুইটি রাশিমালার গ. সা. গু. নির্ণয় কর। লব্ধ গ. সা. গু. এবং তৃতীয় রাশিমালার গ. সা. গু.

নির্ণয় কর। শেষ লব্ধ এই গ. সা. গু.-ই তিনটি রাশিমালার গ. সা. গু. হইবে। রাশিমালার সংখ্যা তিনের অধিক হইলেও এই নিয়ম খাটিবে। সর্বক্ষেত্রেই সর্বশেষ গ. সা. গু.-ই নির্ণেয় গ. সা. গু. হইবে।

মনে কর, A, B, C তিনটি রাশির A ও B-এর গ. সা. গু. H_1 এবং H_1 ও C-এর গ. সা. গু. H_2 ; তাহা হইলে H_2-ই হইবে A, B, C-এর গ. সা. গু.। কারণ A ও B-র সমস্ত সাধারণ উৎপাদক H_1-এ বর্তমান এবং H_1 এবং C এর সমস্ত সাধারণ উৎপাদক H_2-এ বর্তমান, সুতরাং A, B, C-এর সমস্ত সাধারণ উৎপাদক H_2-তে বর্তমান।

উদা. 6. $2x^3+5x^2+x-2,\ \ 3x^3+10x^2+9x+2$ এবং $2x^3+3x^2-3x-2$-এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

$$2x^3+5x^2+x-2\ )\ 3x^3+10x^2+9x+2$$
$$2$$
$$6x^3+20x^2+18x+4\ (\ 3$$
$$6x^3+15x^2+\ 3x-6$$
$$5\ )\ 5x^2+15x+10$$
$$x^2+\ 3x+\ 2\ )\ 2x^3+5x^2+x-2\ (\ 2x-1$$
$$2x^3+6x^2+4x$$
$$-x^2-3x-2$$
$$-x^2-3x-2$$

$2x^3+5x^2+x-2$ এবং $3x^3+10x^2+9x+2$-এর গ. সা. গু. $=x^2+3x+2$

$$x^2+3x+2\ )\ 2x^3+3x^2-3x-2\ (\ 2x-3$$
$$2x^3+6x^2+4x$$
$$-3x^2-7x-2$$
$$-3x^2-9x-6$$
$$2\ |\ \ 2x+4$$
$$x+2\ )\ x^2+3x+2\ (\ x+1$$
$$x^2+2x$$
$$x+2$$
$$x+2$$

প্রথম দুই রাশির গ. সা. গু. x^2+3x+2 এবং তৃতীয় রাশি $2x^3+3x^2-3x-2$ এর গ. সা. গু. $=x+2$.

$\therefore$ নির্ণেয় গ. সা. গু. $=x+2$.

প্রশ্নমালা 26

নিম্নলিখিত রাশিগুলির গ. সা. গু. নির্ণয় কর :

1. $x^2-2x-3,\ \ x^3-2x^2-2x-3$
2. $x^2+3x+2,\ \ x^3+x^2+x+1$
3. $x^3+4x^2+4x+1,\ \ x^4+3x^3+2x^2+3x+1$
4. $x^4-5x^2+4,\ \ x^5-11x+10$
5. $2x^2-x-1,\ \ 3x^3-7x^2+4$
6. $x^3+4x^2-5,\ \ x^3-3x+2$
7. $x^3+2x^2-1,\ \ x^4+x^3+x-1$
8. $2x^4-7x^3+12x^2-11x+3,\ \ x^5-x^3+5x^2-2x$
9. $x^3-1,\ \ x^5-1$
10. $3x^3-7x^2-18x-8,\ \ 2x^3-3x^2-17x-12$
11. $3x^4+15x^3+5x^2+10x+2,\ \ 2x^4+9x^3+14x+3$
12. $3x^3-13x^2+23x-21,\ \ 6x^3+x^2-44x+21$
13. $4x^3-12x-8,\ \ 6x^3-24x^2+30x-12$
14. $6x^5-13x^4-6x^3,\ \ 8x^5-36x^4+54x^3-27x^2$
15. $2x^4y^2+4x^3y^3-2x^2y^4-4xy^5,\ \ 3x^5y+6x^4y^2-15x^3y^3-18x^2y^4$
16. $x^4+2x^2+9,\ \ x^4-4x^3+3x^2+2x-12$
17. $2x^4-6x+40,\ \ 15x^4-9x^3+192$
18. $x^3+3x^2-9x+5,\ \ x^3-19x+30$
19. $2x^3-4x^2-6x,\ \ 3x^5-6x^4-6x^3-9x^2$
20. $x^5+11x-12,\ \ x^5+11x^3+54$
21. $3x^4-7x^3+13x^2-7x+6,\ \ 2x^4-7x^3+16x^2-17x+12$
22. $x^4-3x^3-2x^2+12x-8,\ \ x^3-7x+6$
23. $x^2-3x+2,\ \ 3x^2-2x-8,\ \ 2x^2-9x+10$
24. $10x^3+11x^2+9,\ \ 6x^3+5x^2+9$
25. $3x^5-5x^3+2,\ \ 2x^5-5x^2+3$
26. $2x^3+7x^2+7x+2,\ \ x^3+9x^2+26x+24,\ \ 2x^3+7x^2-2x-16$
27. $x^3-3x-2,\ \ x^3-7x+6,\ \ x^3-4x^2+5x-2$
28. $a^3+6a^2+11a+12,\ \ a^3-a^2-3a-9,\ \ 2a^3+3a^2+4a-3$
29. $x^4-x^3+2x^2+x+3,\ x^4+2x^3-x-2,\ x^4+x^3-2x^2-3x-3$
30. $4x^3+8x^2-4x-8,\ 6x^3+6x^2-24x-24,\ 8x^3+20x^2+4x-8$

দুরূহ ল. সা. গু.

9. উৎপাদক সাহায্যে ল. সা. গু. নির্ণয়ের প্রণালী পূর্বেই আলোচিত হইয়াছে। যে সকল রাশির উৎপাদক নির্ণয় সহজ নয় উহাদের ল. সা. গু. নির্ণয়ের প্রণালী এই স্থলে প্রদত্ত হইয়াছে।

10. দুইটি রাশির গ. সা. গু. ও ল. সা. গু.-র গুণফল সংখ্যা দুইটির গুণফলের সমান।

মনে কর A ও B দুইটি রাশি এবং উহাদের গ. সা. গু. $= H$ এবং ল. সা. গু. $= L$. যেহেতু H উভয় রাশির গ. সা. গু., সুতরাং A ও B-এর প্রত্যেকটি H দ্বারা বিভাজ্য। এখন মনে কর $A = mH$ এবং $B = nH$ (H উভয় রাশির গ. সা. গু. বলিয়া m এবং n-এর কোন সাধারণ উৎপাদক থাকিতে পারে না।)

সুতরাং A ও B-র ল. সা. গু. $= mnH$

অর্থাৎ $L = mnH$

$$\frac{(mH)\times(nH)}{H} = \frac{A \times B}{H}$$

যেহেতু $L = \dfrac{A \times B}{H}$ $\quad \therefore \; L \times H = A \times B$

অর্থাৎ A ও B-এর গুণফল A ও B-এর গ. সা. গু. ও ল. সা. গু.-র গুণফলের সমান।

$\therefore$ প্রমাণিত হইল দুইটি রাশির গ. সা. গু. ও ল. সা. গু.-র গুণফল রাশি দুইটির গুণফলের সমান।

আবার, $L = \dfrac{A \times B}{H} = \dfrac{A}{H} \times B$ অথবা $\dfrac{B}{H} \times A$

সুতরাং দুইটি রাশির ল. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইলে, প্রথমতঃ রাশি দুইটির গ. সা. গু. নির্ণয় কর এবং একটি রাশিকে এই গ. সা. গু. দ্বারা ভাগ করিয়া ভাগফল দ্বারা অপর রাশিটিকে গুণ কর। গুণফল নির্ণেয় ল. সা. গু. হইবে।

উদা. 1. x^3+5x^2+7x+3 এবং $x^4+3x^3+4x^2+3x+1$ এর ল.সা.গু. নির্ণয় কর।

$$
\begin{array}{l}
x^3+5x^2+7x+3\;)\;x^4+3x^3+4x^2+3x+1\;(\;x-2 \\
\qquad\qquad\qquad\quad\;\; \underline{x^4+5x^3+7x^2+3x} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad -2x^3-3x^2+1 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{-2x^3-10x^2-14x-6} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 7\;|\;\underline{7x^2+14x+7} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x^2+2x+1)\;x^3+5x^2+7x+3\;(x+3 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underline{x^3+2x^2+x} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 3x^2+6x+3 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{3x^2+6x+3}
\end{array}
$$

x^3+5x^2+7x+3 এবং $x^4+3x^3+4x^2+3x+1$ এর গ.সা.গু. $=x^2+2x+1$

$\therefore$ নির্ণেয় ল. সা. গু. $=\dfrac{x^3+5x^2+7x+3}{x^2+2x+1}\times(x^4+3x^3+4x^2+3x+1)$

$$=(x+3)(x^4+3x^3+4x^2+3x+1)$$
$$=x^5+6x^4+13x^3+15x^2+10x+3$$

11. তিন বা তদধিক রাশিমালার ল. সা. গু. নির্ণয়।

তিন বা তদধিক রাশিমালার ল. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইলে প্রথমতঃ যে কোন দুইটি রাশিমালার ল. সা. গু. নির্ণয় কর। অতঃপর লব্ধ ল. সা. গু. এবং তৃতীয় রাশিমালার ল. সা. গু. নির্ণয় কর। শেষ লব্ধ এই ল. সা. গু. তিনটি রাশিমালার ল. সা. গু.। রাশিমালার সংখ্যা তিনের অধিক হইলেও এই নিয়ম খাটিবে। সর্বক্ষেত্রেই শেষ লব্ধ ল. সা. গু.-ই নির্ণেয় ল. সা. গু.।

উদা. 2. $2x^3+3x^2-3x-2$, x^3+4x^2+x-6 ও $6x^3-x^2-4x-1$ এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

$$
\begin{array}{l}
x^3+4x^2+x-6\;)\;2x^3+3x^2-3x-2\;\;(\;2 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{2x^3+8x^2+2x-12} \\
\qquad\qquad\qquad -5\;|\;\underline{-5x^2-5x+10} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad x^2+x-2\;)\;x^3+4x^2+x-6\;(\;x+3 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{x^3+x^2-2x} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 3x^2+3x-6 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underline{3x^2+3x-6}
\end{array}
$$

প্রথম দুইটি রাশিমালার গ. সা. গু. $=x^2+x-2$.

$\therefore$ প্রথম দুই রাশিমালার ল. সা. গু. $= \dfrac{x^3 + 4x^2 + x - 6}{x^2 + x - 2} \times (2x^3 + 3x^2 - 3x - 2)$

$$= (x+3)(2x^3 + 3x^2 - 3x - 2)$$
$$= 2x^4 + 9x^3 + 6x^2 - 11x - 6$$

আবার, প্রথমতঃ $2x^4 + 9x^3 + 6x^2 - 11x - 6$ এবং $6x^3 - x^2 - 4x - 1$ এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

$$\begin{array}{l}
6x^3 - x^2 - 4x - 1\,)\; 2x^4 + 9x^3 + 6v^2 - 11x - 6\;(\\
\qquad\qquad\qquad\quad 3 \\
\qquad\qquad\qquad\quad \overline{6x^4 + 27x^3 + 18x^2 - 33x - 18}\;(x \\
\qquad\qquad\qquad\quad 6x^4 - x^3 - 4x^2 - x \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \overline{28x^3 + 22x^2 - 32x - 18} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 3 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \overline{84x^3 + 66x^2 - 96x - 54}\;(14 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 84x^3 - 14x^2 - 56x - 14 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 40\;|\;\overline{80x^2 - 40x - 40} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 2x^2 - x - 1)\,6x^3 - x^2 - 4x - 1\,(3x + 1 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 6x^3 - 3x^2 - 3x \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \overline{2x^2 - x - 1} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 2x^2 - x - 1 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \overline{}
\end{array}$$

$2x^4 + 9x^3 + 6x^2 - 11x - 6$ এবং $6x^3 - x^2 - 4x - 1$ এর
গ. সা. গু. $= 2x^2 - x - 1$

$\therefore$ নির্ণেয় ল. সা. গু. $= \dfrac{6x^3 - x^2 - 4x - 1}{2x^2 - x - 1} \times (2x^4 + 9x^3 + 6x^2 - 11x - 6)$

$$= (3x+1)(2x^4 + 9x^3 + 6x^2 - 11x - 6)$$
$$= 6x^5 + 29x^4 + 27x^3 - 27x^2 - 29x - 6.$$

উদা. 3. দুইটি রাশির গ. সা. গু. $x - 3$ এবং ল. সা. গু. $3x^3 - 5x^2 - 11x - 3$; রাশি দুইটির একটি $x^2 - 2x - 3$ হইলে অপরটি কত?

যেহেতু দুইটি রাশির গুণফল উহাদের গ. সা. গু. ও ল. সা. গু.-র গুণফলের সমান, সুতরাং এস্থলে রাশি দুইটির গুণফল $= (x-3)(3x^3 - 5x^2 - 11x - 3)$.

কিন্তু একটি রাশি $x^2 - 2x - 3$; সুতরাং নির্ণেয় রাশি

$$= \frac{(x-3)(3x^3 - 5x^2 - 11x - 3)}{x^2 - 2x - 3} = \frac{(3x^3 - 5x^2 - 11x - 3)}{(x^2 - 2x - 3)} \times (x - 3)$$

$= (3x+1)(x-3)$ [$3x^3 - 5x^2 - 11x - 3$ কে $x^2 - 2x - 3$ দ্বারা
$= 3x^2 - 8x - 3$ ভাগ করিলে ভাগফল হয় $3x + 1$]

উদা. 4. যদি x, y দুইটি রাশির গ. সা. গু. h এবং ল. সা. গু. l হয়, এবং যদি $h+l=x+y$ হয়, প্রমাণ কর যে $h^3+l^3=x^3+y^3$. (P. U. 1891)

যেহেতু দুইটি রাশির গুণফল উহাদের ল. সা. গু. ও গ. সা. গু.-র গুণফলের সমান, সুতরাং $xy = hl$.

এখন $h^3+l^3=(h+l)^3-3hl(h+l)$

$=(x+y)^3-3xy(x+y)$ [$\because$ $h+l=x+y$ এবং $hl=xy$]

$=x^3+y^3$

প্রশ্নমালা 27

ল. সা. গু. নির্ণয় কর ঃ

1. $x^3+2x^2-x-2,\ 2x^4-x^3-9x^2+4x+4$
2. $x^4+x^3+2x-4,\ x^3+3x^2-4$
3. $6x^3+11x^2+6x+1,\ 4x^3-7x-3$ (C. U. 1950)
4. $x^3+6x^2+11x+12,\ x^3-x^2-3x-9$
5. $3x^4+17x^3+27x^2+7x-6,\ 6x^4+7x^3-27x^2+17x-3$
6. $2x^4+13x^3-4x^2+6x+1,\ x^4+7x^3-2x^2-21x-3$
7. $3x^3-5x^2+5x-2,\ 2x^4-2x^3+3x^2-x+1$
8. $a^3+2a^2-a-2,\ a^3+a^2-4a-4$
9. $x^3-2x^2-19x+20,\ x^3+2x^2-23x-60,$ $x^4+7x^3-4x^2-52x+48$
10. $2x^4+x^3+x^2-7x+3,\ 3x^4+7x^3+9x^2-x-6,$ $6x^4-7x^3-4x^2+7x-2$
11. $4x^3-20x^2+17x-4,\ 2x^3-15x^2+31x-12,$ $4x^3-16x^2+13x-3$
12. দুইটি রাশির গ. সা. গু. $2x-1$ এবং ল. সা. গু. $6x^3+19x^2+x-6$; যদি একটি রাশি $6x^2+x-2$ হয়, তবে অপর রাশিটি কত ?
13. দুইটি রাশির গুণফল $12x^4+52x^3-41x^2-4x+5$ এবং ল. সা. গু. $6x^3+29x^2-6x-5$, উহাদের গ. সা. গু. কত ?

সপ্তম অধ্যায়

ভগ্নাংশ

1. সহজ ভগ্নাংশের বিষয় অষ্টম শ্রেণীর পাঠ্যাংশে আলোচিত হইয়াছে। এখানে সংক্ষেপে উহার পুনরালোচনা করা হইল।

2. ভগ্নাংশের লঘিষ্ঠ আকার। পূর্বে প্রমাণ করা হইয়াছে যে কোন ভগ্নাংশের লব ও হর উভয়কে একই রাশি দ্বারা গুণ বা ভাগ করিলে ভগ্নাংশটির মানের কোন পরিবর্তন হয় না। সুতরাং কোন ভগ্নাংশের লব ও হর উভয়কে উহাদের সাধারণ কোন গুণনীয়ক দ্বারা ভাগ করা হইলে ভগ্নাংশটির মানের কোন পরিবর্তন হইবে না—অথচ উহার আকার পূর্বাপেক্ষা লঘু হইবে। সুতরাং লব ও হর উভয়কে উহাদের সমস্ত সাধারণ গুণনীয়ক দ্বারা অর্থাৎ লব ও হরের গ. সা. গু. দ্বারা ভাগ করিলে ভগ্নাংশটি উহার লঘিষ্ঠ আকারে পরিণত হইবে।

লব ও হর উভয়কে মৌলিক উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিয়া এবং উহাদের সাধারণ উৎপাদকগুলি অপসারণ করিয়াও ভগ্নাংশকে লঘিষ্ঠ আকারে পরিবর্তিত করা যায়।

উদা. 1. $\dfrac{30a^4b+45a^3b^2+15a^2b^3}{100a^3b^2-25ab^4}$ কে লঘিষ্ঠ আকারে পরিণত কর।

$$\frac{30a^4b+45a^3b^2+15a^2b^3}{100a^3b^2-25ab^4}=\frac{15a^2b(2a^2+3ab+b^2)}{25ab^2(4a^2-b^2)}$$

$$=\frac{15a^2b(2a^2+2ab+ab+b^2)}{25ab^2\{(2a)^2-(b)^2\}}$$

$$=\frac{15a^2b\{2a(a+b)+b(a+b)\}}{25ab^2(2a+b)(2a-b)}$$

$$=\frac{3\times 5a^2b(a+b)(2a+b)}{5\times 5ab^2(2a+b)(2a-b)}$$

$$=\frac{3a(a+b)}{5b(2a-b)}.$$

উদা. 2. $\dfrac{6a(a^3+2a^2b+ab^2)(a^2+4ab+3b^2)}{12a^2(a+b)^3(a^2+5ab+6b^2)}$ কে লঘিষ্ঠ আকারে পরিণত কর।

প্রদত্ত রাশি $=\dfrac{6a.a(a^2+2ab+b^2)(a^2+ab+3ab+3b^2)}{12a^2(a+b)^3(a^2+2ab+3ab+6b^2)}$

$$=\frac{6a^2(a+b)^2\{a(a+b)+3b(a+b)\}}{12a^2(a+b)^3\{a(a+2b)+3b(a+2b)\}}$$

$$=\frac{6a^2(a+b)^2(a+b)(a+3b)}{12a^2(a+b)^3(a+2b)(a+3b)}$$

$$=\frac{6a^2(a+b)^3(a+3b)}{2\times 6a^2(a+b)^3(a+2b)(a+3b)}$$

$$=\frac{1}{2(a+2b)}.$$

উদা. 3. $\dfrac{8x^3+12x^2+6x+1}{8x^3+8x^2+2x}$ কে লঘিষ্ঠ আকারে পরিণত কর।

প্রদত্ত রাশি $=\dfrac{(2x)^3+3.(2x)^2.1+3.2x.(1)^2+(1)^3}{2x(4x^2+4x+1)}=\dfrac{(2x+1)^3}{2x(2x+1)^2}$

$$=\frac{2x+1}{2x}.$$

প্রশ্নমালা 28

লঘিষ্ঠ আকারে পরিণত কর :

1. $\dfrac{4x^4-4x^3+x^2}{8x^3-12x^2+6x-1}$

2. $\dfrac{x^6-1}{(x+1)(x^4+x^2+1)}$

3. $\dfrac{27x^4+125x}{x^2(15x^2+34x+15)}$

4. $\dfrac{6x^2-7x-3}{2x^2-x-3}$

5. $\dfrac{1-x-6x^2}{2+x-6x^2}$

6. $\dfrac{1+x+x^2+x^3}{1+2x^2+x^4}$

7. $\dfrac{27x^3-1}{12x^2-13x+3}$

8. $\dfrac{x^4+x^2+1}{x^3+1}$

9. $\dfrac{27-x^3}{x^2-15x+36}$

10. $\dfrac{27x^3+27x^2+9x+1}{81x^4-1}$

11. $\dfrac{a^2+b^2-c^2+2ab}{a^2-b^2-c^2+2bc}$

12. $\dfrac{4x^4-37x^2y^2+9y^4}{(2x+y)^2(2x-y)(x+3y)}$

৪. দুই বা তদধিক ভগ্নাংশকে লঘিষ্ঠ সাধারণ হর বিশিষ্ট ভগ্নাংশে পরিবর্তন।

দুই বা তদধিক ভগ্নাংশের যোগফল বা বিয়োগফল নির্ণয় করিতে হইলে পাটীগণিতের ন্যায় ভগ্নাংশগুলিকে সাধারণ হরবিশিষ্ট করিতে হয়। ভগ্নাংশগুলিকে লঘিষ্ঠ সাধারণ হরবিশিষ্ট করিতে হইলে, যে ভগ্নাংশকে লঘিষ্ঠ আকারে পরিণত করা সম্ভব, প্রথমতঃ উহাকে লঘিষ্ঠ আকারে পরিণত কর। অতঃপর হরগুলির ল. সা. গু. নির্ণয় করিয়া এই ল. সা. গু.-কে প্রত্যেক ভগ্নাংশের হর দ্বারা যথাক্রমে ভাগ কর। প্রাপ্ত ভাগফল দিয়া প্রত্যেক ভগ্নাংশের লব ও হরকে যথাক্রমে গুণ কর। এখন যে যে উত্তর হইবে উহারাই প্রদত্ত ভগ্নাংশসমূহের লঘিষ্ঠ সাধারণ হরবিশিষ্ট ভগ্নাংশ হইবে।

উদাহরণ। $\frac{x+y}{x-y}$, $\frac{(x-y)^2}{(x+y)^2}$ ও $\frac{3xy}{x^2-y^2}$ কে লঘিষ্ঠ সাধারণ হরবিশিষ্ট কর।

তৃতীয় ভগ্নাংশটির হরকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিলে হয় $(x+y)(x-y)$।

$x-y$, $(x+y)^2$ এবং x^2-y^2 এর ল. সা. গু. $=(x+y)^2(x-y)$।

$(x+y)^2(x-y)$ কে $(x-y)$ দ্বারা, $(x+y)^2$ দ্বারা এবং $(x+y)(x-y)$ দ্বারা ভাগ করিলে ভাগফল হয় যথাক্রমে $(x+y)^2$, $(x-y)$ এবং $(x+y)$.

$$\therefore \frac{x+y}{x-y}=\frac{(x+y)(x+y)^2}{(x-y)(x+y)^2}=\frac{(x+y)^3}{(x-y)(x+y)^2}$$

$$\frac{(x-y)^2}{(x+y)^2}=\frac{(x-y)^2(x-y)}{(x+y)^2(x-y)}=\frac{(x-y)^3}{(x-y)(x+y)^2}$$

$$\frac{3xy}{x^2-y^2}=\frac{3xy(x+y)}{(x+y)(x-y)(x+y)}=\frac{3xy(x+y)}{(x-y)(x+y)^2}$$

4. ভগ্নাংশের যোগ ও বিয়োগ।

দুই বা তদধিক ভগ্নাংশের যোগফল ও বিয়োগফল নির্ণয় করিতে হইলে ভগ্নাংশগুলিকে লঘিষ্ঠ সাধারণ হরবিশিষ্ট করিয়া, পরিবর্তিত এই ভগ্নাংশগুলির

(2) পূর্বেই দেখান হইয়াছে যে একটি রাশি হইতে অপর একটি রাশি বিয়োগ করিতে হইলে দ্বিতীয় রাশির চিহ্ন পরিবর্তন করিয়া প্রথম রাশির সহিত যোগ করিতে হয়।

উদা. 3. $\frac{2x+3y}{2x-3y}$ হইতে $-\frac{2x-3y}{2x+3y}$ বিয়োগ কর।

$$\left(\frac{2x+3y}{2x-3y}\right)-\left(-\frac{2x-3y}{2x+3y}\right)$$

$$=\frac{2x+3y}{2x-3y}+\frac{2x-3y}{2x+3y}$$

$$=\frac{(2x+3y)^2+(2x-3y)^2}{(2x-3y)(2x+3y)}$$

$$=\frac{2\{(2x)^2+(3y)^2\}}{(2x)^2-(3y)^2} \quad \left[\because (a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)\right]$$

$$=\frac{2(4x^2+9y^2)}{4x^2-9y^2}=\frac{8x^2+18y^2}{4x^2-9y^2}.$$

উদা. 4. সরল কর : $\frac{3a+4b}{3a-4b}-\frac{3a-4b}{3a+4b}+\frac{48ab}{16b^2-9a^2}$

প্রদত্ত রাশি $=\frac{3a+4b}{3a-4b}-\frac{3a-4b}{3a+4b}+\frac{48ab}{-(9a^2-16b^2)}$

$$=\frac{3a+4b}{3a-4b}-\frac{3a-4b}{3a+4b}-\frac{48ab}{9a^2-16b^2}$$

$$=\frac{3a+4b}{3a-4b}-\frac{3a-4b}{3a+4b}-\frac{48ab}{(3a+4b)(3a-4b)}$$

$$=\frac{(3a+4b)^2-(3a-4b)^2-48ab}{(3a-4b)(3a+4b)}$$

$$=\frac{4.3a.4b-48ab}{(3a-4b)(3a+4b)} \quad \left[\because (x+y)^2-(x-y)^2=4xy\right]$$

$$=\frac{48ab-48ab}{(3a-4b)(3a+4b)}=\frac{0}{(3a-4b)(3a+4b)}=0.$$

উদা. 5. সরল কর : $\frac{a-b}{(a+b)^2}+\frac{a+b}{(a-b)^2}-\frac{2a+b}{a^2-b^2}$

প্রদত্ত রাশি $=\frac{a-b}{(a+b)^2}+\frac{a+b}{(a-b)^2}-\frac{2a+b}{(a+b)(a-b)}$

$$=\frac{(a-b)^3+(a+b)^3-(2a+b)(a+b)(a-b)}{(a+b)^2(a-b)^2}$$

$$=\frac{(a^3-3a^2b+3ab^2-b^3)+(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)-(2a+b)(a^2-b^2)}{(a+b)^2(a-b)^2}$$

$$=\frac{2a^3+6ab^2-(2a^3+a^2b-2ab^2-b^3)}{(a+b)^2(a-b)^2}$$

$$=\frac{2a^3+6ab^2-2a^3-a^2b+2ab^2+b^3}{\{(a+b)(a-b)\}^2}=\frac{8ab^2-a^2b+b^3}{(a^2-b^2)^2}.$$

কখনও কখনও দেখা যায় ভগ্নাংশ সমূহের সমস্ত হরের ল. সা. গু. করিয়া সাধারণভাবে একই সঙ্গে প্রক্রিয়া করিতে বিশেষ সুবিধা হয় না ; কিন্তু ভগ্নাংশগুলিকে সুবিধাজনকভাবে সজ্জবদ্ধ করিয়া যোগ বিয়োগ করিলে সহজে উত্তর নির্ণয় করা যায়।

উদা. 6. সরল কর : $\frac{1}{a-2b}+\frac{1}{a+2b}+\frac{2a}{a^2+4b^2}+\frac{4a^3}{a^4+16b^4}$

$$\frac{1}{a-2b}+\frac{1}{a+2b}=\frac{a+2b+a-2b}{(a-2b)(a+2b)}=\frac{2a}{a^2-4b^2};$$

$$\frac{2a}{a^2-4b^2}+\frac{2a}{a^2+4b^2}=\frac{2a^3+8ab^2+2a^3-8ab^2}{(a^2-4b^2)(a^2+4b^2)}=\frac{4a^3}{a^4-16b^4}$$

$$\frac{4a^3}{a^4-16b^4}+\frac{4a^3}{a^4+16b^4}=\frac{4a^7+64a^3b^4+4a^7-64a^3b^4}{(a^4-16b^4)(a^4+16b^4)}$$

$$=\frac{8a^7}{a^8-256b^8}.$$

প্রদত্ত ভগ্নাংশসমূহের কোনটিকে লঘিষ্ঠ আকারে পরিণত করা সম্ভব হইলে যোগবিয়োগ প্রক্রিয়া আরম্ভ করিবার পূর্বে উহাকে লঘিষ্ঠ আকারে পরিণত করিয়া লইতে হয়।

উদা. 7. সরল কর :

$$\frac{ax-ay-bx+by}{x^2-y^2}+\frac{bx-cx}{x^2+xy}+\frac{cx-ax+cy-ay}{(x+y)^2}$$

প্রথম ভগ্নাংশ $=\frac{a(x-y)-b(x-y)}{(x+y)(x-y)}=\frac{(x-y)(a-b)}{(x+y)(x-y)}=\frac{a-b}{x+y}$

দ্বিতীয় ভগ্নাংশ $=\frac{x(b-c)}{x(x+y)}=\frac{b-c}{x+y}.$

তৃতীয় ভগ্নাংশ $=\frac{x(c-a)+y(c-a)}{(x+y)^2}=\frac{(c-a)(x+y)}{(x+y)^2}=\frac{c-a}{x+y}$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশিমালা $=\frac{a-b}{x+y}+\frac{b-c}{x+y}+\frac{c-a}{x+y}$

$$=\frac{a-b+b-c+c-a}{x+y}=\frac{0}{x+y}=0.$$

উদা. 8. সরল কর :

$$\frac{a^2}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}+\frac{b^2}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)}+\frac{c^2}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}$$

প্রদত্ত রাশিমালা

$$=\frac{a^2}{(a^2-b^2)\{-(c^2-a^2)\}}+\frac{b^2}{(b^2-c^2)\{-(a^2-b^2)\}}+\frac{c^2}{(c^2-a^2)\{-(b^2-c^2)\}}$$

$$=\frac{a^2}{-(a^2-b^2)(c^2-a^2)}+\frac{b^2}{-(b^2-c^2)(a^2-b^2)}+\frac{c^2}{-(c^2-a^2)(b^2-c^2)}$$

$$=\frac{a^2(b^2-c^2)+b^2(c^2-a^2)+c^2(a^2-b^2)}{-(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)}$$

$$=\frac{a^2b^2-c^2a^2+b^2c^2-a^2b^2+c^2a^2-b^2c^2}{-(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)}$$

$$=\frac{0}{-(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)}=0.$$

প্রশ্নমালা 29

লঘিষ্ঠ সাধারণ হরবিশিষ্ট ভগ্নাংশে পরিবর্তিত কর :

1. $\frac{bc}{a(b-c)}, \frac{ca}{b(c-a)}, \frac{ab}{c(a-b)}.$

2. $\frac{1}{x^2-2x-3}, \frac{2x}{x^2+x-12}, \frac{3x^2}{x^2+5x+4}.$

3. $\dfrac{a}{a+b}$ ও $\dfrac{b^2+ab}{(a+b)^2}$ যোগ কর।

4. $\dfrac{x+y}{2(x-y)}$ হইতে $\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$ বিয়োগ কর।

5. $\dfrac{1+x}{1+x+x^2}$ হইতে $-\dfrac{1}{1-x}$ বিয়োগ কর।

সরল কর :

6. $\dfrac{a}{a-b}+\dfrac{b}{b-a}$.

7. $\dfrac{a+b}{a-b}+\dfrac{a-b}{a+b}$.

8. $\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}$.

9. $\dfrac{1}{x^2-8x+15}+\dfrac{1}{x^2-4x+3}+\dfrac{1}{x^2-6x+5}$.

10. $\dfrac{1}{(x-2)(x-3)}+\dfrac{1}{(x-3)(x-1)}+\dfrac{1}{(x-1)(x-2)}$.

11. $\dfrac{1}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{1}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{1}{(c-a)(c-b)}$.

12. $\dfrac{x}{x-y}+\dfrac{y}{x+y}+\dfrac{2xy}{y^2-x^2}$.

13. $\dfrac{x+y}{y}-\dfrac{x}{x+y}-\dfrac{x^3-x^2y}{x^2y-y^3}$.

14. $\dfrac{x^2}{ab}+\dfrac{(x-a)^2}{a(a-b)}-\dfrac{(x-b)^2}{b(a-b)}$.

15. $\dfrac{a+b}{(c-a)(c-b)}+\dfrac{b+c}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{c+a}{(b-c)(b-a)}$.

16. $\dfrac{a-2x}{a+2x}-\dfrac{a+2x}{a-2x}+\dfrac{8ax}{a^2+4x^2}$.

17. $\dfrac{1}{a-b}+\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{2a}{a^2+b^2}+\dfrac{4a^3}{a^4+b^4}$.

18. $\dfrac{1}{4a^3(a+x)}+\dfrac{1}{4a^3(a-x)}+\dfrac{1}{2a^2(a^2+x^2)}$.

19. $\dfrac{1+a}{1-a}+\dfrac{a-1}{a+1}+\dfrac{4a}{1+a^2}+\dfrac{8a}{1-a^4}$.

20. $\dfrac{1}{x^2+2xy-3y^2}+\dfrac{1}{y^2+2xy-3x^2}-\dfrac{2}{3x^2+3y^2+10xy}$.

21. $\dfrac{a-1}{a-2}-\dfrac{a+1}{a+2}-\dfrac{4}{4-a^2}+\dfrac{2}{2-a}$.

22. $\dfrac{a^2-(b-c)^2}{(c+a)^2-b^2}+\dfrac{b^2-(c-a)^2}{(a+b)^2-c^2}+\dfrac{c^2-(a-b)^2}{(b+c)^2-a^2}$.

23. $\dfrac{(a-c)^2-b^2}{a^2-(b+c)^2}+\dfrac{(b-a)^2-c^2}{b^2-(c+a)^2}+\dfrac{(c-b)^2-a^2}{c^2-(a+b)^2}$.

24. $\dfrac{b^2+bc+c^2}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{c^2+ca+a^2}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{a^2+ab+b^2}{(c-a)(c-b)}$.

25. $\dfrac{b-c}{a^2-(b-c)^2}+\dfrac{c-a}{b^2-(c-a)^2}+\dfrac{a-b}{c^2-(a-b)^2}$.

26. $\dfrac{9x^2-(y-z)^2}{(3x+z)^2-y^2}+\dfrac{y^2-(z-3x)^2}{(3x+y)^2-z^2}+\dfrac{z^2-(3x-y)^2}{(y+z)^2-9x^2}$.

27. $\dfrac{a^2+ac}{a^2c-c^3}+\dfrac{c-a}{c(c+a)}+\dfrac{2c}{c^2-a^2}$.

28. $\dfrac{(2a-3b)^2-a^2}{4a^2-(3b+a)^2}+\dfrac{4a^2-(3b-a)^2}{9(a^2-b^2)}+\dfrac{9b^2-a^2}{(2a+3b)^2-a^2}$.

29. $\dfrac{1}{2(1-a)^2}+\dfrac{1}{2(1-a)}+\dfrac{1}{2(1+a)}+\dfrac{1}{2(1+a)^2}$

30. $\dfrac{ax}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{bx}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{cx}{(c-a)(c-b)}$

31. $\dfrac{1}{abx}+\dfrac{1}{a(a-b)(x-a)}+\dfrac{1}{b(b-a)(x-b)}$.

32. $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2x}{x^2+1}+\dfrac{4x^3}{x^4+1}+\dfrac{8x^7}{x^8+1}$.

33. $\dfrac{x^6}{x^2-1}-\dfrac{x^4}{x^2+1}-\dfrac{1}{x^2-1}+\dfrac{1}{x^2+1}$.

---

5. **ভগ্নাংশের গুণন।** দুই বা তদধিক ভগ্নাংশের গুণফল ভগ্নাংশগুলির লবগুলির গুণফলকে লব, এবং হরগুলির গুণফলকে হর রূপে প্রকাশ করিলে যে ভগ্নাংশ উৎপন্ন হয় উহার সমান। প্রয়োজন মত প্রদত্ত ভগ্নাশগুলিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিয়া উপরে নীচে কাটাকাটি করিয়া লঘিষ্ঠ আকারে উত্তর নির্ণয় করিতে হয়।

উদা. 1. সরল কর : $\dfrac{a^3-3a^2+3a-1}{a^2-1}\times\dfrac{3}{2a-2}\times\dfrac{a^2+a}{a-1}$.

প্রদত্ত রাশিমালা $=\dfrac{(a-1)^3}{(a+1)(a-1)}\times\dfrac{3}{2(a-1)}\times\dfrac{a(a+1)}{(a-1)}=\dfrac{3a}{2}$.

উদা. 2. সরল কর : $\left(\frac{x-y}{x+y}-\frac{x^3-y^3}{x^3+y^3}\right)\left(\frac{x+y}{x-y}+\frac{x^3+y^3}{x^3-y^3}\right)$

প্রদত্ত রাশি =

$$\frac{x-y}{x+y}\times\frac{x+y}{x-y}+\frac{(x-y)(x^3+y^3)}{(x+y)(x^3-y^3)}-\frac{(x^3-y^3)(x+y)}{(x^3+y^3)(x-y)}-\frac{x^3-y^3}{x^3+y^3}\times\frac{x^3+y^3}{x^3-y^3}$$

$$=1+\frac{(x-y)(x+y)(x^2-xy+y^2)}{(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)}-\frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)(x+y)}{(x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)}-1$$

$$=\frac{x^2-xy+y^2}{x^2+xy+y^2}-\frac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}$$

$$=\frac{(x^2-xy+y^2)^2-(x^2+xy+y^2)^2}{(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)}$$

$$=\frac{(x^2-xy+y^2+x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2-x^2-xy-y^2)}{x^4+x^2y^2+y^4}$$

$$=\frac{2(x^2+y^2)(-2xy)}{x^4+x^2y^2+y^4}=\frac{-4xy(x^2+y^2)}{x^4+x^2y^2+y^4}.$$

দ্বিতীয় প্রণালী : $\left(\frac{x-y}{x+y}-\frac{x^3-y^3}{x^3+y^3}\right)\left(\frac{x+y}{x-y}+\frac{x^3+y^3}{x^3-y^3}\right)$

$$=\frac{(x-y)(x^2-xy+y^2)-x^3+y^3}{x^3+y^3}\times\frac{(x+y)(x^2+xy+y^2)+x^3+y^3}{x^3-y^3}$$

$$=\frac{x^3-x^2y+xy^2-x^2y+xy^2-y^3-x^3+y^3}{x^3+y^3}$$

$$\times\frac{x^3+x^2y+xy^2+x^2y+xy^2+y^3+x^3+y^3}{x^3-y^3}.$$

$$=\frac{-2x^2y+2xy^2}{x^3+y^3}\times\frac{2(x^3+y^3)+2xy(x+y)}{x^3-y^3}$$

$$=\frac{-2xy(x-y)}{(x+y)(x^2-xy+y^2)}\times\frac{2(x+y)(x^2-xy+y^2+xy)}{(x-y)(x^2+xy+y^2)}$$

$$=\frac{-2xy(x-y)}{(x+y)(x^2-xy+y^2)}\times\frac{2(x+y)(x^2+y^2)}{(x-y)(x^2+xy+y^2)}.$$

$$=\frac{-4xy(x^2+y^2)}{(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)}=\frac{-4xy(x^2+y^2)}{x^4+x^2y^2+y^4}.$$

উদা. 3. $\dfrac{x^2-2x-8}{x^3-8}$, $\dfrac{x^4+4x^2+16}{x^2-7x+12}$ ও $\dfrac{x^2+9-6x}{x^2-2x+4}$ এর ধারাবাহিক গুণফল নির্ণয় কর।

$$\frac{x^2-2x-8}{x^3-8}\times\frac{x^4+4x^2+16}{x^2-7x+12}\times\frac{x^2+9-6x}{x^2-2x+4}$$

$$=\frac{x^2-4x+2x-8}{(x-2)(x^2+2x+4)}\times\frac{(x^2+4)^2-(2x)^2}{x^2-3x-4x+12}\times\frac{(x-3)^2}{x^2-2x+4}$$

$$=\frac{x(x-4)+2(x-4)}{(x-2)(x^2+2x+4)}\times\frac{(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)}{x(x-3)-4(x-3)}\times\frac{(x-3)^2}{x^2-2x+4}$$

$$=\frac{(x-4)(x+2)}{(x-2)(x^2+2x+4)}\times\frac{(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)}{(x-3)(x-4)}\times\frac{(x-3)^2}{x^2-2x+4}$$

$$=\frac{(x+2)(x-3)}{x-2}=\frac{x^2-x-6}{x-2}.$$

প্রশ্নমালা 30

সরল কর :

1. $2x\times5y^2\times\dfrac{ab}{x^2-y^2}\times\dfrac{(x-y)^2}{10ab}$

2. $\dfrac{3(x-y)}{xy}\times\dfrac{yz}{x(x^2-y^2)}$

3. $\dfrac{4ab}{a^2-4b^2}\times\dfrac{a-2b}{2b}$

4. $\dfrac{3x^2-6x}{x^2-4}\times\dfrac{6x+12}{27x^3}$

5. $\dfrac{a^3-b^3}{a^2+b^2}\times\dfrac{a^4-b^4}{(a-b)^2}$

6. $\dfrac{ab-ac}{bc-ab}\times\dfrac{ab-b^2}{bc-c^2}\times\dfrac{c^2-ca}{a^2-ab}$

7. $\dfrac{ab}{a-b}\times\dfrac{a^3-b^3}{a^3-a^2b+ab^2}\times\dfrac{a^3+b^3}{a^2b+ab^2+b^3}$

8. $\dfrac{x+y+z}{(x+z)^2-y^2}\times\dfrac{z^2-(x-y)^2}{xy-y^2-yz}$

9. $\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\times\left(a-\dfrac{1}{b}\right)\times\dfrac{b^2}{a^2b^2-1}$

10. $\dfrac{x^2+5x+6}{x^2+5x+4}\times\dfrac{x^2+6x+5}{x^2+6x+8}\times\dfrac{x^2+8x+16}{x^2+8x+15}$

11. $\dfrac{2x^2+3x-2}{2x^2+3x+1}\times\dfrac{2x^2+7x+3}{2x^2+x-1}\times\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+5x+6}$

12. $\dfrac{x^4-y^4}{x^2-2xy+y^2}\times\dfrac{x-y}{xy(x+y)}\times\dfrac{x^2}{x^2+y^2}$

13. $\dfrac{1-a^2}{1+b}\times\dfrac{1-b^2}{a+a^2}\times\left(1+\dfrac{a}{1-a}\right)$

14. $\dfrac{ab}{a^2+ab}\times\dfrac{a^3+b^3}{a(a^2+ab+b^2)}\times\dfrac{a^3-b^3}{b(a^2-ab+b^2)}$.

15. $\dfrac{a^2+b^2}{a^2-ab+b^2}\times\dfrac{a^3+b^3}{a^3-b^3}\times\dfrac{a^3b+a^2b^2+ab^3}{a^4-b^4}$.

16. $\left(\dfrac{a^2}{b}-\dfrac{b^2}{a}\right)\times\dfrac{a^2b^2}{a^2-b^2}\times\dfrac{a+b}{a^3-b^3}$.

17. $\dfrac{x^2-2x-8}{x^3+8}\times\dfrac{x^4+4x^2+16}{x^2-7x+12}\times\dfrac{x^2+9-6x}{x^2+2x+4}$.

18. $\left(\dfrac{a+b}{a-b}+\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\right)\times\left(\dfrac{a+b}{a-b}+\dfrac{a^3+b^3}{a^3-b^3}\right)$.

19. $\left\{\dfrac{x}{a}+\dfrac{2x^2}{a(b-x)}\right\}\times\left\{\dfrac{a}{x}-\dfrac{2ax}{x(b+x)}\right\}$.

20. $\left(\dfrac{x}{x-y}-\dfrac{y}{x+y}\right)\times\dfrac{x^3-y^3}{x^6+y^6}\times\dfrac{(x-y)^2(x+y)^2+x^2y^2}{x^4+x^2y^2+y^4}$.

---

6. **ভগ্নাংশের ভাগ।** একটি ভগ্নাংশকে অপর একটি ভগ্নাংশ দ্বারা ভাগ করিতে হইলে প্রথম ভগ্নাংশকে অর্থাৎ ভাজ্যকে দ্বিতীয় ভগ্নাংশের বা ভাজকের অন্যোন্যক বা বিপরীত (reciprocal) দ্বারা গুণ করিতে হয়। অতঃপর গুণের নিয়মে সরল করিয়া উত্তর নির্ণয় করিতে হয়।

দুই ভগ্নাংশের একটির লব ও হর যদি যথাক্রমে অপরটির হর ও লব হয়, তবে ভগ্নাংশ দুইটির একটিকে অপরটির **অন্যোন্যক** বা **বিপরীত** (reciprocal) বলে।

$\dfrac{x}{y}$ ও $\dfrac{y}{x}$ পরস্পর অন্যোন্যক বা বিপরীত, $\frac{2}{3}$ ও $\frac{3}{2}$ পরস্পর অন্যোন্যক বা বিপরীত।

$\dfrac{a}{b}$ কে $\dfrac{c}{d}$ দ্বারা ভাগ করিতে হইলে, ভাগফল হইবে $\dfrac{a}{b}\times\dfrac{d}{c}=\dfrac{ad}{bc}$.

উদা. 1. সরল কর : $\frac{3(b-c)}{bc} \div \frac{b^2-c^2}{ab}$.

$$\frac{3(b-c)}{bc} \div \frac{b^2-c^2}{ab} = \frac{3(b-c)}{bc} \times \frac{ab}{b^2-c^2}$$

$$= \frac{3(b-c)}{bc} \times \frac{ab}{(b+c)(b-c)} = \frac{3a}{c(b+c)}.$$

উদা. 2. সরল কর : $\frac{2x^2+3x-2}{2x^2+9x+9} \div \frac{6x^2-5x+1}{6x^2+7x-3}$

$$\frac{2x^2+3x-2}{2x^2+9x+9} \div \frac{6x^2-5x+1}{6x^2+7x-3} = \frac{2x^2+3x-2}{2x^2+9x+9} \times \frac{6x^2+7x-3}{6x^2-5x+1}$$

$$= \frac{2x^2+4x-x-2}{2x^2+3x+6x+9} \times \frac{6x^2+9x-2x-3}{6x^2-2x-3x+1}$$

$$= \frac{2x(x+2)-1(x+2)}{x(2x+3)+3(2x+3)} \times \frac{3x(2x+3)-1(2x+3)}{2x(3x-1)-1(3x-1)}$$

$$= \frac{(x+2)(2x-1)}{(2x+3)(x+3)} \times \frac{(2x+3)(3x-1)}{(3x-1)(2x-1)} = \frac{x+2}{x+3}.$$

উদা. 3. সরল কর : $\left(1-\frac{2xy}{x^2+y^2}\right) \div \left(\frac{x^3-y^3}{x-y} - 3xy\right)$

$$\left(1-\frac{2xy}{x^2+y^2}\right) \div \left(\frac{x^3-y^3}{x-y} - 3xy\right)$$

$$= \frac{x^2+y^2-2xy}{x^2+y^2} \div \frac{x^3-y^3-3xy(x-y)}{x-y}$$

$$= \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2} \div \frac{(x-y)^3}{x-y} = \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2} \times \frac{x-y}{(x-y)^3} = \frac{1}{x^2+y^2}.$$

প্রশ্নমালা 31

সরল কর :

1. $\frac{a^2-1}{a^2+1} \div \frac{a^4-1}{a^4+2a^2+1}$

2. $\frac{x^2-y^2}{a^2-b^2} \div \frac{(x-y)^2}{(a-b)^2} \times \frac{(a+b)(x-y)}{(x+y)(a-b)}$

3. $\frac{4a^2-9ab-9b^2}{4a^2+19ab+12b^2} \div \frac{a^2+ab-2b^2}{a^2+6ab+8b^2}$

4. $\dfrac{a^2+6ax+5x^2}{a^2-ax-12x^2} \div \dfrac{a^2+7ax+10x^2}{a^2+5ax+6x^2}$

5. $\dfrac{(a+b+c)^2}{a^2-(b+c)^2} \div \dfrac{(c+a)^2-b^2}{(a-b)^2-c^2}$

6. $\dfrac{8x^3-27y^3}{x^3+3x^2y+3xy^2+y^3} \div \dfrac{4x^2-9y^2}{x^2+2xy+y^2}$

7. $\dfrac{x^2-1}{x^2+x-2} \times \dfrac{x^3+8}{x^4+4x^2+16} \div \dfrac{x^2+x}{x^2+2x+4}$

8. $\dfrac{a(a+b)}{b(a-b)} \times \left(1-\dfrac{b}{a}\right) \div \left(1+\dfrac{a}{b}\right)$

9. $\left\{\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2 - 2\left(1+\dfrac{1}{a^2}\right)\right\} \div \left(a-\dfrac{1}{a}\right)^2$

10. $\left(y-\dfrac{a^2-xy}{y-x}\right) \div \left(x+\dfrac{a^2-xy}{y-x}\right) \div \dfrac{a^2-y^2}{x^2-a^2}$

11. $\dfrac{a+b}{(a-b)^3} \div \dfrac{a^3+b^3}{a^3-b^3} \div \dfrac{(a+b)^2-ab}{(a-b)^2+ab}$

12. $\left\{\dfrac{a}{(a+b)^2} - \dfrac{b}{a^2-b^2} + \dfrac{b}{(a+b)(a-b)}\right\} \div \dfrac{a-b}{a+b}$

13. $\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b+c}\right) \div \left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b+c}\right) \times \left(1+\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$

14. $\left(\dfrac{x+y}{x-y}-\dfrac{x-y}{x+y}\right) \div \left\{1 \div \left(\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}\right) - 1 \div \left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)\right\}$

15. $\left\{\left(\dfrac{a}{a-b}-\dfrac{a}{a+b}\right) \div \left(\dfrac{b}{a-b}-\dfrac{b}{a+b}\right)\right\}$

$$\div \left\{\left(\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{b-a}{a+b}\right) \div \left(\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}\right)\right\}$$

---

7. কঠিনতর ভগ্নাংশ ও ভগ্নাংশ ঘটিত অভেদের সমাধান করিতে হইলে চতুর্থ অধ্যায়ে প্রদত্ত সূত্রাবলী ব্যতীত আরও কয়েকটি সূত্রের অনুশীলনের প্রয়োজন আছে। এই সূত্রগুলি নিম্নে প্রদত্ত হইল।

8. সূত্র ঃ $(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)$.

$$\begin{aligned}(a+b+c)^3 &= \{(a+b)+c\}^3\\ &= (a+b)^3+c^3+3(a+b)c\{(a+b)+c\}\\ &= a^3+b^3+3ab(a+b)+c^3+3c(a+b)(a+b+c)\\ &= a^3+b^3+c^3+3(a+b)\{ab+c(a+b+c)\}\\ &= a^3+b^3+c^3+3(a+b)(ab+ca+bc+c^2)\\ &= a^3+b^3+c^3+3(a+b)\{a(b+c)+c(b+c)\}\\ &= a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)\end{aligned}$$

অনুসিদ্ধান্ত।

(i) $(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = 3(a+b)(b+c)(c+a)$

(ii) $a^3+b^3+c^3 = (a+b+c)^3 - 3(a+b)(b+c)(c+a)$

9. সূত্র ঃ $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$$= \tfrac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$$

$$\begin{aligned}&a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\\ &= \tfrac{1}{2}\times 2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\\ &= \tfrac{1}{2}\times(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)\\ &= \tfrac{1}{2}\{(a^2+b^2-2ab)+(b^2+c^2-2bc)+(c^2+a^2-2ca)\}\\ &= \tfrac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}\end{aligned}$$

সূত্রের প্রয়োগ।

উদাহরণ। $a=337$, $b=330$ এবং $c=335$ হইলে, $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$-এর মান নির্ণয় কর।

$$\begin{aligned}\text{প্রদত্ত রাশি} &= \tfrac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}\\ &= \tfrac{1}{2}\{(337-330)^2+(330-335)^2+(335-337)^2\}\\ &= \tfrac{1}{2}\{(7)^2+(-5)^2+(-2)^2\} = \tfrac{1}{2}(49+25+4) = \tfrac{1}{2}\times 78 = 39.\end{aligned}$$

10. সূত্র : $a^3+b^3+c^3-3abc$
$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

$a^3+b^3+c^3-3abc$
$=(a+b)^3-3ab(a+b)+c^3-3abc$
$=(a+b)^3+(c)^3-3ab(a+b)-3abc$
$=\{(a+b)+c\}\{(a+b)^2-(a+b)c+(c)^2\}-3ab(a+b+c)$
$=(a+b+c)\{(a+b)^2-(a+b)c+(c)^2-3ab\}$
$=(a+b+c)(a^2+2ab+b^2-ca-bc+c^2-3ab)$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

অনুসিদ্ধান্ত। $a^3+b^3+c^3-3abc$
$$=\tfrac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$$

যেহেতু $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$
সুতরাং $a^3+b^3+c^3-3abc$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$
$=(a+b+c).\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$
$=\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

সূত্রের প্রয়োগ।

উদা. 1. $x^3-8y^3+27z^3+18xyz$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

$x^3-8y^3+27z^3+18xyz$
$=(x)^3+(-2y)^3+(3z)^3-3.(x)(-2y)(3z)$
$=\{(x+(-2y)+3z\}\{(x)^2+(-2y)^2+(3z)^2-(x)(-2y)-(-2y)(3z)-(3z)(x)\}$
$=(x-2y+3z)(x^2+4y^2+9z^2+2xy+6yz-3zx)$

উদা. 2. যদি $x=3331$, $y=3333$ এবং $z=3336$ হয়
$x^3+y^3+z^3-3xyz$-এর মান নির্ণয় কর।

$x=3331$ তাহা হইলে, $x+y+z=10000$,
$y=3333$ $\quad x-y=-2,\quad y-z=-3,\quad z-x=5$
$z=3336$

$\therefore\ x^3+y^3+z^3-3xyz$

$=\frac{1}{2}(x+y+z)\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}$

$=\frac{1}{2}\times 10000\times\{(-2)^2+(-3)^2+(5)^2\}$

$=\frac{1}{2}\times 10000\times(4+9+25)$

$=10000\times\frac{1}{2}\times 38=190000.$

উদা. 3. যদি $a+b+c=0$ হয়, প্রমাণ কর যে $a^3+b^3+c^3=3abc.$

$$\begin{aligned}a^3+b^3+c^3&=a^3+b^3+c^3-3abc+3abc\\&=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc\\&=0\times(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc\\&=3abc.\end{aligned}$$

দ্বিতীয় প্রণালী।

$\because\ a+b+c=0,\ \therefore\ a+b=-c$

$$\begin{aligned}\therefore\ a^3+b^3+c^3&=(a+b)^3-3ab(a+b)+c^3\\&=(-c)^3-3ab(-c)+c^3\qquad[\because\ a+b=-c]\\&=-c^3+3abc+c^3\\&=3abc\end{aligned}$$

দ্রষ্টব্য। $a+b+c=0$ হইলে, $a^3+b^3+c^3=3abc$ এই সাপেক্ষ অভেদ (Conditional Identity)টি এত প্রয়োজনীয় যে ইহাকে একটি সূত্ররূপে প্রয়োগ করা চলে।

11. সূত্র : (i) $(b-c)+(c-a)+(a-b)=0$

(ii) $a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)=0$

(i) $(b-c)+(c-a)+(a-b)=b-c+c-a+a-b=0$

(ii) $a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)=ab-ca+bc-ab+ca-bc=0$

সূত্রের প্রয়োগ।

উদাহরণ। সরল কর : $x^2(b-c)+x^2(c-a)+x^2(a-b)$

প্রদত্ত রাশি $=x^2\{(b-c)+(c-a)+(a-b)\}=x^2.0=0$

12. কতিপয় বিশেষ ধরনের ভগ্নাংশের সরলীকরণ।

উদা. 1. সরল কর :

$$1+\frac{a}{b}-\frac{b}{a+b}-\frac{a^2}{ab-b^2}+\frac{2a^2}{a^2-b^2}$$ [C. U. 1871]

$$1+\frac{a}{b}=\frac{a+b}{b}$$

$$\frac{a+b}{b}-\frac{b}{a+b}=\frac{a^2+b^2+2ab-b^2}{ab+b^2}=\frac{a^2+2ab}{ab+b^2}$$

$$\frac{a^2+2ab}{ab+b^2}-\frac{a^2}{ab-b^2}=\frac{a^3b-a^2b^2+2a^2b^2-2ab^3-a^3b-a^2b^2}{a^2b^2-b^4}$$

$$=\frac{-2ab^3}{a^2b^2-b^4}=\frac{-2ab^3}{b^2(a^2-b^2)}=\frac{-2ab}{a^2-b^2}$$

$$\frac{-2ab}{a^2-b^2}+\frac{2a^2}{a^2-b^2}=\frac{2a^2-2ab}{a^2-b^2}=\frac{2a(a-b)}{(a+b)(a-b)}=\frac{2a}{a+b}$$

উদা. 2. সরল কর :

$$\frac{3}{x+y}-\frac{1}{x+3y}+\frac{1}{x-3y}-\frac{3}{x-y}$$

এস্থলে সুবিধামত দুই দুইটি পদ জোড়া করিয়া সাজাইয়া লও।

$$\text{প্রদত্ত রাশি}=\left\{\frac{3}{x+y}-\frac{3}{x-y}\right\}+\left\{\frac{1}{x-3y}-\frac{1}{x+3y}\right\}$$

$$=\frac{3x-3y-3x-3y}{x^2-y^2}+\frac{x+3y-x+3y}{x^2-9y^2}$$

$$=\frac{-6y}{x^2-y^2}+\frac{6y}{x^2-9y^2}=-6y\left\{\frac{1}{x^2-y^2}-\frac{1}{x^2-9y^2}\right\}$$

$$=\frac{-6y\{x^2-9y^2-x^2+y^2\}}{(x^2-y^2)(x^2-9y^2)}=\frac{48y^3}{(x^2-y^2)(x^2-9y^2)}$$

উদা. 3. সরল কর :

$$\frac{1}{(x+y)(x+2y)}+\frac{1}{(x+2y)(x+3y)}+\frac{1}{(x+3y)(x+4y)}$$

$$\frac{1}{x+y}-\frac{1}{x+2y}=\frac{x+2y-x-y}{(x+y)(x+2y)}=\frac{y}{(x+y)(x+2y)}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{(x+y)(x+2y)} = \frac{1}{y}\left\{\frac{1}{x+y} - \frac{1}{x+2y}\right\}$$

তদ্রূপ, $$\frac{1}{(x+2y)(x+3y)} = \frac{1}{y}\left\{\frac{1}{x+2y} - \frac{1}{x+3y}\right\}$$

এবং $$\frac{1}{(x+3y)(x+4y)} = \frac{1}{y}\left\{\frac{1}{x+3y} - \frac{1}{x+4y}\right\}$$

∴ প্রদত্ত রাশি $$= \frac{1}{y}\left\{\frac{1}{x+y} - \frac{1}{x+2y} + \frac{1}{x+2y} - \frac{1}{x+3y} + \frac{1}{x+3y} - \frac{1}{x+4y}\right\}$$

$$= \frac{1}{y}\left\{\frac{1}{x+y} - \frac{1}{x+4y}\right\} = \frac{1}{y}\left\{\frac{x+4y-x-y}{(x+y)(x+4y)}\right\}$$

$$= \frac{1}{y}\left\{\frac{3y}{(x+y)(x+4y)}\right\} = \frac{3}{(x+y)(x+4y)}$$

উদা. 4. সরল কর : $\dfrac{x-y}{(a+x)(a+y)} + \dfrac{y-z}{(a+y)(a+z)} + \dfrac{z-x}{(a+z)(a+x)}$

$$\frac{x-y}{(a+x)(a+y)} = \frac{1}{a+y} - \frac{1}{a+x},$$

$$\frac{y-z}{(a+y)(a+z)} = \frac{1}{a+z} - \frac{1}{a+y},$$

এবং $$\frac{z-x}{(a+z)(a+x)} = \frac{1}{a+x} - \frac{1}{a+z}.$$

$$\therefore \quad \frac{x-y}{(a+x)(a+y)} + \frac{y-z}{(a+y)(a+z)} + \frac{z-x}{(a+z)(a+x)} = 0$$

(স্তম্ভক্রমে যোগ করিয়া)

উদা. 5. সরল কর :

$$\frac{a+b}{2ab}\left(a^3+b^3-c^3\right) + \frac{b+c}{2bc}\left(b^3+c^3-a^3\right) + \frac{c+a}{2ca}\left(c^3+a^3-b^3\right)$$

$$\frac{a+b}{2ab} = \frac{a}{2ab} + \frac{b}{2ab} = \frac{1}{2b} + \frac{1}{2a}$$

তদ্রূপ, $$\frac{b+c}{2bc} = \frac{1}{2c} + \frac{1}{2b}$$ এবং $$\frac{c+a}{2ca} = \frac{1}{2a} + \frac{1}{2c}$$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $=\left(\frac{1}{2b}+\frac{1}{2a}\right)\left(a^3+b^3-c^3\right)+\left(\frac{1}{2c}+\frac{1}{2b}\right)\left(b^3+c^3-a^3\right)$
$+\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{2c}\right)\left(c^3+a^3-b^3\right)$

$=\frac{1}{2b}\left(a^3+b^3-c^3\right)+\frac{1}{2a}\left(a^3+b^3-c^3\right)+\frac{1}{2c}\left(b^3+c^3-a^3\right)$
$+\frac{1}{2b}\left(b^3+c^3-a^3\right)+\frac{1}{2a}\left(c^3+a^3-b^3\right)+\frac{1}{2c}\left(c^3+a^3-b^3\right)$

$=\frac{1}{2a}\left(a^3+b^3-c^3+c^3+a^3-b^3\right)+\frac{1}{2b}\left(a^3+b^3-c^3+b^3+c^3-a^3\right)$
$+\frac{1}{2c}\left(b^3+c^3-a^3+c^3+a^3-b^3\right)$

$=\frac{1}{2a}.2a^3+\frac{1}{2b}.2b^3+\frac{1}{2c}.2c^3=a^2+b^2+c^2.$

উদা. 6. সরল কর : $\left(\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}\right)\div\left(\frac{1}{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}-\frac{1}{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}}\right)$

প্রদত্ত রাশি $=\frac{(x+y)^2-(x-y)^2}{x^2-y^2}\div\left(\frac{1}{\frac{x^2-y^2}{xy}}-\frac{1}{\frac{x^2+y^2}{xy}}\right)$

$=\frac{4xy}{x^2-y^2}\div\left(\frac{xy}{x^2-y^2}-\frac{xy}{x^2+y^2}\right)$

$=\frac{4xy}{x^2-y^2}\div\frac{xy(x^2+y^2-x^2+y^2)}{(x^2-y^2)(x^2+y^2)}$

$=\frac{4xy}{x^2-y^2}\div\frac{2xy^3}{(x^2-y^2)(x^2+y^2)}$

$=\frac{4xy}{x^2-y^2}\times\frac{(x^2-y^2)(x^2+y^2)}{2xy^3}$

$=\frac{2(x^2+y^2)}{y^2}$

উদা. 7. সরল কর : $\dfrac{\dfrac{a^2}{x-a}+\dfrac{b^2}{x-b}+\dfrac{c^2}{x-c}+a+b+c}{\dfrac{a}{x-a}+\dfrac{b}{x-b}+\dfrac{c}{x-c}}$ (C. U. 1925)

প্রদত্ত ভগ্নাংশের লব $=\left(\dfrac{a^2}{x-a}+a\right)+\left(\dfrac{b^2}{x-b}+b\right)+\left(\dfrac{c^2}{x-c}+c\right)$

$$=\frac{a^2+ax-a^2}{x-a}+\frac{b^2+bx-b^2}{x-b}+\frac{c^2+cx-c^2}{x-c}$$

$$=\frac{ax}{x-a}+\frac{bx}{x-b}+\frac{cx}{x-c}=x\left(\frac{a}{x-a}+\frac{b}{x-b}+\frac{c}{x-c}\right).$$

$\therefore$ প্রদত্ত ভগ্নাংশ $=\dfrac{x\left(\dfrac{a}{x-a}+\dfrac{b}{x-b}+\dfrac{c}{x-c}\right)}{\dfrac{a}{x-a}+\dfrac{b}{x-b}+\dfrac{c}{x-c}}=x.$

উদা. 8. সরল কর : $\dfrac{1}{x-\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x-\dfrac{1}{x}}}}$ (C. U. 1949)

$$\frac{1}{x-\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x-\dfrac{1}{x}}}}=\frac{1}{x-\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{\dfrac{x^2-1}{x}}}}=\frac{1}{x-\dfrac{1}{x+\dfrac{x}{x^2-1}}}$$

$$=\frac{1}{x-\dfrac{1}{\dfrac{x^3-x+x}{x^2-1}}}=\frac{1}{x-\dfrac{x^2-1}{x^3}}=\frac{1}{\dfrac{x^4-x^2+1}{x^3}}=\frac{x^3}{x^4-x^2+1}.$$

13. চক্র-ক্রমে বিন্যস্ত ভগ্নাংশ। চক্র-ক্রমে বিন্যস্ত ভগ্নাংশের সরলীকরণের প্রক্রিয়া উদাহরণ দ্বারা বুঝান যাইতেছে।

উদা. 9. সরল কর : $\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-c)(b-a)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}$

প্রদত্ত রাশি $=\frac{1}{-(a-b)(c-a)}+\frac{1}{-(b-c)(a-b)}+\frac{1}{-(c-a)(b-c)}$

$=\frac{b-c+c-a+a-b}{-(a-b)(b-c)(c-a)}=\frac{0}{-(a-b)(b-c)(c-a)}=0$

উদা. 10. সরল কর : $\frac{a}{(a-b)(a-c)}+\frac{b}{(b-c)(b-a)}+\frac{c}{(c-a)(c-b)}$

প্রদত্ত রাশি $=\frac{a}{-(a-b)(c-a)}+\frac{b}{-(b-c)(a-b)}+\frac{c}{-(c-a)(b-c)}$

$=\frac{a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)}{-(a-b)(b-c)(c-a)}=\frac{0}{-(a-b)(b-c)(c-a)}=0.$

প্রশ্নমালা 32

1. $\frac{2+a}{1+a+a^2}+\frac{2-a}{1-a+a^2}+\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1-a}$
2. $\frac{1}{(x+1)^2(x+2)^2}-\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{2}{x+1}-\frac{2}{x+2}$ (A. U. 1942)
3. $\frac{y}{x-y}-\frac{xy}{x^2-y^2}-\frac{x^2y^2}{x^4-y^4}-\frac{x^4y^4}{x^8-y^8}$
4. $\frac{1}{x+a}+\frac{a}{x^2-a^2}+\frac{x}{x^2+a^2}+\frac{2x^3}{x^4+a^4}$
5. $\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x^2+1}+\frac{4}{x^4+1}+\frac{8}{x^8-1}$
6. $\frac{a}{a-b}+\frac{a}{a+b}+\frac{2a^2}{a^2+b^2}+\frac{4a^2b^2}{a^4-b^4}$
7. $\frac{1}{x+y}+\frac{2y}{x^2+y^2}+\frac{4y^3}{x^4+y^4}+\frac{8y^7}{x^8-y^8}$
8. $\frac{b+c}{2bc}(b+c-a)+\frac{c+a}{2ca}(c+a-b)+\frac{a+b}{2ab}(a+b-c)$
9. $\frac{b+c}{bc}(b^2+c^2-a^2)+\frac{c+a}{ca}(c^2+a^2-b^2)+\frac{a+b}{ab}(a^2+b^2-c^2)$
10. $\frac{8(a+b+c)^3-(b+c)^3-(c+a)^3-(a+b)^3}{3(2a+b+c)(a+2b+c)(a+b+2c)}$ (M. U. 1881)

11. $\dfrac{2b}{a-b} - \left\{\dfrac{1-\dfrac{a}{b}+\dfrac{a^2}{b^2}}{1+\dfrac{a}{b}+\dfrac{a^2}{b^2}} \times \dfrac{b^3-a^3}{b^3+a^3}\right\} + \dfrac{2b}{a+b}$

12. $\dfrac{\dfrac{a}{a-b}-\dfrac{a}{a+b}}{\dfrac{b}{a-b}-\dfrac{b}{a+b}} \div \dfrac{\dfrac{a+b}{a-b}+\dfrac{a-b}{a+b}}{\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}} \times \dfrac{a^2}{a^2+b^2}$ (C. U. 1876)

13. $\dfrac{\dfrac{a}{a-b}+\dfrac{b}{b-c}+\dfrac{c}{c-a}}{3+\dfrac{a+b}{a-b}+\dfrac{b+c}{b-c}+\dfrac{c+a}{c-a}}$ 14. $\dfrac{\dfrac{a}{a-x}+\dfrac{b}{b-x}+\dfrac{c}{c-x}}{\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x-a}-\dfrac{1}{x-b}-\dfrac{1}{x-c}}$

15. $\dfrac{\dfrac{a}{x+y}+\dfrac{b}{y+z}+\dfrac{c}{z+x}}{\dfrac{a-x^2+y^2}{x+y}+\dfrac{b-y^2+z^2}{y+z}+\dfrac{c-z^2+x^2}{z+x}}$

16. $\dfrac{\dfrac{1+x}{1-x}+\dfrac{4x}{1+x^2}+\dfrac{8x}{1-x^2}-\dfrac{1-x}{1+x}}{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}+\dfrac{4x^2}{1+x^4}-\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}$ (C. U. 1870)

17. $\dfrac{x}{x+\dfrac{x}{x+\dfrac{x}{x-1}}}$ 18. $\dfrac{1}{a+\dfrac{1}{1+\dfrac{x+1}{2-x}}}$

19. $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{a\div x}}+\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{a\div x}}+\dfrac{2}{1+\dfrac{1}{a^2\div x^2}}$ (C. U. 1870)

20. $\dfrac{b+c-k}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{c+a-k}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{a+b-k}{(c-a)(c-b)}$

21. $\dfrac{b^2+bc+c^2}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{c^2+ca+a^2}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{a^2+ab+b^2}{(c-a)(c-b)}$ (C. U. 1940)

22. $\dfrac{a+x}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b+x}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c+x}{(c-a)(c-b)}$

ভগ্নাংশ ঘটিত অভেদ

14. কয়েকটি বিশিষ্ট নিয়মের উদাহরণ দ্বারা ভগ্নাংশ ঘটিত অভেদমূলক প্রশ্নের সমাধান প্রক্রিয়া প্রদর্শিত হইতেছে।

উদা. 1. প্রমাণ কর :

$$\frac{a}{ax+x^2}+\frac{b}{bx+x^2}+\frac{c}{cx+x^2}=\frac{3}{x}-\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x+b}-\frac{1}{x+c}$$

বাম পক্ষের প্রত্যেক পদ হইতে $\frac{1}{x}$ বিয়োগ করিয়া,

$$\left\{\frac{a}{ax+x^2}-\frac{1}{x}\right\}+\left\{\frac{b}{bx+x^2}-\frac{1}{x}\right\}+\left\{\frac{c}{cx+x^2}-\frac{1}{x}\right\}$$

$$=\frac{a-a-x}{x(a+x)}+\frac{b-b-x}{x(b+x)}+\frac{c-c-x}{x(c+x)}$$

$$=\frac{-x}{x(a+x)}+\frac{-x}{x(b+x)}+\frac{-x}{x(c+x)}=-\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x+b}-\frac{1}{x+c}$$

$\therefore$ বাম পক্ষ $=\frac{3}{x}-\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x+b}-\frac{1}{x+c}$

উদা. 2. যদি $a+b+c=0$ হয়,

প্রমাণ কর : $\frac{1}{b^2+c^2-a^2}+\frac{1}{c^2+a^2-b^2}+\frac{1}{a^2+b^2-c^2}=0.$

$\because$ $a+b+c=0,$

$\therefore$ $a+b=-c.$ $\therefore$ $(a+b)^2=c^2$

বা, $a^2+b^2+2ab=c^2$ বা, $a^2+b^2-c^2=-2ab.$

তদ্রূপ, $b^2+c^2-a^2=-2bc$ এবং $c^2+a^2-b^2=-2ca.$

$$\therefore \frac{1}{b^2+c^2-a^2}+\frac{1}{c^2+a^2-b^2}+\frac{1}{a^2+b^2-c^2}$$

$$=\frac{1}{-2bc}+\frac{1}{-2ca}+\frac{1}{-2ab}=\frac{a+b+c}{-2abc}=\frac{0}{-2abc}=0.$$

উদা. 3. যদি $bc+ca+ab=0$ হয়,

প্রমাণ কর : $\frac{1}{a^2-bc}+\frac{1}{b^2-ca}+\frac{1}{c^2-ab}=0.$

$\because \quad bc+ca+ab=0$

$\therefore \quad ca+ab=-bc, \quad ab+bc=-ca, \quad bc+ca=-ab.$

$$\therefore \quad \frac{1}{a^2-bc}+\frac{1}{b^2-ca}+\frac{1}{c^2-ab}$$

$$=\frac{1}{a^2+ca+ab}+\frac{1}{b^2+ab+bc}+\frac{1}{c^2+bc+ca}$$

$$=\frac{1}{a(a+b+c)}+\frac{1}{b(a+b+c)}+\frac{1}{c(a+b+c)}$$

$$=\frac{bc+ca+ab}{abc(a+b+c)}=\frac{0}{abc(a+b+c)}=0.$$

উদা. 4. যদি $a+b+c=0$ হয়,

প্রমাণ কর : $\frac{2a^2}{b^2+c^2-a^2}+\frac{2b^2}{c^2+a^2-b^2}+\frac{2c^2}{a^2+b^2-c^2}=-3.$

$\because \quad a+b+c=0 \quad \therefore \quad a+b=-c$

$\therefore \quad a^2+b^2+2ab=c^2$ বা, $a^2+b^2-c^2=-2ab.$

তদ্রূপ, $b^2+c^2-a^2=-2bc, \quad c^2+a^2-b^2=-2ca$

$$\therefore \quad \frac{2a^2}{b^2+c^2-a^2}+\frac{2b^2}{c^2+a^2-b^2}+\frac{2c^2}{a^2+b^2-c^2}$$

$$=\frac{2a^2}{-2bc}+\frac{2b^2}{-2ca}+\frac{2c^2}{-2ab}=\frac{2a^3+2b^3+2c^3}{-2abc}$$

$$=\frac{2(a^3+b^3+c^3)}{-2abc}=\frac{2.3abc}{-2abc}=-3$$

[$\because \quad a+b+c=0$ হইলে, $a^3+b^3+c^3=3abc$]

উদা. 5. যদি $a+b+c=0$ হয়,

প্রমাণ কর : $\frac{1}{2a^2+bc}+\frac{1}{2b^2+ca}+\frac{1}{2c^2+ab}=0.$

$$2a^2+bc=a^2+a^2+bc=a^2+a.a+bc$$

$$=a^2+a(-b-c)+bc \quad [\because \; a+b+c=0 \quad \therefore \; a=-b-c]$$

$$=a^2-ab-ac+bc=a(a-b)-c(a-b)=(a-b)(a-c)$$

তদ্রূপ, $2b^2+ca=(b-c)(b-a)$ এবং $2c^2+ab=(c-a)(c-b)$

$$\therefore \text{ বামপক্ষ}=\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-c)(b-a)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}$$

$$=\frac{1}{-(a-b)(c-a)}+\frac{1}{-(b-c)(a-b)}+\frac{1}{-(c-a)(b-c)}$$

$$=\frac{b-c+c-a+a-b}{-(a-b)(b-c)(c-a)}=\frac{0}{-(a-b)(b-c)(c-a)}=0.$$

উদা. 6. যদি $2s=a+b+c$ হয়,

প্রমাণ কর : $\dfrac{1}{s-a}+\dfrac{1}{s-b}+\dfrac{1}{s-c}-\dfrac{1}{s}=\dfrac{abc}{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$$\text{বামপক্ষ}=\frac{s-b+s-a}{(s-a)(s-b)}+\frac{s-s+c}{(s-c)s}$$

$$=\frac{2s-a-b}{(s-a)(s-b)}+\frac{c}{s(s-c)}=\frac{c}{(s-a)(s-b)}+\frac{c}{s(s-c)}$$

$$=c.\left\{\frac{1}{(s-a)(s-b)}+\frac{1}{s(s-c)}\right\}=c.\left\{\frac{s^2-cs+s^2-as-bs+ab}{s(s-a)(s-b)(s-c)}\right\}$$

$$=c.\left\{\frac{2s^2-s(a+b+c)+ab}{s(s-a)(s-b)(s-c)}\right\}=c.\left\{\frac{2s^2-s.2s+ab}{s(s-a)(s-b)(s-c)}\right\}$$

$$=\frac{abc}{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

উদা. 7. যদি $x^2=y+z,\quad y^2=z+x,\quad z^2=x+y$ হয়,

প্রমাণ কর : $\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1+y}+\dfrac{1}{1+z}=1$

$$\text{বামপক্ষ}=\frac{1.x}{(1+x)x}+\frac{1.y}{(1+y)y}+\frac{1.z}{(1+z)z}=\frac{x}{x+x^2}+\frac{y}{y+y^2}+\frac{z}{z+z^2}$$

$$=\frac{x}{x+y+z}+\frac{y}{y+z+x}+\frac{z}{z+x+y}=\frac{x+y+z}{x+y+z}=1$$

উদা. 8. যদি $x+y+z=xyz$ হয়,

প্রমাণ কর : $\dfrac{1+x^2}{(x+y)(x+z)}+\dfrac{1+y^2}{(y+z)(y+x)}+\dfrac{1+z^2}{(z+x)(z+y)}=1$

$$\text{বামপক্ষ}=\frac{1+x^2}{x^2+zx+xy+yz}+\frac{1+y^2}{y^2+xy+yz+zx}+\frac{1+z^2}{z^2+yz+zx+xy}$$

$$=\frac{1+x^2}{x(x+y+z)+yz}+\frac{1+y^2}{y(x+y+z)+zx}+\frac{1+z^2}{z(x+y+z)+xy}$$

$$=\frac{1+x^2}{x^2yz+yz}+\frac{1+y^2}{y^2zx+zx}+\frac{1+z^2}{z^2xy+xy} \quad [\because x+y+z=xyz]$$

$$=\frac{1+x^2}{yz(1+x^2)}+\frac{1+y^2}{zx(1+y^2)}+\frac{1+z^2}{xy(1+z^2)}$$

$$=\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}+\frac{1}{xy}=\frac{x+y+z}{xyz}=\frac{xyz}{xyz}=1$$

উদা. 9. যদি $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=1$ হয়,

প্রমাণ কর : $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}=0$

বাম পক্ষ $=\frac{a^2}{b+c}+a+\frac{b^2}{c+a}+b+\frac{c^2}{a+b}+c-(a+b+c)$

$$=\frac{a(a+b+c)}{b+c}+\frac{b(b+c+a)}{c+a}+\frac{c(c+a+b)}{a+b}-(a+b+c)$$

$$=\left(a+b+c\right)\left\{\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}-1\right\}$$

$$=(a+b+c)(1-1)=(a+b+c)\times 0=0$$

উদা. 10. যদি $\frac{a}{1-a}+\frac{b}{1-b}+\frac{c}{1-c}=1$ হয়,

প্রমাণ কর : $\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1-c}=4$

$\because \frac{a}{1-a}+\frac{b}{1-b}+\frac{1}{1-c}=1$

$\therefore \frac{a}{1-a}+1+\frac{b}{1-b}+1+\frac{c}{1-c}+1=1+3$

বা $\frac{a+1-a}{1-a}+\frac{b+1-b}{1-b}+\frac{c+1-c}{1-c}=4$

বা $\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1-c}=4$

উদা. 11. যদি $a^2 = by + cz, \quad b^2 = cz + ax, \quad c^2 = ax + by,$

প্রমাণ কর : $\frac{x}{x+a} + \frac{y}{y+b} + \frac{z}{z+c} = 1$

বামপক্ষ $= \frac{x.a}{(x+a)a} + \frac{y.b}{(y+b)b} + \frac{z.c}{(z+c)c} = \frac{ax}{ax+a^2} + \frac{by}{by+b^2} + \frac{cz}{cz+c^2}$

$= \frac{ax}{ax+by+cz} + \frac{by}{by+cz+ax} + \frac{cz}{cz+ax+by}$

$= \frac{ax+by+cz}{ax+by+cz} = 1$

উদা. 12. প্রমাণ কর : $\frac{4x^2+4x-21}{2x-3} = 2x+5-\frac{6}{2x-3}$

$$\begin{array}{l} 2x-3\ )\ 4x^2+4x-21\ (\ 2x+5 \\ \qquad\quad\ \underline{4x^2-6x\qquad\quad} \\ \qquad\qquad\quad 10x-21 \\ \qquad\qquad\quad \underline{10x-15} \\ \qquad\qquad\qquad\ -6 \end{array}$$

$\therefore \quad \frac{4x^2+4x-21}{2x-3} = 2x+5-\frac{6}{2x-3}$

প্রশ্নমালা 33

1. যদি $a + \frac{1}{b} = 1, \quad b + \frac{1}{c} = 1$ হয়,

   প্রমাণ কর : $c + \frac{1}{a} = 1$ এবং $abc + 1 = 0$

2. যদি $x = ay,\ y = bx$ হয়, প্রমাণ কর : $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} = 1$

3. যদি $a^2 = b+c, \quad b^2 = c+a, \quad c^2 = a+b$ হয়,

   প্রমাণ কর : $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = 1$

4. যদি $x = \frac{2ab}{a+b}$ হয়, প্রমাণ কর : $\frac{x+a}{x-a} + \frac{x+b}{x-b} = 2$

5. যদি $x = a(b-c), \quad y = b(c-a), \quad z = c(a-b)$ হয়,

   প্রমাণ কর : $\left(\frac{x}{a}\right)^3 + \left(\frac{y}{b}\right)^3 + \left(\frac{z}{c}\right)^3 = \frac{3xyz}{abc}$

6. যদি $a+b=2c$ হয়, প্রমাণ কর : $\dfrac{a}{a-c}+\dfrac{c}{b-c}=1$

7. যদি $a+b+c=0$ হয়,

প্রমাণ কর : $\dfrac{ab}{a^2+ab+b^2}+\dfrac{bc}{b^2+bc+c^2}+\dfrac{ca}{c^2+ca+a^2}=-1$

8. যদি $\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}=\dfrac{2}{a+b}$ হয়, প্রমাণ কর : $a^2+b^2=2c^2$

9. যদি $x=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $y=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$, $z=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ হয়,

প্রমাণ কর : $(b+c)x+(c+a)y+(a+b)z=a+b+c$

10. যদি $xy+yz+zx=1$ হয়,

প্রমাণ কর : $\dfrac{1+x^2}{(x+y)(x+z)}+\dfrac{1+y^2}{(y+z)(y+x)}+\dfrac{1+z^2}{(z+x)(z+y)}=3$

11. যদি $xy+yz+zx=xyz$ হয়,

প্রমাণ কর : $\dfrac{x+y}{xy(z-1)}+\dfrac{y+z}{yz(x-1)}+\dfrac{z+x}{zx(y-1)}=1$

12. যদি $2s=a+b+c$ হয়,

প্রমাণ কর : $\dfrac{a}{s-a}+\dfrac{b}{s-b}+\dfrac{c}{s-c}+2=\dfrac{abc}{(s-a)(s-b)(s-c)}$

13. যদি $\dfrac{b+a}{b-a}+\dfrac{b+c}{b-c}=2$ হয়, প্রমাণ কর : $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{2}{b}$

14. যদি $2s=a+b+c$ হয়,

প্রমাণ কর : $1-\left(\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2=\dfrac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{b^2c^2}$

15. যদি $2s=a+b+c$ হয়,

প্রমাণ কর : $\left(1-\dfrac{a}{s}\right)^3+\left(1-\dfrac{b}{s}\right)^3+\left(1-\dfrac{c}{s}\right)^3=1-\dfrac{3abc}{s^3}$

16. প্রমাণ কর : $\dfrac{a^3-b^3}{a+b}=a^2-ab+b^2-\dfrac{2b^3}{a+b}$

17. যদি $x+y+z=0$ হয়,

প্রমাণ কর : $\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{y^3}+\dfrac{1}{z^3}=\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)^3+\dfrac{3}{xyz}$

অষ্টম অধ্যায়

সরল সমীকরণ

1. সরল সমীকরণের সংজ্ঞা এবং সমাধান প্রণালী পূর্বে আলোচিত হইয়াছে। এস্থলে অপেক্ষাকৃত কঠিন এবং আক্ষরিক সহগ যুক্ত সরল সমীকরণের সমাধান প্রণালী কয়েকটি উদাহরণসহ প্রদর্শিত হইতেছে।

আক্ষরিক সহগ যুক্ত সরল সমীকরণের সমাধানকালে বিশেষরূপে স্মরণ রাখা প্রয়োজন যে সাধারণতঃ x দ্বারা অজ্ঞাত রাশি এবং $a, b, c, m, n, p, q,$ ইত্যাদি অক্ষর দ্বারা জ্ঞাত রাশি বা ধ্রুবক সূচিত হইয়া থাকে। সুতরাং $ax=b$ এই সমীকরণের সমাধান হইবে $x=\frac{b}{a}$. অবশ্য $ax=b$ এই সমীকরণ হইতে a-এর মান নির্ণয় করিতে হইলে $a=\frac{b}{x}$ হইবে। কিন্তু প্রচলিত রীতি অনুসারে $ax=b$ সমীকরণের সমাধান হইল $x=\frac{b}{a}$.

উদা. 1. সমাধান কর : $ax+b^2=bx+a^2$

$$ax+b^2=bx+a^2$$

পক্ষান্তর করিয়া, $ax-bx=a^2-b^2$

বা, $x(a-b)=a^2-b^2$

$$x=\frac{a^2-b^2}{a-b}=\frac{(a+b)(a-b)}{(a-b)}=a+b.$$

উদা. 2. সমাধান কর : $\frac{x}{a-b}+\frac{x}{a+b}=1$

$$\frac{x}{a-b}+\frac{x}{a+b}=1$$

উভয় পক্ষকে হর সমূহের ল. সা. গু. $(a-b)(a+b)$ দ্বারা গুণ করিয়া,

$$\left(\frac{x}{a-b}+\frac{x}{a+b}\right)(a-b)(a+b)=1.(a-b)(a+b) \qquad \ldots\ldots(A)$$

বা, $\frac{x(a-b)(a+b)}{a-b}+\frac{x(a-b)(a+b)}{a+b}=(a-b)(a+b)$ ......(B)

বা, $x(a+b)+x(a-b)=a^2-b^2$

বা, $x(a+b+a-b)=a^2-b^2$

বা, $x.2a=a^2-b^2$

$$x=\frac{a^2-b^2}{2a}.$$

দ্রষ্টব্য। কার্যতঃ (A) ও (B) অংশ বাদ দেওয়া যাইতে পারে।

উদা. 3. সমাধান কর : $\frac{15-\frac{2}{3}x}{5}-\frac{2x+5}{2\frac{1}{2}}=\frac{17-\frac{14}{3}x}{3}$

$$\frac{15-\frac{2}{3}x}{5}-\frac{2x+5}{2\frac{1}{2}}=\frac{17-\frac{14}{3}x}{3}$$

বা, $\frac{\frac{45-2x}{3}}{5}-\frac{2(2x+5)}{5}=\frac{\frac{51-14x}{3}}{3}$

বা, $\frac{45-2x}{15}-\frac{4x+10}{5}=\frac{51-14x}{9}$

উভয় পক্ষকে হরসমূহের ল. সা. গু. 45 দ্বারা গুণ করিয়া,

$$3(45-2x)-9(4x+10)=5(51-14x)$$

বা, $135-6x-36x-90=255-70x$

বা, $-6x-36x+70x=255-135+90$

বা, $28x=210$ বা, $x=\frac{210}{28}=\frac{15}{2}=7\frac{1}{2}$.

2. **বজ্র গুণন** (Cross Multiplication)।

যদি $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ হয়, তাহা হইলে $ad=bc$ হয়।

প্রমাণ। $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

উভয় পক্ষকে bd দ্বারা গুণ করিলে, $\frac{a}{b}\times bd=\frac{c}{d}\times bd$ বা, $ad=bc$.

উদা. 4. সমাধান কর : $\frac{x}{a} = \frac{b}{c}$

$$\frac{x}{a} = \frac{b}{c}$$

বজ্র গুণন করিয়া, $cx = ab$ বা, $x = \frac{ab}{c}$

উদা. 5. সমাধান কর : $\frac{7x^2}{(x-1)(2x-3)} = 3\frac{1}{2}$

$$\frac{7x^2}{(x-1)(2x-3)} = 3\tfrac{1}{2} \quad \text{বা,} \quad \frac{7x^2}{2x^2-5x+3} = \tfrac{7}{2}$$

বজ্র গুণন করিয়া, $7x^2 \times 2 = 7(2x^2 - 5x + 3)$

বা, $14x^2 = 14x^2 - 35x + 21$

বা, $14x^2 - 14x^2 + 35x = 21$

বা, $35x = 21$

বা, $x = \frac{21}{35} = \frac{3}{5}$.

উদা. 6. সমাধান কর : $\frac{x}{\cdot 5} - \frac{1}{\cdot 05} + \frac{x}{\cdot 005} - \frac{1}{\cdot 0005} = 0$

প্রথম প্রণালী। $\frac{x}{\cdot 5} - \frac{1}{\cdot 05} + \frac{x}{\cdot 005} - \frac{1}{\cdot 0005} = 0$

হরসমূহের ল. সা. গু. ·5 দ্বারা উভয় পক্ষকে গুণ করিয়া,

$$x - 10 + 100x - 1000 = 0$$

বা, $101x = 1010$

$$x = 10$$

দ্বিতীয় প্রণালী। $\frac{x}{\cdot 5} - \frac{1}{\cdot 05} + \frac{x}{\cdot 005} - \frac{1}{\cdot 0005} = 0$

বা, $\frac{x}{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\frac{1}{20}} + \frac{x}{\frac{1}{200}} - \frac{1}{\frac{1}{2000}} = 0$

বা, $2x - 20 + 200x - 2000 = 0$

বা, $202x = 2020$ বা, $x = 10$.

প্রশ্নমালা 34

সমাধান কর :

1. $6\frac{1}{3} - \frac{x-7}{3} = \frac{4x-2}{5}$.

2. $x - \left(3x - \frac{2x-5}{10}\right) + \frac{5}{3} = \frac{1}{6}(2x-57)$.

3. $\frac{a-x}{a} + \frac{2a-x}{2a} = \frac{3a-x}{3a}$.

4. $\frac{1}{a} + \frac{b}{x} = c$.

5. $\frac{x}{a} - \frac{x}{c} = \frac{a}{b}$.

6. $a(x+a) = b(x+b)$.

7. $a(x+c) = b(x+d)$.

8. $\frac{2}{x-a} + \frac{3}{x+a} = \frac{9a}{x^2-a^2}$. (W. B. S. F. 1952)

9. $\frac{a}{bx} - \frac{b}{ax} = a^2 - b^2$.

10. $\frac{9x+2}{18x+21} = \frac{2x+9}{4x+35}$.

11. $\frac{15x-11}{3x+1} = \frac{5x-7}{x+1}$.

12. $\frac{3}{4}(5x-1) - \frac{5(4x-1)-3}{3} = 2-3x$.

13. $\frac{b}{x} = \frac{a}{x-b+a}$.

14. $\frac{150}{3x+35} = \frac{27}{2x-1}$.

15. $\frac{12}{2x-1} = \frac{45}{6x+3}$.

16. $\frac{x+3}{2x-1} = \frac{3x+1}{6x-11}$.

17. $\frac{2x+1}{x-2} = \frac{3(2x-1)}{3x-8}$.

18. $\frac{x-a}{x+b} = \frac{2x-a}{2x-b}$.

19. $\frac{x+a}{x+b} = \frac{x+c}{x+d}$.

20. $\cdot 5 + \frac{\cdot 02x + \cdot 07}{\cdot 03} - \frac{x+2}{9} = 9\cdot 5$

21. $\cdot 011x + \frac{\cdot 001x - \cdot 125}{\cdot 6} = \frac{5-x}{\cdot 03} - \cdot 145$.

22. $\frac{1\cdot 4x - 1}{x + \cdot 2} = \frac{\cdot 7(x-1)}{\cdot 5x - \cdot 1}$.

23. $\frac{\cdot 4x - \cdot 6}{2x-3} = \frac{\cdot 06x - \cdot 07}{\cdot 3x - \cdot 4}$.

24. $(a+b-x)(a-b+x) + (a+x)(b+x) - a^2 = 0$.

3. কখনও কখনও সমীকরণের কোন পক্ষকে সুবিধামত কয়েকটি অংশে বিভক্ত করিয়া এবং পক্ষান্তর করিয়া লইলে সমাধান সহজতর হয়।

উদা. 1. সমাধান কর : $\frac{6x+1}{15}-\frac{2x-4}{7x-16}=\frac{2x-1}{5}$

$$\frac{6x+1}{15}-\frac{2x-4}{7x-16}=\frac{2x-1}{5}$$

বা, $\frac{6x+1}{15}-\frac{2x-1}{5}=\frac{2x-4}{7x-16}$ (পক্ষান্তর করিয়া),

বা, $\frac{6x+1-3(2x-1)}{15}=\frac{2x-4}{7x-16}$

বা, $\frac{6x+1-6x+3}{15}=\frac{2x-4}{7x-16}$

বা, $\frac{4}{15}=\frac{2x-4}{7x-16}$.

বজ্র গুণন করিয়া, $28x-64 = 30x-60$

বা, $28x-30x=-60+64$

বা, $-2x= 4$

$\therefore$ $x=-2.$

উদা. 2. সমাধান কর : $\frac{5x+3}{4}+\frac{78-2x}{21}=\frac{13x-1}{8}+\frac{15-2x}{3}$

$$\frac{5x+3}{4}+\frac{78-2x}{21}=\frac{13x-1}{8}+\frac{15-2x}{3}$$

বা, $\frac{5x+3}{4}-\frac{13x-1}{8}=\frac{15-2x}{3}-\frac{78-2x}{21}$ (পক্ষান্তর করিয়া)

বা, $\frac{10x+6-13x+1}{8}=\frac{105-14x-78+2x}{21}$

বা, $\frac{-3x+7}{8}=\frac{27-12x}{21}$.

বজ্র গুণন করিয়া, $-63x+147=216-96x$

বা, $-63x+96x=216-147$, বা, $33x=69$

$\therefore$ $x=\frac{69}{33}=\frac{23}{11}=2\frac{1}{11}$.

উদা. 3. সমাধান কর : $\dfrac{x-a}{b+c}+\dfrac{x-b}{c+a}+\dfrac{x-c}{a+b}=3.$

$$\frac{x-a}{b+c}+\frac{x-b}{c+a}+\frac{x-c}{a+b}=1+1+1.$$

$$\frac{x-a}{b+c}-1+\frac{x-b}{c+a}-1+\frac{x-c}{a+b}-1=0. \quad [\text{ পক্ষান্তর করিয়া }]$$

বা, $\dfrac{x-a-b-c}{b+c}+\dfrac{x-b-c-a}{c+a}+\dfrac{x-c-a-b}{a+b}=0.$

বা, $(x-a-b-c)\left(\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}+\dfrac{1}{a+b}\right)=0.$

$\therefore\ x-a-b-c=0,$ $\left[\because\ \dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}+\dfrac{1}{a+b}\right.$ ধ্রুবক বলিয়া 0 নহে$\Big]$

$\therefore\ x=a+b+c.$

উদা. 4. সমাধান কর : $\dfrac{x-a^2}{b+c}+\dfrac{x-b^2}{c+a}+\dfrac{x-c^2}{a+b}=4(a+b+c)$

$$\frac{x-a^2}{b+c}+\frac{x-b^2}{c+a}+\frac{x-c^2}{a+b}=(b+c+2a)+(c+a+2b)+(a+b+2c)$$

বা, $\dfrac{x-a^2}{b+c}-(b+c+2a)+\dfrac{x-b^2}{c+a}-(c+a+2b)$

$$+\frac{x-c^2}{a+b}-(a+b+2c)=0.$$

বা, $\dfrac{x-a^2-b^2-c^2-2bc-2ab-2ca}{b+c}$

$$+\frac{x-b^2-c^2-a^2-2ca-2bc-2ab}{c+a}$$

$$+\frac{x-c^2-a^2-b^2-2ab-2ca-2bc}{a+b}=0.$$

বা, $(x-a^2-b^2-c^2-2ab-2bc-2ca)\left(\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}+\dfrac{1}{a+b}\right)=0$

$\therefore\ x-a^2-b^2-c^2-2ab-2bc-2ca=0.$

$\left[\because\ \dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}+\dfrac{1}{a+b}\right.$ ধ্রুবক বলিয়া 0 নহে। $\Big]$

$\therefore\ x=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2.$

প্রশ্নমালা 35

সমাধান কর :

1. $\frac{3x+8}{5}+\frac{25x-23}{24}=\frac{9x-1}{8}+\frac{16x+31}{35}$.

2. $\frac{2x-1}{3}-\frac{8x-17}{11}=\frac{9x-1}{15}-\frac{14x-38}{22}$.

3. $\frac{2x-6}{9}+\frac{15-2x}{12-5x}=\frac{4x-15}{18}$. 4. $\frac{3x+5}{5(x-5)}+\frac{2x}{5}=\frac{6x+13}{15}$.

5. $\frac{8x+37}{18}+\frac{29-7x}{5x-12}=\frac{4(x+3)}{9}$.

6. $\frac{3}{2-x}+\frac{5}{2(1-x)}=\frac{3}{4-2x}+\frac{15}{4(1-x)}$.

7. $\frac{x-a}{c-a}+\frac{x-b}{c-b}=2$. 8. $\frac{m(x-a)}{x+a}+\frac{n(x-b)}{x+b}=m+n$.

9. $\frac{x-a}{3b+5c}+\frac{x-3b}{5c+a}+\frac{x-5c}{a+3b}=3$.

10. $\frac{x-bc}{b+c}+\frac{x-ca}{c+a}+\frac{x-ab}{a+b}=a+b+c$.

11. $\frac{x-a}{b+c+2a}+\frac{x-b}{c+a+2b}+\frac{x-c}{a+b+2c}+3=0$.

12. $\frac{ax+a^2}{b+c}+\frac{bx+b^2}{c+a}+\frac{cx+c^2}{a+b}+(a+b+c)=0$.

13. $\frac{bc(ax-1)}{b+c}+\frac{ca(bx-1)}{c+a}+\frac{ab(cx-1)}{a+b}=a+b+c$.

14. $\frac{x-a}{b}+\frac{x-b}{a}+\frac{x-3a-3b}{a+b}=0$.

15. $\frac{x-a^3}{b^2-bc+c^2}+\frac{x-b^3}{c^2-ca+a^2}+\frac{x-c^3}{a^2-ab+b^2}=2(a+b+c)$.

4. এই স্থলে কঠিনতর সরল সমীকরণের সমাধান প্রণালী আলোচিত হইল।

উদা. 1. সমাধান কর : $\dfrac{x+a}{x+b} = \dfrac{x+c}{x+d}$,

বজ্রগুণন করিয়া, $(x+a)(x+d) = (x+b)(x+c)$

বা, $x^2+(a+d)x+ad = x^2+(b+c)x+bc$

বা, $(a+d)x-(b+c)x = bc-ad$

[উভয় পক্ষ হইতে x^2 বাদ দিয়া এবং পক্ষান্তর করিয়া]

বা, $x(a+d-b-c) = bc-ad$

$\therefore \quad x = \dfrac{bc-ad}{a+d-b-c}$

5. যদি $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ হয়, তাহা হইলে $\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}$ হয়।

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$; উভয় পক্ষকে $\dfrac{b}{c}$ দ্বারা গুণ করিয়া, $\dfrac{a}{b}\times\dfrac{b}{c} = \dfrac{c}{d}\times\dfrac{b}{c}$,

বা, $\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}$. এই প্রক্রিয়াকে **একান্তর প্রক্রিয়া** (Alternando) বলে।

উদা. 2. সমাধান কর : $\dfrac{(x+2)(x+3)}{(x+1)(x+7)} = \dfrac{x+5}{x+8}$

$\dfrac{x^2+5x+6}{x^2+8x+7} = \dfrac{x+5}{x+8}$

বা, $\dfrac{x^2+5x+6}{x+5} = \dfrac{x^2+8x+7}{x+8}$ (একান্তর প্রক্রিয়া দ্বারা)

বা, $\dfrac{x(x+5)+6}{x+5} = \dfrac{x(x+8)+7}{x+8}$

বা, $x+\dfrac{6}{x+5} = x+\dfrac{7}{x+8}$ বা, $\dfrac{6}{x+5} = \dfrac{7}{x+8}$

বজ্রগুণন করিয়া, $7x+35 = 6x+48$ বা, $7x-6x = 48-35$, বা, $x = 13$.

দ্বিতীয় প্রণালী।

বজ্রগুণন করিয়া, $(x+2)(x+3)(x+8) = (x+1)(x+7)(x+5)$

বা, $x^3+13x^2+46x+48 = x^3+13x^2+47x+35$

বা, $46x-47x = 35-48$ বা, $-x = -13 \quad \therefore \quad x = 13$

উদা. 5. সমাধান কর : $\frac{a}{x-a}+\frac{b}{x-b} = \frac{a+b}{x-a-b}$

$\frac{a}{x-a}+\frac{b}{x-b} = \frac{a}{x-a-b}+\frac{b}{x-a-b}$

বা, $\frac{a}{x-a}-\frac{a}{x-a-b} = \frac{b}{x-a-b}-\frac{b}{x-b}$

বা, $\frac{ax-a^2-ab-ax+a^2}{(x-a)(x-a-b)} = \frac{bx-b^2-bx+ab+b^2}{(x-a-b)(x-b)}$

বা, $\frac{-ab}{x-a} = \frac{ab}{x-b}$ [উভয় পক্ষকে $x-a-b$ দ্বারা গুণ করিয়া

বা, $\frac{-1}{x-a} = \frac{1}{x-b}$ বা, $x-a=-x+b.$

বা, $2x=a+b$ $\therefore\ x=\frac{a+b}{2}$

উদা. 6. সমাধান কর : $\frac{10}{5x-9}+\frac{14}{2x+9} = \frac{9}{x+8}$

$\frac{10}{5x-9}+\frac{14}{2x+9} = \frac{2}{x+8}+\frac{7}{x+8}$

বা, $\frac{10}{5x-9}-\frac{2}{x+8} = \frac{7}{x+8}-\frac{14}{2x+9}$

বা, $\frac{10x+80-10x+18}{(5x-9)(x+8)} = \frac{14x+63-14x-112}{(x+8)(2x+9)}$

বা, $\frac{98}{(5x-9)(x+8)} = \frac{-49}{(x+8)(2x+9)}$

বা, $\frac{2}{5x-9} = \frac{-1}{2x+9}$ বা, $4x+18=-5x+9$

বা, $9x=-9$ $\therefore\ x=-1$

উদা. 7. সমাধান কর : $\frac{8x+21}{2x+5}+\frac{9x}{3x-1} = \frac{28x+13}{4x+1}$

$\frac{8x+21}{2x+5}+\frac{9x}{3x-1} = \frac{28x+13}{4x+1}$

বা, $\frac{4(2x+5)+1}{2x+5}+\frac{3(3x-1)+3}{3x-1} = \frac{7(4x+1)+6}{4x+1}$

বা, $4+\frac{1}{2x+5}+3+\frac{3}{3x-1} = 7+\frac{6}{4x+1}$

উদা. 3. সমাধান কর : $\dfrac{x+a+b+2c}{x+a+b}=\dfrac{x+a-b-2c}{x+a-b}$

উভয় পক্ষের লবকে হর দ্বারা ভাগ করিয়া,

$1+\dfrac{2c}{x+a+b}=1-\dfrac{2c}{x+a-b}$

বা, $\dfrac{2c}{x+a+b}=-\dfrac{2c}{x+a-b}$

বা, $\dfrac{1}{x+a+b}=\dfrac{-1}{x+a-b}$ [উভয় পক্ষকে $2c$ দ্বারা ভাগ করিয়া]

বা, $x+a-b=-x-a-b.$

বা, $2x=-a-b-a+b=-2a \quad \therefore \quad x=-a$

6. কোন পদকে সুবিধামত কতিপয় অংশে বিভক্ত করিয়া এবং পক্ষান্তর করিয়া লইলে সমাধান সহজতর হয়। এইরূপে ভাগ করিবার সময় লক্ষ্য রাখিতে হয় যাহাতে পক্ষান্তর করিয়া সরল করিলে লবে x যুক্ত কোন পদ না থাকে।

উদা. 4. সমাধান কর : $\dfrac{3}{x+3}+\dfrac{4}{x+5}=\dfrac{7}{x+11}$

$\dfrac{3}{x+3}+\dfrac{4}{x+5}=\dfrac{3}{x+11}+\dfrac{4}{x+11}$

বা, $\dfrac{3}{x+3}-\dfrac{3}{x+11}=\dfrac{4}{x+11}-\dfrac{4}{x+5}$

বা, $\dfrac{3x+33-3x-9}{(x+3)(x+11)}=\dfrac{4x+20-4x-44}{(x+11)(x+5)}$

বা, $\dfrac{24}{x+3}=\dfrac{-24}{x+5}$ [উভয় পক্ষকে $(x+11)$ দ্বারা গুণ করিয়া]

বা, $\dfrac{1}{x+3}=\dfrac{-1}{x+5}$ [উভয় পক্ষকে 24 দ্বারা গুণ করিয়া]

বা, $x+5=-x-3$, বা, $2x=-8$, $\therefore \quad x=-4$

দ্বিতীয় প্রণালী।

$$\frac{(x-8)(x-7)-(x-10)(x-5)}{(x-10)(x-7)}=\frac{(x-7)(x-6)-(x-9)(x-4)}{(x-9)(x-6)}$$

বা, $$\frac{(x^2-15x+56)-(x^2-15x+50)}{(x-10)(x-7)}=\frac{(x^2-13x+42)-(x^2-13x+36)}{(x-9)(x-6)}$$

বা, $$\frac{6}{x^2-17x+70}=\frac{6}{x^2-15x+54}$$

$\therefore\ x^2-17x+70=x^2-15x+54$ বা, $-2x=-16$ $\therefore\ x=8.$

উদা. 9. সমাধান কর : $\left(\frac{x+2a+2b}{x+2b}\right)^2=\frac{x+5a+b}{x+a+b}$

$$\left\{\frac{(x+2b)+2a}{x+2b}\right\}^2=\frac{(x+a+b)+4a}{x+a+b}$$ বা, $$\left(1+\frac{2a}{x+2b}\right)^2=1+\frac{4a}{x+a+b}$$

বা, $$1+\frac{4a}{x+2b}+\frac{4a^2}{(x+2b)^2}=1+\frac{4a}{x+a+b}$$

বা, $$\frac{4a}{x+2b}+\frac{4a^2}{(x+2b)^2}=\frac{4a}{x+a+b}$$ বা, $$\frac{1}{x+2b}+\frac{a}{(x+2b)^2}=\frac{1}{x+a+b}$$

বা, $$\frac{a}{(x+2b)^2}=\frac{1}{x+a+b}-\frac{1}{x+2b}$$ বা, $$\frac{a}{(x+2b)^2}=\frac{x+2b-x-a-b}{(x+a+b)(x+2b)}$$

বা, $$\frac{a}{x+2b}=\frac{b-a}{x+a+b}$$ বা, $ax+a^2+ab=bx-ax+2b^2-2ab$

বা, $ax-bx+ax=2b^2-2ab-ab-a^2$

বা, $(2a-b)x=2b^2-3ab-a^2$

$$\therefore\ x=\frac{2b^2-3ab-a^2}{2a-b}.$$

উদা. 10. সমাধান কর : $\left(\frac{x+4}{x+3}\right)^3=\frac{x+5}{x+2}$

$$\left(\frac{x+4}{x+3}\right)^2\left(\frac{x+4}{x+3}\right)=\frac{x+5}{x+2}$$ বা, $$\left(\frac{x+4}{x+3}\right)^2=\frac{(x+5)(x+3)}{(x+2)(x+4)}$$

বা, $$\frac{x^2+8x+16}{x^2+6x+9}=\frac{x^2+8x+15}{x^2+6x+8}$$ বা, $$\frac{x^2+8x+16}{x^2+8x+15}=\frac{x^2+6x+9}{x^2+6x+8}$$

বা, $$1+\frac{1}{x^2+8x+15}=1+\frac{1}{x^2+6x+8}$$

বা, $\dfrac{1}{2x+5}+\dfrac{3}{3x-1} = \dfrac{2}{4x+1}+\dfrac{4}{4x+1}$

বা, $\dfrac{1}{2x+5}-\dfrac{2}{4x+1} = \dfrac{4}{4x+1}-\dfrac{3}{3x-1}$

বা, $\dfrac{4x+1-4x-10}{(2x+5)(4x+1)} = \dfrac{12x-4-12x-3}{(4x+1)(3x-1)}$

বা, $\dfrac{-9}{(2x+5)(4x+1)} = \dfrac{-7}{(4x+1)(3x-1)}$

বা, $\dfrac{9}{2x+5} = \dfrac{7}{3x-1}$, বা, $27x-9=14x+35$

বা, $27x-14x=35+9$, বা, $13x=44$ $\therefore$ $x=\frac{44}{13}=3\frac{5}{13}$

উদা. 8. সমাধান কর : (i) $\dfrac{x-8}{x-10}+\dfrac{x-4}{x-6} = \dfrac{x-7}{x-9}+\dfrac{x-5}{x-7}$

(ii) $\dfrac{x-8}{x-10}-\dfrac{x-5}{x-7} = \dfrac{x-7}{x-9}-\dfrac{x-4}{x-6}$

(i) $\dfrac{(x-10)+2}{x-10}+\dfrac{(x-6)+2}{x-6}=\dfrac{(x-9)+2}{x-9}+\dfrac{(x-7)+2}{x-7}$

বা, $\left(1+\dfrac{2}{x-10}\right)+\left(1+\dfrac{2}{x-6}\right)=\left(1+\dfrac{2}{x-9}\right)+\left(1+\dfrac{2}{x-7}\right)$

বা, $\dfrac{2}{x-10}+\dfrac{2}{x-6}=\dfrac{2}{x-9}+\dfrac{2}{x-7}$ বা, $\dfrac{1}{x-10}+\dfrac{1}{x-6}=\dfrac{1}{x-9}+\dfrac{1}{x-7}$

বা, $\dfrac{1}{x-10}-\dfrac{1}{x-9}=\dfrac{1}{x-7}-\dfrac{1}{x-6}$

বা, $\dfrac{x-9-x+10}{(x-10)(x-9)}=\dfrac{x-6-x+7}{(x-7)(x-6)}$

বা, $\dfrac{1}{x^2-19x+90}=\dfrac{1}{x^2-13x+42}$

বা, $x^2-19x+90=x^2-13x+42$

বা, $-19x+13x=42-90$ বা, $-6x=-48$ $\therefore$ $x=8$

(ii) **প্রথম প্রণালী**। পক্ষান্তর করিয়া সমীকরণটিকে অবিকল (i) এর আকারে পরিবর্তিত করা যায়। অতঃপর (i) এর প্রক্রিয়া অনুসরণ করিলেই সমাধান হইবে।

উদা. 14. সমাধান কর : $\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^3 = \frac{x+2a-b}{x-a+2b}$

ধর $p = x+a$ এবং $q = x+b$

তাহা হইলে $2p-q = 2(x+a)-(x+b) = x+2a-b$

এবং $2q-p = 2(x+b)-(x+a) = x-a+2b.$

এখন সমীকরণটি হইল $\left(\frac{p}{q}\right)^3 = \frac{2p-q}{2q-p}$ বা, $\frac{p^3}{q^3} = \frac{2p-q}{2q-p}$

উভয় পক্ষে 1 যোগ করিয়া, $\frac{p^3}{q^3}+1 = \frac{2p-q}{2q-p}+1$

বা, $\frac{p^3+q^3}{q^3} = \frac{2p-q+2q-p}{2q-p}$ বা, $\frac{(p+q)(p^2-pq+q^2)}{q^3} = \frac{p+q}{2q-p}$

বা, $\frac{(p+q)(p^2-pq+q^2)}{q^3} - \frac{(p+q)}{2q-p} = 0$

বা, $(p+q)\left\{\frac{p^2-pq+q^2}{q^3} - \frac{1}{2q-p}\right\} = 0$

$\therefore\ p+q=0$ অর্থাৎ $(x+a)+(x+b)=0$

বা, $2x+(a+b)=0$, বা, $2x = -(a+b)$, $\therefore\ x = -\frac{a+b}{2}.$

প্রশ্নমালা 36

সমাধান কর :

1. $\frac{6x+1}{15} - \frac{2(x-2)}{7x-16} = \frac{2x-1}{5}$

2. $\frac{6x-7}{4x-5} = \frac{3x-4}{2x-3}$

3. $\frac{x-a}{x-b} = \frac{x-c}{x-d}$

4. $\frac{x+3a}{x+a} = \frac{x+a+b}{x+b}$

5. $\frac{3x^2+x+1}{2x^2-x+1} = \frac{3x+1}{2x-1}$

6. $\frac{x}{2x-a} + \frac{x}{2x-b} = 1$

7. $\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^2 = \frac{x+2}{x+4}$

8. $\frac{(x+2)(x+6)}{(x+4)(x+5)} = \frac{x+8}{x+9}$

9. $\frac{(x+7)(x+9)}{(x+3)(x+5)} = \frac{x+16}{x+8}$

10. $\left(\frac{2x-10}{2x-5}\right)^2 = \frac{x-10}{x-5}$

বা, $\dfrac{1}{x^2+8x+15}=\dfrac{1}{x^2+6x+8}$ বা, $x^2+8x+15=x^2+6x+8$

বা, $2x=-7 \quad \therefore \quad x=\dfrac{-7}{2} = -3\frac{1}{2}$.

উদা. 11. সমাধান কর : $16\left(\dfrac{a-x}{a+x}\right)^3 = \dfrac{a+x}{a-x}$

$$\frac{16(a-x)^3}{(a+x)^3} = \frac{a+x}{a-x}$$

বজ্রগুণন করিয়া, $16(a-x)^4=(a+x)^4$ বা, $\{2(a-x)\}^4=(a+x)^4$

$\therefore \quad 2(a-x)=a+x$ বা, $2a-2x=a+x$

বা, $2a-a=x+2x$ বা, $a=3x$, $\therefore \quad x=\dfrac{a}{3}$.

উদা. 12. সমাধান কর : $\dfrac{6}{7-\dfrac{6}{7-\dfrac{6}{7-x}}}=1$

বামপক্ষ $=\dfrac{6}{7-\dfrac{6}{\dfrac{49-7x-6}{7-x}}}=\dfrac{6}{7-\dfrac{42-6x}{43-7x}}=\dfrac{6}{\dfrac{301-49x-42+6x}{43-7x}}$

$$=\frac{258-42x}{259-43x}$$

$\therefore$ সমীকরণটি হইল, $\dfrac{258-42x}{259-43x}=1$

বা, $258-42x=259-43x$, $\quad \therefore \quad x=1$.

উদা. 13. সমাধান কর :

$$(x-a)^3+(x-b)^3+(x-c)^3=3(x-a)(x-b)(x-c)$$

$(x-a)^3+(x-b)^3+(x-c)^3-3(x-a)(x-b)(x-c)=0$

বা, $\frac{1}{2}\{(x-a)+(x-b)+(x-c)\}[\{(x-a)-(x-b)\}^2$
$+\{(x-b)-(x-c)\}^2+\{(x-c)-(x-a)\}^2]=0$

বা, $\frac{1}{2}(3x-a-b-c)\{(b-a)^2+(c-b)^2+(a-c)^2\}=0$

$\therefore \quad 3x-a-b-c=0$ [$\because \frac{1}{2}\{(b-a)^2+(c-b)^2+(a-c)^2\}=0$ নহে]

বা, $3x=a+b+c$, $\quad \therefore \quad x=\dfrac{a+b+c}{3}$,

11. $\frac{9}{x-7}+\frac{15}{x-13}=\frac{24}{x-12}$ 12. $\frac{24}{x-12}-\frac{15}{x-3}=\frac{9}{x-7}$

13. $\frac{14}{2x+9}-\frac{9}{x+8}=\frac{10}{9-5x}$ 14. $\frac{3}{x+2}+\frac{4}{x-4}=\frac{7}{x-2}$

15. $\frac{1}{x+9}+\frac{12}{3x-8}=\frac{20}{4x-13}$ 16. $\frac{5}{5x+3}+\frac{8}{4x-1}=\frac{18}{6x+1}$

17. $\frac{3}{3x-1}+\frac{5}{5x-1}+\frac{4}{1-2x}=0$

18. $\frac{27}{3x+2}+\frac{14}{2x+1}+\frac{10}{2x-1}=\frac{63}{3x+1}$

19. $\frac{a-b}{x-a}-\frac{b-a}{x-b}=\frac{2a-2b}{x-a-b}$

20. $\frac{b-c}{x+2a}-\frac{c-a}{x+2b}=\frac{a+b-2c}{x+a+b}$

21. $\frac{x+4}{x+2}+\frac{x-2}{x-18}=\frac{2x-28}{x-18}$ 22. $\frac{x+a}{x+b}=\frac{x+3a}{x+a+b}$

23. $\frac{x+1}{x-2}+\frac{x-1}{x-6}=\frac{2x+14}{x+3}$ 24. $\frac{6x+30}{x+1}+\frac{8x+60}{x+3}=\frac{14x+62}{x+1}$

25. $\frac{x+5}{x+4}+\frac{x-15}{x-16}=\frac{x-4}{x-5}+\frac{x-6}{x-7}$

26. $\frac{4x-17}{x-4}+\frac{10x-13}{2x-3}=\frac{5x-4}{x-1}+\frac{8x-30}{2x-7}$

27. $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}$

28. $\frac{x-1}{x-2}-\frac{x-2}{x-3}=\frac{x-5}{x-6}-\frac{x-6}{x-7}$

29. $\frac{x-2}{x-3}-\frac{x}{x-1}=\frac{x-10}{x-11}-\frac{x-8}{x-9}$

30. $\frac{3x^2+10x+11}{x+3}=\frac{x^2-1}{x-2}+\frac{2x^2-13x+11}{x-6}$

31. $\frac{x+2a}{x+a}+\frac{x+2b}{x+b}=\frac{2x+2c+a+b}{x+c}$

32. $\dfrac{x+a}{x+b}=\left(\dfrac{2x+c+a}{2x+b+c}\right)^2$

33. $\dfrac{p(x-a)}{x+a}+\dfrac{q(x-b)}{x+b}=p+q$

34. $5+\dfrac{2}{3-\dfrac{1}{4-x}}=\dfrac{29}{5}$

35. $\dfrac{x+a^2+2c^2}{b+c}+\dfrac{x+b^2+2a^2}{c+a}+\dfrac{x+c^2+2b^2}{a+b}=0$

36. $\dfrac{1}{x+a}+\dfrac{1}{x+b}=\dfrac{1}{x+a+c}+\dfrac{1}{x+b-c}$

37. $\dfrac{(x+1)(x+9)}{(x+2)(x+4)}=\dfrac{(x+6)(x+10)}{(x+5)(x+7)}$

38. $\dfrac{x+4a+b}{x+a+b}+\dfrac{4x+a+2b}{x+a-b}=5$

39. $\dfrac{x-a}{bc}+\dfrac{x-b}{ca}+\dfrac{x-c}{ab}=\dfrac{2}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{2}{c}$

40. $(x-1)(x-5)(x-7)(x-9)=(x-2)(x-4)(x-6)(x-10)$

41. $\dfrac{a+c}{x-2b}-\dfrac{b+c}{x-2a}=\dfrac{a-c}{x+2b}-\dfrac{b-c}{x+2a}$

42. $\dfrac{(x-a)(x+b)}{x-a+b}=\dfrac{x(x-c)-b(x+c)}{x-b-c}$

43. $\dfrac{2}{x-a}+\dfrac{3}{x+a}=\dfrac{9a}{x^2-a^2}$

44. $\dfrac{1}{2x+b}-\dfrac{1}{2x+a}=\dfrac{a-b}{4x^2+2ab}$

45. $\dfrac{1}{ab-ax}+\dfrac{1}{bc-bx}=\dfrac{1}{ac-ax}$

46. $\dfrac{a+x}{a^2+ax+x^2}+\dfrac{a-x}{a^2-ax+x^2}=\dfrac{2a^4}{x(a^4+a^2x^2+x^4)}$

নবম অধ্যায়

একঘাত সহ-সমীকরণ

1. মনে কর $y=2x+1$ একটি একঘাত সমীকরণ। ইহার x এবং y অজ্ঞাত রাশি। এই সমীকরণে x এর বিভিন্ন মান ধরিলে y এর বিভিন্ন মান হয়। $x=0$ ধরিলে, y এর মান হইবে $2.0+1=1$, $x=1$ ধরিলে, y এর মান হইবে $2.1+1=3$, $x=-3$ ধরিলে, y এর মান হইবে $2.(-3)+1=-5$, ইত্যাদি। সুতরাং x ও y অজ্ঞাত রাশি দুইটির অসংখ্য মান দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হইতে পারে।

মনে কর $4x-y=3$ আর একটি একঘাত সমীকরণ। ইহারও x এবং y অজ্ঞাত রাশি। এই সমীকরণেও x এর বিভিন্ন মান ধরিলে, y এর বিভিন্ন মান হয়। $x=0$ ধরিলে, y এর মান হয় -3, $x=1$ ধরিলে, y এর মান হয় 1, x এর মান -2 ধরিলে, y এর মান হয় -11, ইত্যাদি। সুতরাং x ও y অজ্ঞাত রাশি দুইটির অসংখ্য মান দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হইতে পারে।

এখন এই দুইটি সমীকরণে x ও y এর এরূপ মান থাকিতে পারে, যে মান দ্বারা উভয় সমীকরণই সিদ্ধ হয়। দেখ, $x=2$, এবং $y=5$ ধরিলে, উভয় সমীকরণই সিদ্ধ হয়। তাহা হইলে $x=2$ এবং $y=5$, ইহাই হইল সমীকরণ দুইটির সমাধান। $x=2$ এবং $y=5$ ভিন্ন x, y এর অপর কোন মান দ্বারাই উভয় সমীকরণ যুগপৎ সিদ্ধ হইতে পারে না।

দুইটি অজ্ঞাত রাশিবিশিষ্ট একঘাত দুইটি সমীকরণ অজ্ঞাত রাশি দুইটির একই মান দ্বারা সিদ্ধ হইলে সমীকরণ দুইটিকে **একঘাত সহ-সমীকরণ** (Simultaneous linear equations) বলে।

সহ-সমীকরণের প্রত্যেকটি সমীকরণ স্বাধীন (independent) হওয়া আবশ্যক, অর্থাৎ একটি সমীকরণ যেন অপর সমীকরণ হইতে পাওয়া সম্ভব না হয়। $x+y=5$ এবং $2x+2y-7=3$ এই দুইটি সমীকরণ আকারে বিভিন্ন হইলেও মূলতঃ অভিন্ন (অর্থাৎ স্বাধীন নহে)। এইরূপ সমীকরণ সমাধানযোগ্য নহে।

আবার, $5x+2y=9$ এবং $5x+2y=12$ এই দুইটি সমীকরণ অজ্ঞাতরাশি দুইটির কোন মান দ্বারাই যুগপৎ সিদ্ধ হইতে পারে না। এইরূপ সহ-সমীকরণকে অসঙ্গত (inconsistent) সমীকরণ বলে। এইরূপ সমীকরণ সমাধানযোগ্য নহে।

সহ-সমীকরণে দুইটির অধিক অজ্ঞাত রাশিও থাকিতে পারে। তিনটি অজ্ঞাত রাশিবিশিষ্ট সহ-সমীকরণের সমাধানের জন্য তিনটি সমীকরণের প্রয়োজন, চারিটি অজ্ঞাত রাশি বিশিষ্ট সহ-সমীকরণের সমাধানের জন্য চারিটি সমীকরণের প্রয়োজন, ইত্যাদি।

এই অধ্যায়ে মাত্র দুইটি অজ্ঞাত রাশি বিশিষ্ট একঘাত সহ-সমীকরণের সমাধান প্রণালী আলোচিত হইবে।

2. দুইটি অজ্ঞাত রাশি বিশিষ্ট একঘাত সহ-সমীকরণ সমাধান করিতে হইলে প্রত্যেক সমীকরণে যে কোন একটি অজ্ঞাত রাশির মান অপর অজ্ঞাত রাশি দ্বারা প্রকাশ কর। এই দুইটি লব্ধ ফলকে '=' চিহ্ন দ্বারা যুক্ত করিলে একটি মাত্র অজ্ঞাত রাশি যুক্ত একটি সমীকরণ উৎপন্ন হইবে। উহা হইতে উক্ত অজ্ঞাত রাশির মান নির্ণয় কর এবং অতঃপর প্রদত্ত যে কোন সমীকরণে উহার মান বসাইয়া দ্বিতীয় অজ্ঞাত রাশির মান নির্ণয় কর।

উদা. 1. সমাধান কর : $4x-3y=7$
$2x+5y=23$

প্রথম সমীকরণ হইতে, $4x-7=3y$, বা, $\frac{4x-7}{3}=y \quad \cdots \quad \cdots \quad (i)$

দ্বিতীয় সমীকরণ হইতে, $5y=23-2x$, বা, $y=\frac{23-2x}{5} \quad \cdots \quad \cdots \quad (ii)$

(i) ও (ii) তুলনা করিয়া,

$$\frac{4x-7}{3}=\frac{23-2x}{5}$$

বা $20x-35=69-6x$, বা, $26x=104$, $\therefore \; x=4$

(ii) এ, $x=4$ ধরিয়া, $y=\frac{23-2.4}{5}=\frac{15}{5}=3$, $\therefore \; x=4, \; y=3.$

দ্বিতীয় প্রণালী। প্রথম সমীকরণ হইতে, $4x-7=3y$,

বা, $y=\frac{4x-7}{3} \quad \cdots \quad \cdots \quad (i)$

দ্বিতীয় সমীকরণে y এর পরিবর্তে $\frac{4x-7}{3}$ ধরিয়া,

$2x+\frac{5.(4x-7)}{3}=23$ বা, $6x+20x-35=69$

বা, $26x=104$ $\therefore$ $x=4$

(i) এ, $x=4$ ধরিয়া, $y=\frac{4.4-7}{3}=\frac{9}{3}=3,$ $\therefore$ $x=4,$ $y=3.$

উদা. 2. সমাধান কর : $\frac{3}{x}+\frac{5}{y}=8\frac{1}{2}$

$$\frac{4}{x}-\frac{3}{y}=6\frac{1}{2}$$

$\frac{1}{x}$ এর পরিবর্তে p এবং $\frac{1}{y}$ এর পরিবর্তে q ধরিলে সমীকরণ দুইটি হইবে

$$3p+5q=\tfrac{17}{2} \quad \cdots \quad \cdots \quad (i)$$

$$4p-3q=\tfrac{13}{2} \quad \cdots \quad \cdots \quad (ii)$$

(i) হইতে, $5q=\frac{17}{2}-3p=\frac{17-6p}{2},$ $\therefore$ $q=\frac{17-6p}{10}$ $\cdots$ $\cdots$ (iii)

(ii) হইতে, $4p-\frac{13}{2}=3q,$ বা $\frac{8p-13}{2}=3q,$ $\therefore$ $q=\frac{8p-13}{6}$ (iv)

(iii) ও (iv) তুলনা করিয়া, $\frac{17-6p}{10}=\frac{8p-13}{6}$

বা $80p-130=102-36p$ বা, $116p=232,$ $\therefore$ $p=2$

(iii) এ, $p=2$ ধরিলে, $q=\frac{17-6.2}{10}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$

এখন $p=2$ অর্থাৎ $\frac{1}{x}=2,$ $\therefore$ $x=\frac{1}{2}$

এবং $q=\frac{1}{2}$ অর্থাৎ $\frac{1}{y}=\frac{1}{2},$ $\therefore$ $y=2,$ $\therefore$ $x=\frac{1}{2},$ $y=2.$

উদা. 1 এর দ্বিতীয় প্রণালীতেও ইহার সমাধান করা চলে।

উদা. 3. সমাধান কর : $xy+3y=20$
$5y-4=2xy$

প্রথম প্রণালী। দুইটি সমীকরণেরই উভয় পক্ষকে y দ্বারা ভাগ করিয়া,

$$x+3=\frac{20}{y}\ ;\ \ 5-\frac{4}{y}=2x$$

$\frac{1}{y}$ এর পরিবর্তে p ধরিলে সমীকরণ দুইটি হয়

$$x+3=20p \quad \cdots \quad \cdots \quad (i)$$
$$5-4p=2x \quad \cdots \quad \cdots \quad (ii)$$

(i) হইতে $x=20p-3$ … … (iii)

(ii) হইতে $x=\frac{5-4p}{2}$ … … (iv)

(iii) ও (iv) তুলনা করিয়া,

$$20p-3=\frac{5-4p}{2} \quad \text{বা,} \quad 40p-6=5-4p$$

বা, $44p=11$ বা, $p=\frac{1}{4}$ অর্থাৎ $\frac{1}{y}=\frac{1}{4}$ $\therefore$ $y=4$.

(iii) এ, p এর পরিবর্তে $\frac{1}{4}$ বসাইয়া, $x=20.\frac{1}{4}-3=5-3=2$.

$$\therefore \ x=2,\ \ y=4.$$

দ্বিতীয় প্রণালী। দুইটি সমাকরণের উভয় পক্ষকে y দ্বারা ভাগ করিয়া,

$$x+3=\frac{20}{y}\ ;\quad 5-\frac{4}{y}=2x$$

$\frac{1}{y}$ এর পরিবর্তে p ধরিলে, সমীকরণ দুইটি হয়

$$x+3=20p \quad \cdots \quad \cdots \quad (i)$$
$$5-4p=2x \quad \cdots \quad \cdots \quad (ii)$$

(i) হইতে $x=20p-3$ … … (iii)

(ii) এ x এর পরিবর্তে $20p-3$ ধরিয়া,

$$5-4p=2(20p-3)$$

বা, $-4p-40p=-6-5$ বা, $-44p=-11$ $\therefore$ $p=\frac{1}{4}$

অর্থাৎ $\frac{1}{y}=\frac{1}{4}$ $\therefore$ $y=4$

(iii) এ, $p=\frac{1}{4}$ ধরিলে, $x=20.\frac{1}{4}-3=5-3=2$ $\therefore$ $x=2,\ y=4.$

উদা. 4. সমাধান কর : $a(x+y)=b(x-y)=2ab.$

$$a(x+y)=2ab \quad \therefore \quad x+y=2b \qquad \cdots \quad \cdots \quad (i)$$

$$b(x-y)=2ab \quad \therefore \quad x-y=2a \qquad \cdots \quad \cdots \quad (ii)$$

(i) হইতে $y=2b-x$ $\qquad \cdots \quad \cdots \quad (iii)$

(ii) হইতে $x-2a=y$ $\qquad \cdots \quad \cdots \quad (iv)$

$\therefore \quad 2b-x=x-2a$ বা, $2a+2b=2x, \quad \therefore \quad x=a+b.$

(iii) এ, $x=a+b$ ধরিলে, $y=2b-a-b=b-a$

$\therefore \quad x=a+b, \quad y=b-a.$

প্রশ্নমালা 37

সমাধান কর :

1. $3x-4y=1$
   $4x-3y=6$

2. $3x+5y=69$
   $x-2y=1$

3. $9x-5y=17$
   $13y-2x=20$

4. $5x-3y=1$
   $5y-3x=9$

5. $7x-3y=31$
   $9x-5y=41$

6. $5x-3y=19$
   $3x-5y=5$

7. $2x+y=3y-x=7$

8. $x+2y=3=4x-y$

9. $3x-5y+9=0$
   $5x+2y-16=0$

10. $x+y-3=0$
    $4x-5y+6=0$

11. $x+5y=36, \quad \dfrac{x+y}{x-y}=\dfrac{5}{3}$

12. $\dfrac{x}{3}-\dfrac{2}{y}=1$
    $\dfrac{x}{4}+\dfrac{3}{y}=3$

13. $\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}=2$
    $\dfrac{5}{x}+\dfrac{10}{y}=5\frac{5}{6}$

14. $bx-ay=0$
    $bx+ay=4ab$

15. $ax+by=a^3+b^3$
    $bx-ay=ab(a-b)$

---

3. অপনয়ন প্রণালী (Method of Elimination) দ্বারা সহ-সমীকরণের সমাধান।

সমীকরণ দুইটিকে এরূপ দুইটি রাশি দ্বারা গুণ করিতে হয় যেন গুণফল দুইটিতে অজ্ঞাত রাশি দুইটির একটির সহগ সমান হয়। অতঃপর যোগ বা বিয়োগ করিলে

উক্ত অজ্ঞাত রাশি লোপ পাইবে এবং অপর অজ্ঞাত রাশি বিশিষ্ট একটি সমীকরণ পাওয়া যাইবে। ইহার সমাধান করিলে একটি অজ্ঞাত রাশির মান পাওয়া যাইবে। এই মান প্রদত্ত সমীকরণ দুইটির যে কোন একটিতে বসাইলে অপর অজ্ঞাত রাশির মান পাওয়া যাইবে।

এই প্রণালীকে অপনয়ন প্রণালী বলে।

উদা. 1. সমাধান কর : $4x+3y=18$
$$5x-4y=7$$

$$4x+3y=18 \quad \cdots \quad (i)$$
$$5x-4y=7 \quad \cdots \quad (ii)$$

(i) কে 4 দ্বারা এবং (ii) কে 3 দ্বারা গুণ করিয়া

$$16x+12y=72 \quad \cdots \quad (iii)$$
$$15x-12y=21 \quad \cdots \quad (iv)$$

(iii) ও (iv) যোগ করিয়া, $31x=93$, $\therefore\ x=3$

(i)এ $x=3$ ধরিয়া, $4.3+3y=18$, বা $3y=18-12=6$, $\therefore\ y=2$

$$\therefore\ x=3,\quad y=2$$

উদা. 2. সমাধান কর : $ax+by=c,\quad a^2x+b^2y=c^2$

$$ax+by=c \quad \cdots \quad (i)$$
$$a^2x+b^2y=c^2 \quad \cdots \quad (ii)$$

(i) কে b দ্বারা গুণ করিয়া,

$$abx+b^2y=bc \quad \cdots \quad (iii)$$

(ii) হইতে (iii) বিয়োগ করিয়া, $a^2x-abx=c^2-bc$

বা, $xa(a-b)=c(c-b)$

$$\therefore\ x=\frac{c(c-b)}{a(a-b)}$$

(i)এ, x-এর মান বসাইয়া, $\dfrac{a.c(c-b)}{a(a-b)}+by=c$

বা, $by=c-\dfrac{c(c-b)}{a-b}=\dfrac{ca-bc-c^2+bc}{a-b}=\dfrac{c(a-c)}{a-b}$

বা, $y=\dfrac{c(a-c)}{b(a-b)}$

$$\therefore\ x=\frac{c(c-b)}{a(a-b)},\quad y=\frac{c(a-c)}{b(a-b)}$$

উদা. 3. সমাধান কর : $\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=2, \quad \frac{1}{x}-\frac{1}{2y}=\frac{1}{3}$

ধর $p=\frac{1}{x}$ এবং $q=\frac{1}{y}$

তাহা হইলে সমীকরণ দুইটি হইল $2p+3q=2 \quad \cdots \quad (i)$

$p-\frac{1}{2}q=\frac{1}{3} \quad \cdots \quad (ii)$

(ii) কে 6 দ্বারা গুণ করিয়া, $6p-3q=2 \quad \cdots \quad (iii)$

(i) ও (iii) যোগ করিয়া, $8p=4, \quad \therefore \ p=\frac{1}{2}$

(i)এ, $p=\frac{1}{2}$ ধরিলে, $2.\frac{1}{2}+3q=2$, বা, $3q=1, \quad \therefore \ q=\frac{1}{3}$

অতএব $\frac{1}{x}=\frac{1}{2}, \quad \therefore \ x=2$ এবং $\frac{1}{y}=\frac{1}{3} \quad \therefore \ y=3.$

উদা. 4. সমাধান কর :

$$2x-\tfrac{1}{3}(2y-1)=3\tfrac{5}{24}+\tfrac{1}{4}(3x-2y)$$
$$4y-\tfrac{1}{4}(5-2x)=6-\tfrac{1}{5}(3-2y)$$

প্রথম সমীকরণকে সরল করিয়া,

$48x-16y+8=77+18x-12y$ [উভয় পক্ষকে 24 দ্বারা গুণ করিয়া]

বা, $30x-4y=69 \quad \cdots \quad (i)$

দ্বিতীয় সমীকরণকে সরল করিয়া,

$80y-25+10x=120-12+8y$ [উভয় পক্ষকে 20 দ্বারা গুণ করিয়া]

বা, $10x+72y=133 \quad \cdots \quad (ii)$

(ii) কে 3 দ্বারা গুণ করিয়া,

$30x+216y=399 \quad \cdots \quad (iii)$

(i) হইতে (iii) বিয়োগ করিয়া,

$-220y=-330$, বা, $y=\frac{330}{220}=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$

(ii) এ, $y=\frac{3}{2}$ ধরিয়া, $10x+108=133$,

বা, $10x=25, \quad \therefore \ x=\frac{5}{2}=2\frac{1}{2}$

$\therefore \ x=2\frac{1}{2}, \quad y=1\frac{1}{2}.$

উদা. 5. সমাধান কর : $10x + 15y = 4xy$

$$20x - 40y = xy$$

দুইটি সমীকরণেরই উভয় পক্ষকে xy দ্বারা ভাগ করিয়া

$$\frac{10}{y} + \frac{15}{x} = 4 \quad \cdots \quad (i)$$

$$\frac{20}{y} - \frac{40}{x} = 1 \quad \cdots \quad (ii)$$

(i) কে 2 দ্বারা গুণ করিয়া,

$$\frac{20}{y} + \frac{30}{x} = 8 \quad \cdots \quad (iii)$$

(ii) হইতে (iii) বিয়োগ করিয়া

$$\frac{-70}{x} = -7 \quad \text{বা,} \quad \frac{10}{x} = 1, \quad \therefore \quad x = 10$$

(i)এ, $x = 10$ ধরিয়া,

$$\frac{10}{y} + \tfrac{15}{10} = 4 \quad \text{বা,} \quad \frac{10}{y} = \tfrac{5}{2} \quad \text{বা,} \quad \frac{2}{y} = \tfrac{1}{2}, \quad \therefore \quad y = 4$$

$$\therefore \quad x = 10, \quad y = 4.$$

দ্রষ্টব্য। $\dfrac{1}{x} = p$, এবং $\dfrac{1}{y} = q$ ধরিয়া লইয়াও সমীকরণটি সমাধান করা চলে।

উদা. 6. সমাধান কর : $123x + 138y = 660$

$$138x + 123y = 645$$

প্রথম ও দ্বিতীয় সমীকরণ যোগ করিয়া, $261x + 261y = 1305$

উভয় পক্ষকে 261 দ্বারা ভাগ করিয়া, $x + y = 5 \cdots (i)$

প্রথম সমীকরণ হইতে দ্বিতীয় সমীকরণ বিয়োগ করিয়া, $-15x + 15y = 15$

উভয় পক্ষকে 15 দ্বারা ভাগ করিয়া, $-x + y = 1 \cdots (ii)$

(i) ও (ii) যোগ করিয়া, $2y = 6, \ \therefore \ y = 3$

এবং (i হইতে (ii) বিয়োগ করিয়া, $2x = 4, \ \therefore \ x = 2$

$$\therefore \quad x = 2, \quad y = 3.$$

প্রশ্নমালা 38

সমাধান কর :

1. $x+3y=7$, $5x-y=3$
2. $4x-y=5$, $7x-4y=2$
3. $5x-3y=1$, $3x-5y=-9$
4. $6x-7y=16$, $9x-5y=35$
5. $11x+12y=58$, $12x+11y=57$
6. $15x+16y=140$, $3x-7y=-23$
7. $4x-3y=16$, $6x+5y=62$
8. $15x-7y=115$, $10x+4y=120$
9. $3x+5y-27=0$, $7x-9y-1=0$
10. $13x-10y-8=0$, $5x-4y-2=0$
11. $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y=4$, $2x+\frac{1}{8}y=9$
12. $\frac{3}{4}(x+y)-\frac{1}{3}(x-y+10)=5$, $\frac{1}{5}(5x+y)+\frac{1}{9}(2x-y)=9$
13. $\frac{1}{4}(x+y)-\frac{2}{3}(2x-3y+2)=0$, $\frac{1}{8}(2x+2y)+\frac{1}{3}(3x-y)=6$
14. $101x+102y=508$, $102x+101y=507$
15. $129x+143y=673$, $143x+129y=687$
16. $6x-5y=5x-6y=11$
17. $x+y=3(x-y)=6$
18. $23x-24y-21=0$, $25x-16y-43=0$
19. $4x-\dfrac{5y-4}{3}=1$, $\dfrac{5y-2x}{4}+\dfrac{x}{3}=\frac{1}{2}$
20. $\dfrac{x-y}{3}=\dfrac{y-1}{4}$, $\dfrac{4x-5y}{7}=x-7$
21. $2x+y=3y-x=7$
22. $\dfrac{x+1}{y+1}=\frac{3}{4}$, $\dfrac{x-1}{y-1}=\frac{2}{3}$
23. $x+5y=36$, $\dfrac{x+y}{x-y}=1\frac{2}{3}$
24. $\dfrac{4}{x}+\dfrac{10}{y}=2$, $\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{y}=\frac{19}{20}$
25. $\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{y}=-2$, $4x+5y=60xy$

26. $x+y=2xy$; $x-y=xy$

27. $\dfrac{x+y}{xy}=5$; $\dfrac{x-y}{xy}=9$

28. $\dfrac{x+y}{xy}=12$; $\dfrac{x-y}{xy}=2$

29. $px+qy=r$; $p^2x+q^2y=r^2$

30. $\dfrac{m}{x}-\dfrac{n}{y}=p$; $px=qy$

31. $mx+1=ny+1=my+nx$

32. $\dfrac{7+x}{5}-\dfrac{2x-y}{4}=3y-5$
$\dfrac{5y-7}{2}+\dfrac{4x-3}{6}=18-5x$

33. $\dfrac{12}{x+y}+\dfrac{8}{x-y}=8$
$\dfrac{27}{x+y}-\dfrac{12}{x-y}=3$

34. $\dfrac{x-a}{c-a}+\dfrac{y-b}{c-a}=1$
$\dfrac{x+a}{c}+\dfrac{y-a}{a-b}=\dfrac{a}{c}$

35. $\dfrac{x-y}{a}+\dfrac{x+y}{b}=c$
$\dfrac{x-y}{b}-\dfrac{x+y}{a}=c$

---

4. বজ্র-গুণন প্রণালী। (Method of Cross Multiplication)

উদা. 1. যদি $a_1x+b_1y+c_1=0$ এবং $a_2x+b_2y+c_2=0$ হয়, এবং a_1, b_1, c_1, এবং a_2, b_2, c_2, এরূপ সম্বন্ধবিশিষ্ট হয় যে $b_1c_2-b_2c_1$, $c_1a_2-c_2a_1$ এবং $a_1b_2-a_2b_1$ এর মান-0 না হয়, তাহা হইলে x ও y এর মান নির্ণয় কর।

প্রথম সমীকরণকে c_2 দ্বারা এবং দ্বিতীয় সমীকরণকে c_1 দ্বারা গুণ করিয়া,

$$c_2a_1x+b_1c_2y+c_1c_2=0 \quad \cdots \quad (i)$$
$$c_1a_2x+b_2c_1y+c_1c_2=0 \quad \cdots \quad (ii)$$

(i) হইতে (ii) বিয়োগ করিয়া,

$$(c_2a_1-c_1a_2)x+(b_1c_2-b_2c_1)y=0$$

বা, $-(c_1a_2-c_2a_1)x=-(b_1c_2-b_2c_1)y$

বা, $(c_1a_2-c_2a_1)x=(b_1c_2-b_2c_1)y$

$$\therefore \quad \frac{x}{b_1c_2-b_2c_1}=\frac{y}{c_1a_2-c_2a_1} \quad \cdots \quad (iii)$$

আবার, প্রথম সমীকরণকে a_2 দ্বারা ও দ্বিতীয় সমীকরণকে a_1 দ্বারা গুণ করিয়া,

$$a_1a_2x+a_2b_1y+c_1a_2=0 \quad \cdots \quad (iv)$$
$$a_1a_2x+a_1b_2y+c_2a_1=0 \quad \cdots \quad (v)$$

(iv) হইতে (v) বিয়োগ করিয়া,

$$(a_2b_1 - a_1b_2)y + (c_1a_2 - c_2a_1) = 0$$

বা, $-(a_1b_2 - a_2b_1)y = -(c_1a_2 - c_2a_1)$

বা, $(a_1b_2 - a_2b_1)y = (c_1a_2 - c_2a_1)$

$$\therefore \quad \frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1} \quad \cdots \quad (vi)$$

$\therefore$ (iii) ও (vi) হইতে

$$\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1} \quad \cdots \quad (vii)$$

$\therefore$ $(a_1b_2 - a_2b_1)x = b_1c_2 - b_2c_1$

এবং $(a_1b_2 - a_2b_1)y = c_1a_2 - c_2a_1$

$$\therefore \quad x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \quad y = \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

উল্লিখিত উদাহরণ হইতে ইহাও প্রমাণিত হইল যে,

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

এবং $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ হইলে,

$$\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$ হয়।*

উক্ত প্রণালীকে **বজ্র-গুণন প্রণালী** (Method of Cross Multiplication) বলে। এই প্রণালীটি বিশেষ প্রয়োজনীয়। ইহার সাহায্যে দুই অজ্ঞাত রাশির সহ-সমীকরণ অতি সহজে সমাধান করা যায়। ফলটি উত্তমরূপে স্মরণ রাখা প্রয়োজন। স্মরণ রাখার উপায় বলা হইতেছে।

x এর নীচের রাশি হইবে প্রথম সমীকরণের y-এর সহগ ও দ্বিতীয় সমীকরণের ধ্রুবক পদের গুণফল এবং দ্বিতীয় সমীকরণের y-এর সহগ ও প্রথম সমীকরণের ধ্রুবক পদের গুণফলের অন্তর।

y এর নীচের রাশি হইবে দ্বিতীয় সমীকরণের x-এর সহগ ও প্রথম সমীকরণের ধ্রুবক পদের গুণফল এবং প্রথম সমীকরণের x-এর সহগ ও দ্বিতীয় সমীকরণের ধ্রুবক পদের গুণফলের অন্তর।

---

*সমীকরণ দুইটি $a_1x+b_1y+c_1z=0$

এবং $a_2x+b_2y+c_2z=0$ হইলে, x, y এবং z-এর সম্বন্ধ নিম্নরূপ হইবে :

$$\frac{x}{b_1c_2-b_2c_1} = \frac{y}{c_1a_2-c_2a_1} = \frac{z}{a_1b_2-a_2b_1}$$

1-এর নীচের রাশি হইবে প্রথম সমীকরণের x-এর সহগ ও দ্বিতীয় সমীকরণের y-এর সহগের গুণফল এবং দ্বিতীয় সমীকরণের x-এর সহগ ও প্রথম সমীকরণের y-এর সহগের গুণফলের অন্তর।



পার্শ্বের তীর-প্রদর্শিত ক্রম লক্ষ্য কর।

1. যখন x-এর নীচের রাশি লিখিবে, x-এর স্তম্ভ বাদে অবশিষ্ট দুই স্তম্ভের চারিটি পদ হইতে প্রথমে প্রথম তীর প্রদর্শিত ক্রমে y-এর সহগ ও ধ্রুবক পদের গুণফল লিখিবে এবং তারপর বিয়োগ চিহ্ন দিয়া অবশিষ্ট y-এর সহগ ও ধ্রুবক পদের গুণফল লিখিবে।

2. যখন y-এর নীচের রাশি লিখিবে, y-এর স্তম্ভ বাদে অবশিষ্ট দুই স্তম্ভের চারিটি পদ হইতে প্রথমে দ্বিতীয় তীর প্রদর্শিত ক্রমে x-এর সহগ ও ধ্রুবক পদের গুণফল লিখিবে এবং তারপর বিয়োগ চিহ্ন দিয়া অবশিষ্ট x-এর সহগ ও ধ্রুবক পদের গুণফল লিখিবে।

3. যখন 1-এর নীচের রাশি লিখিবে, ধ্রুবকপদের স্তম্ভ বাদে অবশিষ্ট দুই স্তম্ভের চারিটি পদ হইতে প্রথমে তীর প্রদর্শিত ক্রমে x ও y-এর সহগের গুণফল লিখিবে এবং তারপর বিয়োগ চিহ্ন দিয়া অবশিষ্ট x ও y-এর সহগের গুণফল লিখিবে।

বজ্রগুণন প্রণালীতে সমাধান আরম্ভ করিবার পূর্বে দুইটি সমীকরণকেই $ax+by+c=0$ এই আকারে সাজাইয়া লইতে হয়।

উদা. 2. সমাধান কর : $4x+3y=18$

$$3x-2y=5$$

$$4x+3y-18=0$$

$$3x-2y-5=0$$

বজ্র-গুণন প্রণালী দ্বারা,

$$\frac{x}{3(-5)-(-2)(-18)}=\frac{y}{3(-18)-4(-5)}=\frac{1}{4(-2)-(3\times 3)}$$

বা, $\dfrac{x}{-15-36}=\dfrac{y}{-54+20}=\dfrac{1}{-8-9}$ বা, $\dfrac{x}{-51}=\dfrac{y}{-34}=\dfrac{1}{-17}$

বা, $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{1}{1}$ [-17 দ্বারা গুণ করিয়া]

এখন $\dfrac{x}{3}=\dfrac{1}{1}$, $\therefore\ x=3$; $\dfrac{y}{2}=\dfrac{1}{1}$, $\therefore\ y=2$.

উদা. 3. সমাধান কর : $\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=13$; $\frac{5}{x}-\frac{2}{y}=4$

$$2.\frac{1}{x}+3.\frac{1}{y}-13=0,$$

$$5.\frac{1}{x}-2.\frac{1}{y}-4=0$$

বজ্র-গুণন প্রণালী দ্বারা,

$$\frac{\frac{1}{x}}{3.(-4)-(-2).(-13)}=\frac{\frac{1}{y}}{5.(-13)-2.(-4)}=\frac{1}{2.(-2)-(5).3}$$

বা, $\frac{\frac{1}{x}}{-12-26}=\frac{\frac{1}{y}}{-65+8}=\frac{1}{-4-15}$ বা, $\frac{\frac{1}{x}}{-38}=\frac{\frac{1}{y}}{-57}=\frac{1}{-19}$

বা, $\frac{\frac{1}{x}}{2}=\frac{\frac{1}{y}}{3}=\frac{1}{1}$, $\therefore \frac{1}{x}=2$ এবং $\frac{1}{y}=3$ $\therefore x=\frac{1}{2}$ এবং $y=\frac{1}{3}$

$\frac{1}{x}$ এর পরিবর্তে p এবং $\frac{1}{y}$ এর পরিবর্তে q ধরিয়াও সমাধান করা চলে।

প্রশ্নমালা 39

বজ্র-গুণন প্রণালীতে সমাধান কর :

1. $2x+y-7=0$, $3x-4y-5=0$
2. $5x-7y+1=0$, $6x-10y+6=0$
3. $3x-y-16=0$, $2x+9y-1=0$
4. $6x+y+8=0$, $x-y-1=0$
5. $2x-y=0$, $3x+4y=44$
6. $3x+4y=29$, $8x-y=19$
7. $3x+4y=8x-y=21$
8. $6x+4y=5x+6y=48$
9. $\frac{3}{x}+\frac{4}{y}-18=0$, $\frac{2}{x}-\frac{3}{y}+5=0$
10. $\frac{12}{x}-\frac{5}{y}-5=0$, $\frac{3}{x}+\frac{10}{y}-3\frac{1}{2}=0$
11. $mx+ny-2=0$, $m^2x+n^2y-(m+n)=0$
12. $ax+by-(a^2+b^2)=0$, $bx+ay-2ab=0.$

দশম অধ্যায়

বিবিধ বিষয়ক প্রশ্নের সমাধানে সমীকরণের প্রয়োগ

1. সমীকরণের সাহায্যে নানাবিধ সমস্যামূলক প্রশ্নের সমাধান-প্রণালী উদাহরণ দ্বারা প্রদর্শিত হইতেছে। সহজতর প্রশ্নের সমাধানে সমীকরণের প্রয়োগের বিষয় আলোচিত হইয়াছে। এস্থলে অপেক্ষাকৃত দুরূহ প্রশ্নের সমাধানে সরল ও সহ-সমীকরণের প্রয়োগের বিষয় আলোচিত হইবে।

(1) অঙ্ক ও সংখ্যা :

উদা. 1. দুই অঙ্কে গঠিত কোন সংখ্যার অঙ্কসমষ্টি সংখ্যাটির এক-সপ্তমাংশ। সংখ্যাটি হইতে 27 বিয়োগ করিলে, অঙ্ক দুইটি পরস্পর স্থান পরিবর্তন করে। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

মনে কর একক স্থানের অঙ্কটি y এবং দশক স্থানের অঙ্কটি x.

সুতরাং নির্ণেয় সংখ্যা $= 10x + y$.

প্রশ্নের শর্ত অনুসারে, $10x + y = 7(x + y)$ ... (i)

এবং $10x + y - 27 = 10y + x$ ... (ii)

এখন, (i) হইতে $3x - 6y = 0$ বা, $x - 2y = 0$

এবং (ii) হইতে $9x - 9y = 27$ বা, $x - y = 3$

$$x - 2y = 0$$
$$x - y = 3$$

বিয়োগ করিয়া, $-y = -3$, $\therefore$ $y = 3$, $\therefore$ $x = 6$

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যাটি $= 10x + y = 10.6 + 3 = 63$

উদা. 2. তিন অঙ্কে গঠিত একটি সংখ্যার মধ্যস্থলের অঙ্কটি 0 শূন্য এবং অঙ্কসমষ্টি 8 ; অঙ্কগুলি উল্টাইয়া নূতন সংখ্যা গঠিত করিলে উহা পূর্বসংখ্যা অপেক্ষা 198 অধিক হইবে। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

মনে কর শতকের অঙ্ক x, দশকের অঙ্ক 0 এবং এককের অঙ্ক y.

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা $= 100x + 10 \times 0 + y = 100x + y$

এবং উল্টান সংখ্যা $= 100y + 10 \times 0 + x = 100y + x$

অঙ্কসমষ্টি $= x + 0 + y = x + y = 8$.

প্রশ্নের শর্ত হইতে, $x+y=8.$ ... (i)

এবং $100x+y=100y+x-198$

বা, $99x-99y=-198$ বা, $x-y=-2.$ ... (ii)

এখন (i) এবং (ii) হইতে, $x+y=8$

$x-y=-2$

$\therefore\ 2x=6\quad \therefore\ x=3,\quad \therefore\ y=5$

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা $=100x+y=100\times3+5=305.$

(2) ক্ষেত্রফল ঃ

উদা. 3. একটি আয়তাকার মেঝের ক্ষেত্রফল 192 বর্গফুট। মেঝের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ 2 ফুট করিয়া বেশী হইলে ক্ষেত্রফল 60 বর্গফুট বেশী হইত। মেঝের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর। (C. U. 1942)

মনে কর মেঝের দৈর্ঘ্য $=x$-ফুট এবং প্রস্থ $=y$-ফুট।

সুতরাং ক্ষেত্রফল $=xy$ বর্গফুট $=192$ বর্গফুট (প্রশ্ন অনুসারে)

আবার প্রশ্নের শর্ত অনুসারে, $(x+2)(y+2)=(192+60)$ বা 252

$\therefore\ xy=192$ ... (i)

এবং $(x+2)(y+2)=252$ ... (ii)

বা, $xy+2x+2y+4=252$

বা, $192+2(x+y)+4=252$

বা, $2(x+y)=56,\quad \therefore\ x+y=28$ ... (iii)

এখন, $(x+y)^2-4xy=(x-y)^2$

বা, $28^2-4.192=(x-y)^2$

বা, $784-768=(x-y)^2$

বা, $16=(x-y)^2$

$\therefore\ x-y=4$ ...(iv)

এখন, $x+y=28$

$x-y=4$

$\therefore\ 2x=32$

$\therefore\ x=16$ $\therefore$ নির্ণেয় দৈর্ঘ্য $=16$ ফু.

$\therefore\ y=12$ এবং প্রস্থ $=12$ ফু.

(3) ভগ্নাংশ ঃ

উদা. 4. এমন একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ নির্ণয় কর যাহার লবের সহিত 1 যোগ করিলে লব্ধ ভগ্নাংশটি $\frac{1}{2}$ হয় এবং হরের সহিত 5 যোগ করিলে লব্ধ ভগ্নাংশটি $\frac{1}{3}$ হয়।

মনে কর নির্ণেয় ভগ্নাংশটি $\frac{x}{y}$,

$\therefore$ প্রশ্নের শর্ত অনুসারে, $\frac{x+1}{y}=\frac{1}{2}$ ... (i) এবং $\frac{x}{y+5}=\frac{1}{3}$ ... (ii)

(i) হইতে, $2x+2=y$, বা, $2x-y=-2$

এবং (ii) হইতে, $3x = y+5$, বা, $3x-y=5$

$\therefore -x=-7$

$\therefore x=7 \quad \therefore y=16.$ নির্ণেয় ভগ্নাংশ $=\dfrac{x}{y}=\frac{7}{16}$.

(4) দাঁড় ও স্রোত ঃ

দাঁড় এবং স্রোত বিষয়ক প্রশ্নে নিম্নলিখিত বিষয় কয়টি মনে রাখিতে হইবে ঃ

(1) স্থির জলে দাঁড়ের বেগ এবং নৌকার বেগ সমান ;

(2) স্রোত থাকিলে, স্রোতের অনুকূলে নৌকার বেগ, স্রোত এবং দাঁড়ের বেগের সমষ্টির সমান ; এবং

(3) স্রোতের প্রতিকূলে নৌকার বেগ দাঁড় ও স্রোতের বেগের অন্তরের সমান।

উদা. 5. একখানি নৌকা দাঁড় টানিয়া স্রোতের প্রতিকূলে 15 মাইল এবং স্রোতের অনুকূলে 21 মাইল 8 ঘণ্টায় যাতায়াত করিতে পারে, এবং স্রোতের প্রতিকূলে 24 মাইল এবং অনুকূলে 35 মাইল যাতায়াত করিতে উহার 13 ঘণ্টা লাগে। স্রোত এবং দাঁড়ের বেগ নির্ণয় কর।

মনে কর দাঁড়ের বেগ ঘণ্টায় x মাইল এবং স্রোতের বেগ ঘণ্টায় y মাইল।

সুতরাং প্রশ্নের শর্ত হইতে, $\dfrac{15}{x-y}+\dfrac{21}{x+y}=8 \quad \cdots \quad (i)$

এবং $\dfrac{24}{x-y}+\dfrac{35}{x+y}=13 \quad \cdots \quad (ii)$

সুতরাং, $\dfrac{75}{x-y}+\dfrac{105}{x+y}=40 \quad [\,(i)\times 5\,].$

এবং $\dfrac{72}{x-y}+\dfrac{105}{x+y}=39 \quad [\,(ii)\times 3\,].$

$\therefore \dfrac{3}{x-y}=1$, অর্থাৎ $x-y=3 \quad \cdots \quad (iii)$

(i) সমীকরণে $(x-y)$ এর মান বসাইয়া,

$\dfrac{15}{3}+\dfrac{21}{x+y}=8, \quad \therefore \dfrac{21}{x+y}=3$, অর্থাৎ $x+y=7 \quad \cdots \quad (iv)$

(iii) এবং (iv) হইতে,
$$\begin{array}{l} x-y=3 \\ x+y=7 \\ \hline 2x \quad =10 \end{array} \quad \therefore \quad x=5, \quad \therefore \quad y=2.$$

$\therefore$ নির্ণেয় দাঁড়ের বেগ = ঘণ্টায় 5 মাইল এবং স্রোতের বেগ = ঘণ্টায় 2 মাইল।

(5) সময় ও দূরত্ব ঃ

উদা. 6. কোন নির্দিষ্ট বেগে নির্দিষ্ট পথ চলিতে কোন লোকের $2\frac{1}{2}$ ঘণ্টা সময় লাগিল পথের দূরত্ব এক মাইল কম এবং লোকটির চলার বেগ ঘণ্টায় 2 মাইল বেশী হইলে, তাহার অর্ধ ঘণ্টা সময় কম লাগিত। লোকটির বেগ ঘণ্টায় কত মাইল ?

মনে কর লোকটির বেগ ঘণ্টায় x মাইল, সুতরাং দূরত্ব $= x.2\frac{1}{2}$ মাইল $= \frac{5x}{2}$ মাইল।

প্রশ্নের অপর শর্ত হইতে, $\dfrac{\frac{5x}{2}-1}{x+2} = 2\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$. বা, $\dfrac{5x-2}{2x+4} = 2$,

বা, $5x-2=4x+8$ বা, $x=10$. অর্থাৎ লোকটির বেগ ঘণ্টায় 10 মাইল।

উদা. 7. দুই জন বালক 33 মাইল পথ চলিবার জন্য এক সঙ্গে রওনা হইল। একজন বালক যতক্ষণে 12 মাইল চলে অপর জন ততক্ষণে 11 মাইল চলে। যদি প্রথম বালক দ্বিতীয় বালকের এক ঘণ্টা পূর্বে 33 মাইল অতিক্রম করিয়া থাকে, তাহা হইলে উহাদের বেগ ঘণ্টায় কত মাইল ?

মনে কর, প্রথম বালক ঘণ্টায় x মাইল যায় ; সুতরাং দ্বিতীয় বালক ঘণ্টায় $\frac{11}{12}x$ মাইল যায়।

$\therefore$ 33 মাইল যাইতে প্রথম বালকের $\dfrac{33}{x}$ ঘণ্টা লাগে,

এবং দ্বিতীয় বালকের $\dfrac{33}{\frac{11}{12}x}$ ঘণ্টা লাগে,

$\therefore$ প্রশ্নের শর্ত অনুসারে, $\dfrac{33}{\frac{11}{12}x} = \dfrac{33}{x}+1$ বা, $\dfrac{36}{x} = \dfrac{33}{x}+1$

বা, $\dfrac{36}{x} - \dfrac{33}{x} = 1$ বা, $\dfrac{3}{x} = 1$, $\therefore$ $x=3$.

অর্থাৎ প্রথম বালকের বেগ ঘণ্টায় 3 মাইল, এবং দ্বিতীয় বালকের বেগ ঘণ্টায় $2\frac{3}{4}$ মাইল। $(\because \; 3 \times \frac{11}{12} = \frac{11}{4} = 2\frac{3}{4})$

(6) সময় ও কার্য :

উদা. 8. কোন কাজ A 10 দিনে, B 12 দিনে এবং C 15 দিনে সম্পন্ন করিতে পারে। তিন জনে একত্র কাজটি আরম্ভ করিল, কিন্তু কাজটি শেষ হইবার 2 দিন পূর্বে A চলিয়া গেল এবং B তাহার পরের দিন চলিয়া গেল। কাজটি শেষ হইতে মোট কত দিন লাগিল ?

মনে কর, x দিনে কাজটি শেষ হইল।

সুতরাং A কাজ করিল $(x-2)$ দিন, B, $(x-1)$ দিন এবং C, x দিন।

সুতরাং A করিল কাজটির $\frac{x-2}{10}$ অংশ, B করিল কাজটির $\frac{x-1}{12}$ অংশ,

এবং C করিল কাজটির $\frac{x}{15}$ অংশ ;

তাহা হইলে, $\frac{x-2}{10}+\frac{x-1}{12}+\frac{x}{15}=1$ (পূর্ণ কাজ)

বা, $\frac{6x-12+5x-5+4x}{60}=1$. বা, $15x-17=60$

বা, $15x=77$, $\therefore$ $x=\frac{77}{15}=5\frac{2}{15}$ অর্থাৎ নির্ণেয় সময় $=5\frac{2}{15}$ দিন।

(7) লাভ ও ক্ষতি :

উদা. 9. একটি দ্রব্য 12 % লাভে বিক্রয় করা হইল। যদি দ্রব্যটির ক্রয়-মূল্য 10 % কম এবং বিক্রয়-মূল্য $2\frac{1}{2}$ টাকা বেশী হইত, তাহা হইলে 30 % লাভ হইত। দ্রব্যটির ক্রয়-মূল্য কত ?

মনে কর দ্রব্যটির ক্রয়-মূল্য x টাকা.

$\therefore$ 12 % লাভে বিক্রয়-মূল্য $=x.\frac{112}{100}$ টাকা,

10 % কমে ক্রয়-মূল্য $=x.\frac{90}{100}$ টাকা,

30 % লাভে উহার বিক্রয়-মূল্য $=x.\frac{90}{100}\times\frac{130}{100}$ টাকা।

এখন, প্রশ্নের শর্ত অনুসারে উভয় বিক্রয়-মূল্যের অন্তর $2\frac{1}{2}$ টাকা।

সুতরাং $x.\frac{90}{100}\times\frac{130}{100}-x.\frac{112}{100}=2\frac{1}{2}$

বা. $x.\frac{117}{100}-x.\frac{112}{100}=\frac{5}{2}$ বা, $x\cdot\frac{5}{100}=\frac{5}{2}$, $x=\frac{5}{2}\times\frac{100}{5}=50$

অর্থাৎ দ্রব্যটির ক্রয়-মূল্য $=50$ টাকা।

(8). ঘড়ি ও সময় :

ঘড়ি সম্বন্ধীয় প্রশ্নের সমাধানে নিম্নোক্ত বিষয় কয়টি স্মরণ রাখা প্রয়োজন—

(*i*) মিনিটের কাঁটা ঘণ্টার কাঁটার 12 গুণ দ্রুত চলে।

(*ii*) যে কোন পূর্ণ ঘণ্টা বাজিবার সময় মিনিটের কাঁটা 12-টার দাগে এবং ঘণ্টার কাঁটা পূর্ণ ঘণ্টা সূচক দাগের উপর থাকে ; যেমন 4-টার সময় মিনিটের কাঁটা 12-টার দাগে এবং ঘণ্টার কাঁটা 4-টার দাগের উপর থাকে।

(*iii*) ঘড়ির কাঁটা দুইটি সমকোণে অবস্থিত হইলে উভয় কাঁটার মধ্যে 15 অথবা 45 মিনিট-ঘর ব্যবধান থাকে, কাঁটা দুইটি পরস্পর বিপরীতমুখী হইলে উভয় কাঁটার মধ্যে 30 মিনিট-ঘর ব্যবধান থাকে।

(*iv*) কাঁটা দুইটি পরস্পর মিলিত হইলে উহাদের মধ্যে কোন ব্যবধান থাকে না।

উদা. 10. 4-টা ও 5-টার মধ্যে ঘড়ির ঘণ্টা ও মিনিটের কাঁটা দুইটি কখন কখন সমকোণে অবস্থিত থাকিবে ?

মনে কর, 4-টা বাজিয়া x-মিনিটের সময় কাঁটা দুইটি সমকোণে অবস্থিত হইবে। সুতরাং উহাদের মধ্যে 15 মিনিট-ঘর ব্যবধান হইবে।

4-টার সময় মিনিটের কাঁটা ঘণ্টার কাঁটার 20 মিনিট-ঘর পশ্চাতে থাকে ; সুতরাং মিনিটের কাঁটা যদি ঘণ্টার কাঁটা অপেক্ষা 5 মিনিট-ঘর বেশী যায় তবে উভয় কাঁটার মধ্যে 15 মিনিট-ঘর ব্যবধান হইবে।

আবার মিনিটের কাঁটা x মিনিট-ঘর চলিলে ঘণ্টার কাঁটা চলে $\frac{x}{12}$ মিনিট-ঘর।

$\therefore\ x-\dfrac{x}{12}=5,$ বা, $12x-x=60,$ বা, $11x=60,$ $x=\frac{60}{11}=5\frac{5}{11}.$

$\therefore$ 4-টা বাজিয়া $5\frac{5}{11}$ মিনিটের সময় উভয় কাঁটা সমকোণে অবস্থিত হইবে।

আবার, মিনিটের কাঁটা ঘণ্টার কাঁটা অপেক্ষা $(20+15)$ বা 35 মিনিট-ঘর বেশী গেলে মিনিটের কাঁটা পুনরায় ঘণ্টার কাঁটার সহিত সমকোণে অবস্থিত হইবে।

$\therefore\ x-\dfrac{x}{12}=35,$ বা, $11x=420,$ $\therefore\ x=\frac{420}{11}=38\frac{2}{11}.$

অর্থাৎ 4-টা বাজিয়া $38\frac{2}{11}$ মিনিটের সময় পুনরায় কাঁটা দুইটি সমকোণে অবস্থিত হইবে।

$\therefore$ নির্ণেয় উত্তর = 4-টা বাজিয়া $5\frac{5}{11}$ মি. এবং 4-টা বাজিয়া $38\frac{2}{11}$ মি.

উদা. 11. এক ব্যক্তি 3-টা হইতে 4-টার মধ্যে বাড়ী হইতে বাহির হইয়া 5-টা হইতে 6-টার মধ্যে ফিরিয়া আসিয়া দেখিল ঘড়ির কাঁটা দুইটি পরস্পর স্থান পরিবর্তন করিয়াছে। লোকটি কখন বাহির হইয়াছিল, কখন ফিরিয়া আসিয়াছিল এবং কতক্ষণ বাড়ীর বাহিরে ছিল ?

মনে কর লোকটি 3-টা বাজিয়া x মিনিটের সময় বাহির হইয়াছিল এবং 5-টা বাজিয়া y মিনিটের সময় ফিরিয়া আসিয়াছিল।

3-টা x মিনিটের সময় মিনিটের কাঁটা ও ঘণ্টার কাঁটা 12 দাগ হইতে যথাক্রমে x মিনিট-ঘর ও $\left(15+\frac{x}{12}\right)$ মিনিট-ঘর দূরে থাকে, এবং 5-টা y মিনিটের সময় মিনিটের কাঁটা ও ঘণ্টার কাঁটা 12 দাগ হইতে যথাক্রমে y মিনিট-ঘর ও $\left(25+\frac{y}{12}\right)$ মিনিট-ঘর দূরে থাকে।

সুতরাং, প্রশ্নের শর্ত অনুসারে, $x=25+\frac{y}{12}$ বা, $12x-y=300 \quad (i)$

এবং $y=15+\frac{x}{12}$ বা, $-x+12y=180 \quad (ii)$

(i) এবং (ii) হইতে,
$$\begin{array}{rl|rl} & 144x-12y=3600 & & 12x-y=300 \\ & -x+12y=180 & & -12x+144y=2160 \\ \hline \therefore & 143x=3780 & \therefore & 143y=2460 \end{array}$$

$\therefore \quad x=\frac{3780}{143}=26\frac{62}{143}$; $\quad y=\frac{2460}{143}=17\frac{29}{143}$

5 ঘ. $17\frac{29}{143}$ মি. $-$ 3 ঘ. $26\frac{62}{143}$ মি. $=$ 1 ঘ. $50\frac{10}{13}$ মি.

$\therefore$ লোকটি (1) বাহির হইয়াছিল 3-টা. $26\frac{62}{143}$ মিনিটের সময়,

(2) ফিরিয়া আসিয়াছিল 5-টা. $17\frac{29}{143}$ মিনিটের সময়,

এবং (3) বাহিরে ছিল 1 ঘণ্টা $50\frac{10}{13}$ মিনিট।

(9) ব্যূহ রচনা। কতকগুলি লোককে যদি এমনভাবে সমান্তরাল সারিতে সাজান যায় যে প্রত্যেক সারির লোকসংখ্যা মোট সারির সংখ্যার সমান হয় তাহা হইলে ঐ লোকগুলিকে একটি **বর্গাকৃতি ঘনব্যূহে** (Solid Square) সাজান বলা যায়।

এখন, যদি 5টি সারির প্রত্যেক সারিতে 5 জন কয়িয়া লোক থাকে তাহা হইলে বর্গাকৃতি ঘনব্যূহে মোট 5^2 বা 25 জন লোক থাকিবে। তদ্রূপ 6টি সারির প্রত্যেক সারিতে 6 জন করিয়া লোক হইলে উক্ত ব্যূহে 6^2 বা 36 জন লোক থাকিবে।

সুতরাং x-সংখ্যক সারির প্রত্যেক সারিতে x-জন করিয়া লোক হইলে, রচিত ঘনব্যূহের লোকসংখ্যা হইবে x^2.

7টি সারির প্রত্যেক সারিতে 7 জন করিয়া লোক লইয়া একটি ঘনব্যূহ রচনা করা হইয়াছে। তারকা চিহ্নগুলির প্রত্যেকটিতে এক একটি লোক সূচিত করিতেছে।

নীচের চিত্রটি একটি বর্গাকৃতি ঘনব্যূহ যাহাতে 7টি সারি আছে এবং প্রত্যেক সারিতে 7 জন করিয়া লোক আছে।



এখন, ঐ ব্যূহ হইতে রেখাবেষ্টিত স্থানের লোকগুলিকে সরাইয়া লইলে চারিদিকে দুইটি করিয়া সারি থাকিবে, কিন্তু মধ্যস্থল লোকশূন্য হইবে। এইরূপ ব্যূহকে **শূন্য-গর্ভ বর্গব্যূহ** (Hollow Square) বলে। শূন্য গর্ভ বর্গব্যূহে যে কয়টি সারি থাকে তাহাকে তত গভীরতা (deep) বিশিষ্ট শূন্য-গর্ভ বর্গ-ব্যূহ বলা হয়। উক্ত চিত্রে দুইটি সারি আছে। সুতরাং উহাকে দুই গভীরতা বিশিষ্ট শূন্য-গর্ভ বর্গব্যূহ (Hollow Square 2 deep) বলা যাইতে পারে।

যে অংশের লোকগুলিকে সরাইয়া দেওয়া হইল, দেখ, তাহাদের তিনটি সারির প্রত্যেক সারিতে তিনজন করিয়া লোক আছে। সুতরাং যে লোক সরান হইল তাহাদের সংখ্যা 3^2 অর্থাৎ $(7-2\times2)^2$.

সুতরাং শূন্যগর্ভ বর্গব্যূহটির মোট লোকসংখ্যা $=7^2-(7-2\times2)^2$.

= (সম্মুখ সারির লোকসংখ্যা $)^2$ − (সম্মুখ সারির লোকসংখ্যা − সারির দ্বিগুণ লোকসংখ্যা $)^2$।

সাধারণ ভাবে, সম্মুখ সারিতে x সংখ্যক লোক এবং গভীরতা d হইলে,

শূন্য-গর্ভ বর্গ-ব্যূহের লোকসংখ্যা $=\boldsymbol{x^2-(x-2d)^2}$.

উদা. 12. কোন সৈন্যাধ্যক্ষ তাঁহার সৈন্যদলকে লইয়া 3 গভীরতা বিশিষ্ট একটি শূন্যগর্ভ বর্গব্যূহ রচনা করিতে পারেন। আরও 800 সৈন্য থাকিলে তিনি উহাদিগকে লইয়া 4 গভীরতা বিশিষ্ট একটি শূন্যগর্ভ বর্গব্যূহ রচনা করিতে পারিতেন। উভয় ক্ষেত্রেই সম্মুখ সারিতে সমানসংখ্যক সৈন্য থাকিত। ঐ সৈন্যদলে কত সৈন্য ছিল?

মনে কর উভয় ক্ষেত্রেই সম্মুখ সারির সৈন্যসংখ্যা x.

$\therefore$ প্রথম ক্ষেত্রে সৈন্যসংখ্যা $= x^2 - (x - 3 \times 2)^2$

$= x^2 - (x-6)^2$

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে সৈন্যসংখ্যা $= x^2 - (x - 4 \times 2)^2$

$= x^2 - (x-8)^2$

কিন্তু দ্বিতীয় ক্ষেত্রে সৈন্যসংখ্যা 800 বেশী ;

সুতরাং $x^2 - (x-6)^2 = x^2 - (x-8)^2 - 800$

বা, $x^2 - x^2 + 12x - 36 = x^2 - x^2 + 16x - 64 - 800$

বা. $-4x = -828, \quad \therefore \quad x = 207$

$\therefore$ মোট সৈন্যসংখ্যা $= x^2 - (x-6)^2 = 207^2 - (207-6)^2$

$= 207^2 - 201^2 = 408 \times 6 = 2448.$

উদা. 13. একদল সৈন্যকে 10 গভীরতা বিশিষ্ট শূন্যগর্ভ বর্গব্যূহে সাজান যাইত। আরও 1600 সৈন্য বেশী হইলে উহাদিগকেও 10 গভীরতা বিশিষ্ট শূন্যগর্ভ বর্গব্যূহে সাজান যাইত ; কিন্তু শেষোক্ত রচনায় সম্মুখ সারিতে পূর্ব রচনায় সম্মুখ সারির সৈন্যসংখ্যার দ্বিগুণ সৈন্য থাকিত। ঐ দলে কত সৈন্য ছিল?

মনে কর প্রথম ক্ষেত্রে সম্মুখ সারির সৈন্যসংখ্যা x.

$\therefore$ মোট সৈন্যসংখ্যা $= x^2 - (x-20)^2$

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে মোট সৈন্যসংখ্যা $= (2x)^2 - (2x-20)^2$

$\therefore$ প্রশ্নের শর্ত অনুসারে, $x^2 - (x-20)^2 = (2x)^2 - (2x-20)^2 - 1600$

বা, $x^2 - x^2 + 40x - 400 = 4x^2 - 4x^2 + 80x - 400 - 1600$

বা, $-40x = -1600 \quad \therefore \quad x = 40$

$\therefore$ নির্ণেয় সৈন্যসংখ্যা $= 40^2 - (40-20)^2 = 40^2 - 20^2$

$= (40+20)(40-20) = 60 \times 20 = 1200.$

(10) বিবিধ বিষয়ক ঃ

উদা. 14. কোন লোক প্রতিটি 2 আনা এবং প্রতিটি 1 আনা 3 পাই দরে দুই প্রকারের সমান সংখ্যক আম ক্রয় করিল। উভয় প্রকার আমে সমান খরচ করিলে সে আরও 9টি আম বেশী পাইত। প্রত্যেক প্রকারের কয়টি করিয়া আম ক্রয় করা হইয়াছিল ?

মনে কর প্রত্যেক প্রকারের x-সংখ্যক আম ক্রয় করা হইয়াছিল।

সুতরাং প্রথম প্রকার আমের মূল্য $2x$ আনা এবং দ্বিতীয় প্রকার আমের মূল্য $\frac{5}{4}x$ আনা।

$$\therefore \text{ মোট খরচ} = \left(2x + \frac{5x}{4}\right) \text{ আনা} = \frac{13x}{4} \text{ আনা।}$$

উভয় ক্ষেত্রে সমান খরচ হইলে প্রত্যেক প্রকার আমে খরচ হইত $\frac{13x}{8}$ আনা।

উক্ত মূল্যে প্রথম প্রকারের আম পাওয়া যাইত $\frac{13x}{8 \times 2}$ টি $= \frac{13x}{16}$ টি,

এবং দ্বিতীয় প্রকারের আম পাওয়া যাইত $\frac{13x}{8} \times \frac{4}{5}$ টি $= \frac{13x}{10}$ টি,

$$\therefore \frac{13x}{16} + \frac{13x}{10} = 2x + 9$$

বা, $65x + 104x = 160x + 720$ বা, $9x = 720$, $\therefore x = 80$

অর্থাৎ প্রত্যেক প্রকার আমের সংখ্যা $= 80$.

উদা. 15. 9 খানি চেয়ার ও 5 খানি টেবিলের মূল্য 90 টাকা, এবং 5 খানি চেয়ার ও 4 খানি টেবিলের মূল্য 51 টাকা। 6 খানি চেয়ার ও 3 খানি টেবিলের মূল্য কত ?

মনে কর প্রত্যেক চেয়ারের মূল্য x টাকা এবং প্রত্যেক টেবিলের মূল্য y টাকা।

$\therefore 9x + 5y = 90$ ......(i)

এবং $5x + 4y = 61$ ......(ii)

সমাধান করিয়া, $x = 5$, $y = 9$

$\therefore$ 6 চেয়ার এবং 3 টেবিলের মূল্য $= 6 \times 5 + 3 \times 9 = 30 + 27 = 57$ টাকা।

প্রশ্নমালা 40

1. দুই অঙ্কের কোন সংখ্যা উহার অঙ্ক-সমষ্টির 8 গুণ। সংখ্যাটি হইতে 45 বিয়োগ করিলে বিয়োগফলে লব্ধ সংখ্যার অঙ্ক দুইটি পরস্পর স্থান পরিবর্তন করে। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

2. এক শত অপেক্ষা ন্যূন কোন সংখ্যার অঙ্ক-সমষ্টি 6. অঙ্ক দুইটি উল্টাইয়া নূতন সংখ্যা গঠিত করিলে উহা মূল সংখ্যা অপেক্ষা 18 কম হইবে। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

3. দুই অঙ্কের কোন সংখ্যার সহিত উহার অঙ্ক দুইটি উল্টাইয়া গঠিত নূতন সংখ্যা যোগ করিলে যোগফল হয় 110. যদি অঙ্ক দুইটির অন্তর 6 হয়, তাহা হইলে সংখ্যাটি কত?

4. দুই অঙ্কে গঠিত কোন সংখ্যার অঙ্ক দুইটির অন্তর 2. সংখ্যাটি হইতে অঙ্ক দুইটির সমষ্টির $\frac{3}{2}$ গুণ বিয়োগ করিলে, অঙ্ক দুইটি পরস্পর স্থান পরিবর্তন করে। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

5. তিন অঙ্কের কোন সংখ্যার অঙ্ক-সমষ্টি 10 এবং দশকের অঙ্কটি অপর দুইটি অঙ্কের সমষ্টির সমান; সংখ্যাটির শতক ও এককের অঙ্কের স্থান পরিবর্তন করিলে যে সংখ্যা গঠিত হয় তাহা মূল সংখ্যা অপেক্ষা 99 বেশী। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

6. একখানি নৌকা দাঁড় টানিয়া স্রোতের প্রতিকূলে 30 মাইল এবং অনুকূলে 44 মাইল 10 ঘণ্টায় যাতায়াত করে, এবং স্রোতের প্রতিকূলে 40 মাইল এবং অনুকূলে 55 মাইল 13 ঘণ্টায় যাতায়াত করে। দাঁড় এবং স্রোতের বেগ ঘণ্টায় কত মাইল নির্ণয় কর।

7. একখানি নৌকা স্রোতের অনুকূলে 10 ঘণ্টায় 70 মাইল গিয়া স্রোতের প্রতিকূলে 70 ঘণ্টায় ফিরিয়া আসিল। স্রোতের বেগ নির্ণয় কর।

8. এক ব্যক্তি স্রোতের অনুকূলে 6 ঘণ্টায় 30 মাইল গিয়া স্রোতের প্রতিকূলে 10 ঘণ্টায় ফিরিয়া আসিল। দাঁড় ও স্রোতের বেগ নির্ণয় কর।

9. একখানি আয়তাকার উঠানের পরিসীমা 60 ফুট। উহার দৈর্ঘ্য 3 ফুট বাড়াইলে এবং প্রস্থ 3 ফুট কমাইলে উঠানটির ক্ষেত্রফল 21 বর্গফুট কমিয়া যায়। উঠানটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

10. 7-টা ও 8-টার মধ্যে ঘড়ির ঘণ্টার কাঁটা ও মিনিটের কাঁটা দুইটি কখন মিলিত হয় ?

11. 3-টা ও 4-টার মধ্যে ঘড়ির কাঁটা দুইটি কখন কখন একই সরলরেখায় অবস্থিত থাকিবে ?

12. 5-টা ও 6-টার মধ্যে ঘড়ির কাঁটা দুইটি কখন কখন সমকোণে অবস্থিত থাকিবে ?

13. 4-টা ও 5-টার মধ্যে কখন কখন ঘড়ির কাঁটা দুইটির মধ্যে 10 মিনিট-ঘর ব্যবধান হইবে ?

14. 10-টা ও 11-টার মধ্যে কোন্ কোন্ সময়ে ঘড়ির কাঁটা দুইটি পরস্পরের মধ্যে 120° কোণ উৎপন্ন করে ?

15. এক ব্যক্তি 3-টা ও 4-টার মধ্যে বাহির হইয়া এবং 4-টা ও 5-টার মধ্যে ফিরিয়া আসিয়া দেখিল যে ঘড়ির কাঁটা দুইটি স্থান পরিবর্তন করিয়াছে। লোকটি কখন বাহির হইয়াছিল ?

16. এক ব্যক্তি 2-টা ও 3-টার মধ্যে বাহির হইয়া এবং 6-টা ও 7-টার মধ্যে ফিরিয়া আসিয়া দেখিল যে ঘড়ির কাঁটা দুইটি পরস্পর স্থান পরিবর্তন করিয়াছে। লোকটি কখন বাহির হইয়াছিল, কখন ফিরিয়া আসিয়াছিল এবং কত সময় বাহিরে ছিল ?

17. একটি ঘড়ি বেলা দ্বিপ্রহরের সময় 12 মিনিট ফাষ্ট ছিল। ঘড়িটি প্রতি ঘণ্টায় $2\frac{1}{2}$ মিনিট স্লো হইয়া যায়। 3-টা ও 4-টার মধ্যে ঘড়ির কাঁটা দুইটি যখন সমকোণে অবস্থিত তখন প্রকৃত সময় কত ?

18. একদল সৈন্য আয়তাকার ঘনব্যূহে অগ্রসর হইতেছিল। ইহার সম্মুখ সারিতে যত জন লোক ছিল গভীরতায় তদপেক্ষা 5 জন করিয়া লোক বেশী ছিল। শত্রুসৈন্যদিগকে আসিতে দেখিয়া সম্মুখ সারিতে 405 জন করিয়া সৈন্য বাড়াইয়া দেওয়া হইল, ফলে ব্যূহটি 5 গভীরতায় পরিণত হইল। ঐ দলে কত সৈন্য ছিল ?

19. কোন সৈন্যাধ্যক্ষ তাঁহার সৈন্যদলকে বর্গাকৃতি ঘনব্যূহে সাজাইতে গিয়া দেখিলেন যে 24 জন সৈন্য বেশী হয় ; সম্মুখ সারিতে দুইজন করিয়া লোক বাড়াইয়া দিলে 76 জন সৈন্য কম পড়ে। ঐ দলে কত সৈন্য ছিল ?

20. একদল সৈন্যকে বর্গাকৃতি ঘনব্যূহে সাজাইলে 89 জন সৈন্য কম পড়ে। সম্মুখ সারিতে একজন সৈন্য কমাইয়া দিলেও 24 জন সৈন্য কম পড়ে। ঐ দলে কত সৈন্য ছিল ?

21. একদল সৈন্যকে 3 এবং 5 গভীরতা বিশিষ্ট দ্বিবিধ শূন্যগর্ভ বর্গব্যূহে সাজাইয়া দেখা গেল যে প্রথম ব্যূহ রচনায় সম্মুখ সারিতে দুইজন লোক বেশী থাকে ; সৈন্যদলে কত লোক ছিল ?

22. কোন বিদ্যালয়ের ছাত্রদিগকে 'ড্রিল' করাইবার জন্য সারি করিয়া সাজান হইল। প্রত্যেক সারিতে চারজন করিয়া কম ছাত্র দাঁড়াইলে দশটি সারি বেশী হয়, কিন্তু প্রত্যেক সারিতে পাঁচজন করিয়া বেশী দাঁড়াইলে আটটি সারি কম হয়। ছাত্রসংখ্যা নির্ণয় কর।

23. কোন সৈন্যাধ্যক্ষ তাঁহার সৈন্যদলকে 4 গভীরতা বিশিষ্ট শূন্যগর্ভ বর্গব্যূহে সাজাইতে গিয়া দেখিলেন 50 জন সৈন্য বেশী থাকিয়া যায় ; আবার 5 গভীরতা বিশিষ্ট শূন্যগর্ভ বর্গব্যূহে সাজাইতে গিয়া দেখিলেন 50 জন সৈন্য কম পড়ে। উভয় ক্ষেত্রে সম্মুখ সারির সৈন্যসংখ্যা সমান হইলে, ঐ দলে কত সৈন্য ছিল ?

24. কোন ব্যবসায়ী 6 % লাভে একটি দ্রব্য বিক্রয় করিল। যদি দ্রব্যটির ক্রয়মূল্য 4 % কম এবং বিক্রয়-মূল্য 2 টাকা 6 আনা বেশী হইত, তাহা হইলে উহাতে তাহার 12 % লাভ হইত। দ্রব্যটির ক্রয়-মূল্য কত ?

25. এক ব্যক্তি একটি দ্রব্য 10 % ক্ষতিতে বিক্রয় করিল। যদি ক্রয়-মূল্য 20 % কম এবং বিক্রয়-মূল্য 3 আনা কম হইত, তাহা হইলে তাহার $6\frac{1}{4}$ % লাভ হইত। দ্রব্যটির ক্রয়-মূল্য কত ?

26. এক ব্যক্তি একটি ঘোড়া ও একটি গরু মোট 650 টাকায় ক্রয় করিল। $12\frac{1}{2}$ % লাভে ঘোড়াটি এবং 10 % ক্ষতিতে গরুটি বিক্রয় করিয়া সে মোট 52 টাকা লাভ করিল। ঘোড়াটির ক্রয়-মূল্য কত ?

27. কোন কৃষক প্রতিটি 6 টাকা দরে যতগুলি ভেড়া কিনিল, প্রতিটি 8 টাকা দরে আরও ততগুলি ভেড়া কিনিল। যদি উভয় প্রকার ভেড়ায় সমান অর্থ খরচ করা হইত তাহা হইলে তিনটি ভেড়া বেশী পাওয়া যাইত। প্রত্যেক প্রকারের ভেড়া কয়টি করিয়া কেনা হইয়াছিল ?

28. দুইটি ঘড়ি মোট 46 টাকায় বিক্রয় করায় একটিতে 10 % এবং অপরটিতে 20 % লাভ হইল। প্রত্যেকটি ঘড়ি পৃথক্ পৃথক্ ভাবে 15 % লাভে বিক্রয় করিলে পূর্বোক্ত বিক্রয়-মূল্যের কোন পরিবর্তন হইত না। প্রত্যেকটি ঘড়ির বিক্রয়-মূল্য নির্ণয় কর।

29. একটি দ্রব্য 20 % লাভে বিক্রয় করা হইল। ক্রয়-মূল্য এবং বিক্রয়-মূল্য উভয়ই 5 টাকা বেশী হইলে $18\frac{3}{4}$ % লাভ হইত। দ্রব্যটির ক্রয়-মূল্য নির্ণয় কর।

30. একটি কাজ A 10 দিনে এবং B 12 দিনে সম্পন্ন করিতে পারে। উভয়ে একত্র কাজ আরম্ভ করিল, কিন্তু কাজটি শেষ হইবার 3 দিন পূর্বে A চলিয়া গেল। কাজটি শেষ হইতে মোট কত দিন লাগিল ?

31. একটি কাজ A 8 দিনে, B 15 দিনে এবং C 16 দিনে সম্পন্ন করিতে পারে। তিন জনে একত্র কাজ আরম্ভ করিল, কিন্তু কাজটি শেষ হইবার দুই দিন পূর্বে A এবং একদিন পূর্বে B চলিয়া গেল। কাজটি শেষ হইতে মোট কত দিন লাগিল ?

32. এক ব্যক্তি ঘণ্টায় 6 মাইল বেগে কোন স্থানে পৌঁছিয়া তথা হইতে পূর্ব বেগের অর্ধেক বেগে ফিরিয়া আসিয়া দেখিল যাতায়াতে তাহার মোট $1\frac{1}{2}$ ঘণ্টা সময় লাগিয়াছে। গন্তব্য স্থানের দূরত্ব কত ?

33. ঘণ্টায় 10 মাইল বেগে আসিতেছে এরূপ কোন লোকের সহিত সাক্ষাৎ করিবার জন্য ঘণ্টায় 15 মাইল বেগে চলে এরূপ দূত প্রতি 10 মিনিট অন্তর পাঠান হইতে লাগিল ; কতক্ষণ পরে দূতগণের সহিত লোকটির সাক্ষাৎ হইবে ?

34. এক ব্যক্তি 550 গজ দূরে অবস্থিত চাঁদমারিতে গুলি ছুড়িবার 4 সেকেণ্ড পরে চাঁদমারিতে গুলি লাগার শব্দ শুনিতে পাইল। ঐ ব্যক্তি ও চাঁদমারি হইতে সমদূরবর্তী কোন স্থান হইতে একজন পরিদর্শক গুলির শব্দ শুনিবার $2\frac{1}{2}$ সেকেণ্ড পরে চাঁদমারিতে গুলি লাগার শব্দ শুনিতে পাইল। প্রতি সেকেণ্ডে শব্দের বেগ কত ফুট ?

35. মহাবীর আলেকজাণ্ডার যত বৎসর বাঁচিয়া ছিলেন তদপেক্ষা 9 বৎসর কম বাঁচিলে তাঁহার রাজত্বকালের পরিমাণ তাঁহার জীবিতকালের এক-অষ্টমাংশ হইত ; কিন্তু তিনি আরও 9 বৎসর বেশী বাঁচিয়া থাকিলে তাঁহার রাজত্বকাল তাঁহার জীবিতকালের অর্ধাংশ হইত। তিনি কত বৎসর বাঁচিয়াছিলেন এবং কত বৎসর বয়সে রাজত্ব আরম্ভ করিয়াছিলেন ?

একাদশ অধ্যায়

সরল সমীকরণের লেখ

1. পূর্বশ্রেণীতে ছক কাগজে বিন্দু স্থাপন প্রণালীর বিষয় আলোচিত হইয়াছে। এই অধ্যায়ে বীজগণিতীয় অপেক্ষককে চিত্রে প্রকাশ করিবার প্রণালী আলোচিত হইবে।

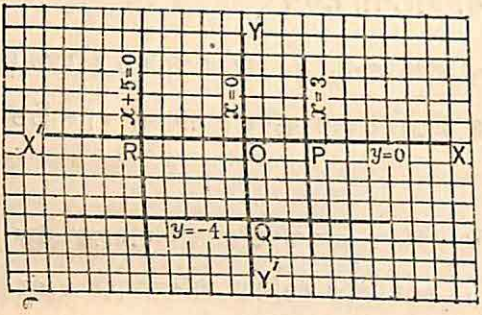
2. কোন চল (variable) রাশি সম্বলিত বীজগণিতীয় রাশিমালাকে উক্ত রাশির **অপেক্ষক** (function) বলে। চলরাশি x সম্বলিত রাশিমালাকে x এর অপেক্ষক (function of x) বলে। x এর অপেক্ষককে '$f(x)$' এই প্রতীক দ্বারা সূচিত করা হয়।

x চল রাশি, অতএব ইহার বিভিন্ন মান হইতে পারে এবং উহার বিভিন্ন মানে $f(x)$-এর মানেরও অনুরূপ পরিবর্তন হইবে। এখন $f(x)$ কে যদি y দ্বারা সূচিত করা হয়, তাহা হইলে '$y=f(x)$' এই সমীকরণটি পাওয়া যায়। সুতরাং x-এর বিভিন্ন মানে, y-এর মানেরও অনুরূপ পরিবর্তন হইবে, অর্থাৎ x-এর মান হিসাবে কয়েকটি বিভিন্ন সংখ্যা লইলে y-এর মানও অনুরূপ কয়েকটি বিভিন্ন সংখ্যা হইবে। x ও y-এর এই অনুরূপ মানগুলি লইয়া একটি তালিকা প্রস্তুত করিয়া, x-এর মানকে ভুজ ও y-এর অনুরূপ মানকে কোটি লইয়া কতকগুলি বিন্দু ছক কাগজে স্থাপন করিলে এবং উহাদিগকে একটি সন্তত (continuous) রেখা দ্বারা যুক্ত করিলে যে রেখা হয় উহাই হয় $f(x)$ বা $y=f(x)$ এর লেখ। এই লেখ সরলরেখা অথবা বক্ররেখা হইতে পারে। এস্থলে মাত্র সরলরেখার লেখ-চিত্র অঙ্কনের বিষয়ই আলোচিত হইবে।

উদা. 1. লেখ অঙ্কিত কর :

(1) $x=0$, (2) $y=0$, (3) $x=3$, (4) $y=-4$, (5) $x+5=0$

XX′, YY′ অক্ষ, O মূলবিন্দু এবং ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের বাহুকে দৈর্ঘ্যের একক লওয়া হইল।



(1) $x=0$ সমীকরণের লেখ y-অক্ষ, যেহেতু y-অক্ষের যে কোন বিন্দুর x-স্থানাঙ্ক বা ভুজ 0।

(2) $y=0$ সমীকরণের লেখ x-অক্ষ, যেহেতু x-অক্ষের যে কোন বিন্দুর y-স্থানাঙ্ক বা কোটি 0।

(3) $x=3$. OX সরলরেখার বরাবর O হইতে 3 একক গণিয়া P বিন্দু লও। P বিন্দু দিয়া y-অক্ষের সমান্তরাল একটি সরলরেখা টান এবং উহাকে উভয় দিকে বর্ধিত কর। এই বর্ধিত অসীম সরলরেখাই $x=3$ সমীকরণের লেখ হইবে, যেহেতু এই সরলরেখার যে কোন বিন্দুর x-স্থানাঙ্ক বা ভুজ 3।

দ্রষ্টব্য। যেহেতু $x=3$, সুতরাং y-র মান যাহাই হউক না কেন x-এর মান সর্বদাই হইবে 3. সুতরাং (3, 0), (3, 2), (3, 5) ইত্যাদি বিন্দু অবশ্যই লেখ-এর উপর অবস্থিত হইবে। উক্ত বিন্দুগুলি স্থাপন করিয়া এবং উহাদিগকে যোগ করিয়া যে রেখা হইবে উহা একটি সরলরেখা হইবে এবং এই সরলরেখাই হইবে $x=3$ সমীকরণের লেখ।

(4) $y=-4$.

OY′ সরলরেখার বরাবর O হইতে 4 একক গণিয়া Q বিন্দু লও। Q বিন্দু দিয়া x-অক্ষের সমান্তরাল একটি সরলরেখা টান এবং উহাকে উভয় দিকে বর্ধিত কর। এই বর্ধিত অসীম সরলরেখাই $y=-4$ সমীকরণের লেখ হইবে, যেহেতু এই সরলরেখার যে কোন বিন্দুর y-স্থানাঙ্ক বা কোটি -4.

দ্রষ্টব্য। বিন্দু-স্থাপন করিয়া এবং যুক্ত করিয়াও এই লেখ অঙ্কিত করা যাইতে পারে। [(3) এর দ্রষ্টব্যের অনুরূপ।]

(5) $x+5=0$, বা, $x=-5$.

OX′ সরলরেখার বরাবর O হইতে 5 একক গণিয়া R বিন্দু লও। R বিন্দু দিয়া y-অক্ষের সমান্তরাল একটি সরলরেখা টান এবং উহাকে উভয়দিকে বর্ধিত কর। এই বর্ধিত অসীম সরলরেখাই $x=-5$ বা $x+5=0$ সমীকরণের লেখ হইবে, যেহেতু এই সরলরেখার যে কোন বিন্দুর x-স্থানাঙ্ক বা ভুজ -5.

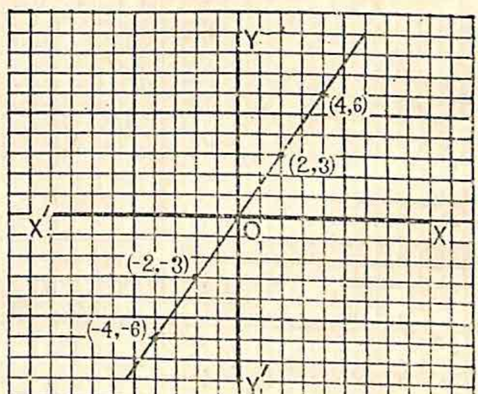
উদা. 2. $3x=2y$ সমীকরণের লেখ অঙ্কিত কর।

$$2y=3x, \qquad \therefore \; y=\frac{3x}{2}$$

x-এর বিভিন্ন মান লইয়া y-এর যে অনুরূপ বিভিন্ন মান পাওয়া যায় উহাদিগকে তালিকাবদ্ধ করিলে হয়—

যখন $x=$	0	2	-2	4	-4
$y=\frac{3x}{2}=$	0	3	-3	6	-6

ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের প্রতি বাহুকে দৈর্ঘ্যের একক ধরিয়া তালিকাবদ্ধ (0, 0), (2, 3), (−2, −3), (4, 6), (−4, −6) বিন্দুগুলি স্থাপন কর। উহাদের যে কোন দুইটি বিন্দু একটি সরলরেখাদ্বারা যুক্ত কর এবং এই সরলরেখাকে উভয় দিকে বর্ধিত কর। দেখা যাইবে এই বর্ধিত সরলরেখা অপর বিন্দুগুলি দিয়াও যাইবে। সুতরাং এই বর্ধিত অসীম সরলরেখাই $3x=2y$ সমীকরণের লেখ। এই সরলরেখাটি মূল বিন্দু দিয়া গিয়াছে।



দ্রষ্টব্য। (1) x ও y-এর মানের তালিকায় x-এর পরিবর্তে 1, 3, 5, −1, −3, ···প্রভৃতি ধরিলে y-এর মান ভগ্নাংশ যুক্ত হয় বলিয়া x-এর ঐরূপ মান ধরা হয়

নাই। স্থানাঙ্ক ভগ্নাংশ যুক্ত হইলে প্রয়োজনমত ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের বাহুর দ্বিগুণ, তিন গুণ ইত্যাদিকে দৈর্ঘ্যের একক ধরিতে হয়।

(2) প্রত্যেক সরলরেখার লেখ অঙ্কিত করিতে অন্ততঃ তিনটি বিন্দু অবশ্যই স্থাপন করিবে। দুইটি বিন্দু যুক্ত করিলে সরলরেখা সঠিক অঙ্কিত হয় বটে, কিন্তু পরীক্ষার (verification) জন্য আরও এক বা একাধিক বিন্দু লইতে হয়।

$y = mx$ এই আকারের সমীকরণের লেখ মূল বিন্দু দিয়া যায়।

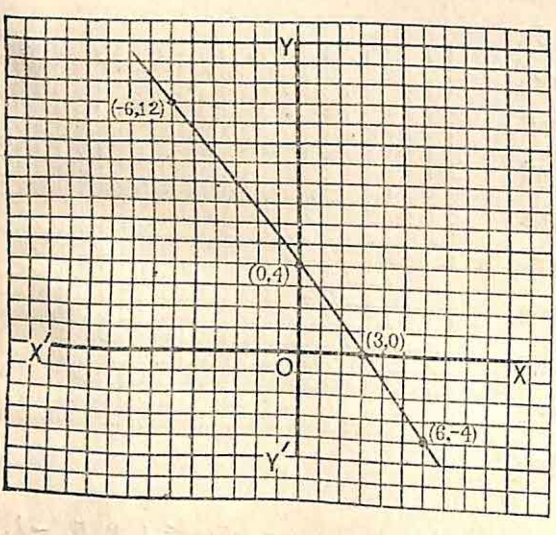
উদা. 3. $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$ সমীকরণের লেখ অঙ্কিত কর।

$\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$, বা, $4x+3y=12$, বা, $3y=12-4x$, বা, $y=\frac{12-4x}{3}$

∴

যখন $x=$	0	3	6	-6
$y=$	4	0	-4	12

ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের প্রতিবাহুকে দৈর্ঘ্যের একক ধরিয়া তালিকাবদ্ধ (0, 4),(3, 0), (6, − 4),(− 6, 12) বিন্দুগুলি স্থাপন কর। উহাদের যে কোন দুইটি বিন্দু একটি সরলরেখা দ্বারা যুক্ত কর এবং এই সরলরেখাকে উভয়দিকে বর্ধিত কর। দেখা যাইবে এই বর্ধিত সরলরেখা অপর বিন্দুগুলি দিয়াও যাইবে। সুতরাং



এই বর্ধিত অসীম সরলরেখাই $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$ সমীকরণের লেখ।

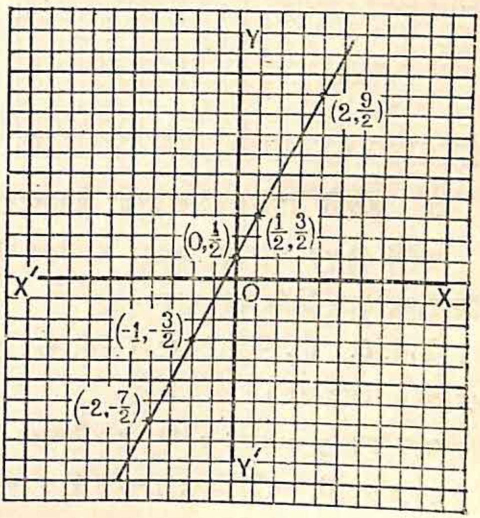
উদা. 4. $4x-2y+1=0$ সমীকরণের লেখ অঙ্কিত কর।

$$4x-2y+1=0, \quad \text{বা}, \quad 4x+1=2y, \quad \text{বা}, \quad \frac{4x+1}{2}=y$$

$\therefore$

যখন $x=$	0	2	-1	-2	$\frac{1}{2}$
$y=$	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{7}{2}$	$\frac{3}{2}$

ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের প্রতিবাহুর দ্বিগুণকে দৈর্ঘ্যের একক ধরিয়া তালিকাবদ্ধ $(0, \frac{1}{2})$, $(2, \frac{9}{2})$, $(-1, -\frac{3}{2})$, $(-2, -\frac{7}{2})$, $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ বিন্দুগুলি স্থাপন কর। উহাদের যে কোন দুইটি বিন্দু একটি সরলরেখা-দ্বারা যুক্ত কর এবং এই সরল-রেখাকে উভয়দিকে বর্ধিত কর। দেখা যাইবে এই বর্ধিত সরলরেখা অপর বিন্দুগুলি দিয়াও যাইবে। সুতরাং এই বর্ধিত অসীম সরলরেখাই $4x-2y+1=0$ সমীকরণের লেখ।



উদা. 5. $\frac{3x-1}{2}$ এর লেখ অঙ্কিত কর।

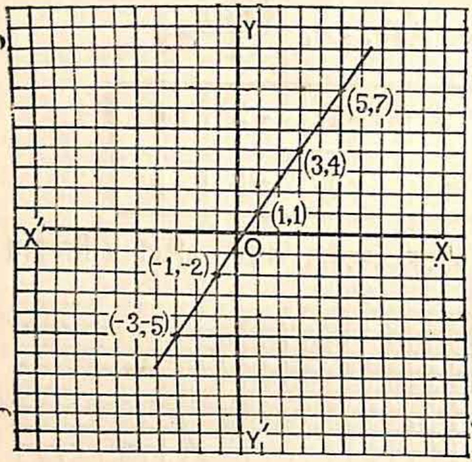
$\frac{3x-1}{2}$ এর লেখ এবং $y=\frac{3x-1}{2}$ এর লেখ অভিন্ন।

$$\therefore \quad y=\frac{3x-1}{2}$$

$\therefore$

$x=$	1	3	-1	-3	5
$y=$	1	4	-2	-5	7

ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের প্রতি বাহুকে দৈর্ঘ্যের একক ধরিয়া তালিকাবদ্ধ (1, 1), (3, 4), (−1, −2), (−3, −5), (5, 7), বিন্দুগুলি স্থাপন কর। উহাদের যে কোন দুইটি বিন্দু একটি সরলরেখা দ্বারা যুক্ত কর এবং এই সরলরেখাকে উভয়দিকে বর্ধিত কর। দেখা যাইবে এই বর্ধিত সরলরেখা অপর বিন্দুগুলি দিয়াও যাইবে। সুতরাং এই বর্ধিত অসীম সরলরেখাই $\frac{3x-1}{2}$ এর লেখ।



3. দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয়।

দুইটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক দেওয়া থাকিলে উক্ত বিন্দু দুইটি দিয়া যে সরলরেখা যায় উহার সমীকরণ নির্ণয় করা যায়।

উদা. 6. (6, −2) এবং (−5, 4) বিন্দু দুইটি দিয়া যে সরলরেখা যায় উহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

মনে কর $y=mx+c$ নির্ণেয় সমীকরণ।

যেহেতু (6, −2) এবং (−5, 4) বিন্দু দুইটি সরলরেখাটির উপর অবস্থিত, এবং সরলরেখাটির সমীকরণ $y=mx+c$, সুতরাং $x=6$, $y=-2$ এবং $x=-5$, $y=4$ হইলে সমীকরণটি অবশ্যই সিদ্ধ হইবে।

$-2=6m+c \quad \cdots \quad (i)$

এবং $4=-5m+c \quad \cdots \quad (ii)$

(i) হইতে (ii) বিয়োগ করিয়া, $-6=11m$, বা, $m=-\frac{6}{11}$

সমীকরণ (i)এ, $m=-\frac{6}{11}$ ধরিলে $-2=6.(-\frac{6}{11})+c$

বা, $-2+\frac{36}{11}=c$, বা, $\frac{14}{11}=c$ অর্থাৎ $c=\frac{14}{11}$

এখন $y=mx+c$ সমীকরণে, $m=-\frac{6}{11}$ এবং $c=\frac{14}{11}$ ধরিলে,

$y=-\frac{6}{11}x+\frac{14}{11}$, বা $11y=-6x+14$ বা $6x+11y=14$ হইল এবং ইহাই হইল নির্ণেয় সমীকরণ।

প্রশ্নমালা 41

নিম্নলিখিত সমীকরণগুলির লেখ অঙ্কিত কর :

1. $x=4$	**2.** $x=-2$	**3.** $y=1$	**4.** $y=-7$
5. $x+6=0$	**6.** $x-4=0$	**7.** $y+5=0$	**8.** $y-10=0$
9. $y=x$	**10.** $3y=4x$	**11.** $2x=5y$	**12.** $3x=y$
13. $2x+y=0$	**14.** $3x=-4y$	**15.** $x+y=2$	**16.** $x-y=1$
17. $2x+y=5$	**18.** $3x+4y=25$	**19.** $2y-3x=6$	**20.** $5x+3y=8$
21. $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$	**22.** $\frac{x}{2}-\frac{y}{3}=1$	**23.** $\frac{2y+6}{6}=x$	**24.** $y=\frac{2x+1}{2}$
25. $2x-2y=3$	**26.** $2x+y-5=0$	**27.** $2x+3y=1$	

নিম্নলিখিত রাশিগুলির লেখ অঙ্কিত কর :

28. $5x-1$	**29.** $3x$	**30.** $\frac{2}{3}x$	**31.** $x-3$
32. $\frac{3x+1}{2}$	**33.** $\frac{2x-3}{2}$	**34.** $\frac{7x-3}{3}$	**35.** $\frac{3x+1}{5}$

নিম্নলিখিত দুই দুইটি বিন্দু দিয়া যে সরলরেখা যায় উহার সমীকরণ নির্ণয় কর :

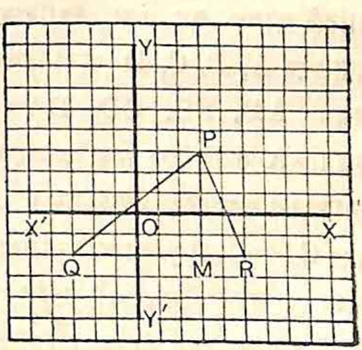
36. (2, 5), (3, 2)	**37.** (3, 1), (2, 5)	**38.** (4, 7), (−2, −1)
39. (3, −1), (2, −4)	**40.** (4, −3), (−2, −5)	**41.** (−4, 1), (2, −7)
42. (0, 7), (2, 5)	**43.** (3, 0), (−3, −5)	**44.** (−5, 0), (0, −4).

---

4. ছক কাগজের সাহায্যে ত্রিভুজ ও চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয়।

উদা. 1. (3, 3), (−3, −2) ও (5, −2) বিন্দু তিনটি স্থাপন কর এবং উহাদিগকে যুক্ত করিয়া যে ত্রিভুজ উৎপন্ন হয় তাহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

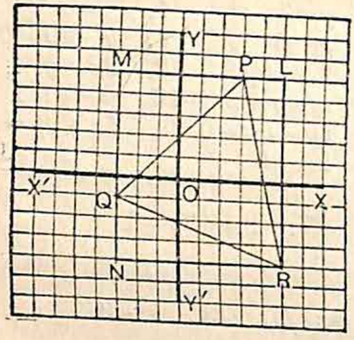
ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের প্রতি বাহুকে দৈর্ঘ্যের একক লইয়া (3, 3), (−3, −2), এবং (5, −2) বিন্দু তিনটি স্থাপন কর এবং উহাদিগকে যথাক্রমে P, Q, R দ্বারা চিহ্নিত কর। PQ, QR, RP সংযুক্ত কর।



P-বিন্দু হইতে QR-এর উপর PM লম্ব টান। এখন PM, PQR ত্রিভুজের উন্নতি হইল।

এখন PQR ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}QR.PM=\frac{1}{2}\times 8\times 5=20$ বর্গ একক।

উদা. 2. (3, 5), (−3, −1) এবং (5, −4) বিন্দু তিনটি স্থাপন করিয়া পরস্পর সংযুক্ত করিলে যে ত্রিভুজ উৎপন্ন হয় তাহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

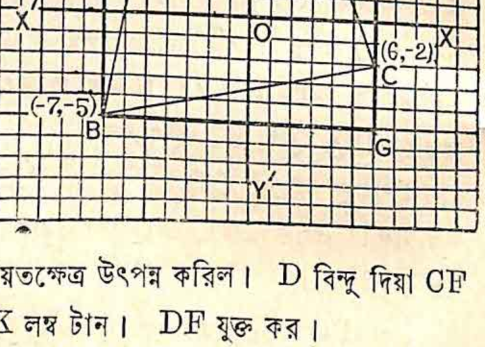


ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের প্রতি বাহুকে দৈর্ঘ্যের একক ধরিয়া (3, 5), (−3, −1) এবং (5, −4) বিন্দু তিনটি স্থাপন কর এবং উহাদিগকে যথাক্রমে P, Q, R দ্বারা চিহ্নিত কর। PQ, QR, RP সংযুক্ত কর। P ও R বিন্দু দিয়া XX'-এর এবং Q ও R বিন্দু দিয়া YY'-এর সমান্তরাল সরলরেখা চারিটি অঙ্কিত কর এবং মনে কর উহারা যেন LMNR আয়তক্ষেত্র উৎপন্ন করিল।

এখন, $\triangle PQR =$ আয়ত $LMNR - \triangle LPR - \triangle MPQ - \triangle NQR$
$= MN.LM - \frac{1}{2}LR.PL - \frac{1}{2}PM.QM - \frac{1}{2}NR.QN$
$= 9 \times 8 - \frac{1}{2} \times 9 \times 2 - \frac{1}{2} \times 6 \times 6 - \frac{1}{2} \times 8 \times 3$
$= 72 - 9 - 18 - 12 = 72 - 39 = 33$ বর্গ-একক।

উদা. 3. (−5,5), (−7, −5), (6, −2) ও (4, 3) বিন্দু চারিটি স্থাপন কর এবং উহাদিগকে যথাক্রমে যুক্ত করিয়া যে চতুর্ভুজ উৎপন্ন হয় উহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের প্রতি বাহুকে দৈর্ঘ্যের একক ধরিয়া (−5, 5), (−7, −5), (6, −2) ও (4, 3) বিন্দু চারিটি স্থাপন কর এবং উহাদিগকে যথাক্রমে A, B, C, D দ্বারা চিহ্নিত কর। AB, BC, CD, DA যুক্ত কর। A ও B বিন্দু দিয়া x-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখা দুইটি টান। B এবং C বিন্দু দিয়া y-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখা দুইটি টান। এই সরলরেখা



চারিটি পরস্পর ছেদ করিয়া EBGF আয়তক্ষেত্র উৎপন্ন করিল। D বিন্দু দিয়া CF এর উপর DH এবং AF এর উপর DK লম্ব টান। DF যুক্ত কর।

এখন, চতুর্ভুজ ABCD = আয়ত EBGF − △AEB − △CBG

− △DCF − △DAF

$= BG.BE - \frac{1}{2}BE.AE - \frac{1}{2}BG.CG - \frac{1}{2}CF.DH - \frac{1}{2}AF.DK$

$= 13.10 - \frac{1}{2}.10.2 - \frac{1}{2}.13.3 - \frac{1}{2}.7.2 - \frac{1}{2}.11.2$

$= 130 - 10 - 19\frac{1}{2} - 7 - 11 = 130 - 47\frac{1}{2} = 82\frac{1}{2}$ বর্গ একক।

প্রশ্নমালা 42

1. নিম্নলিখিত বিন্দু চারিটি স্থাপন কর এবং উহাদিগকে পর পর সংযুক্ত করিয়া যে আয়তক্ষেত্র উৎপন্ন হয় তাহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর :

(−2, 2), (−2, −3), (6, −3), (6, 2)

2. নিম্নলিখিত বিন্দু চারিটি স্থাপন কর এবং উহাদিগকে পর পর সংযুক্ত করিয়া যে বর্গক্ষেত্র উৎপন্ন হয় তাহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর :

(−4, −3), (−4, −8), (1, −8), (1, −3)

3. প্রত্যেক ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর যাহার শীর্ষবিন্দু :

(1) (3, 4), (−4, −1), (5, −1) (2) (0, 1), (0, 6), (4, 4)

(3) (0, 0), (−4, 4), (2, 4) (4) (−3, 2), (−2, −3), (6, 2)

4. নিম্নলিখিত বিন্দুগুলির সংযোগ দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর :

(1) (−1, −1), (3, 2), (6, −2) (2) (1, 4), (2, 1), (−4, −2)

(3) (1, 0), (3, −4), (−4, 2) (4) (4, 4), (−6, −2), (9, −3)

5. নিম্নলিখিত বিন্দুগুলির সংযোগ দ্বারা উৎপন্ন ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর :

(1) (4, 3), (−2, 1), (0, −2), (8, −3)

(2) (3, 2), (−3, −1), (−2, −8), (4, −2)

(3) (2, 3), (3, 8), (−3, 1), (6, −1)

6. প্রমাণ কর যে, (2, 4), (5, 1), (8, 7), (−1, −2) বিন্দুগুলি একটি রম্বসের শীর্ষবিন্দু। এই রম্বসের ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক ?

দ্বাদশ অধ্যায়

দ্বিঘাত সমীকরণ (Quadratic Equation)

1. দ্বিঘাত সমীকরণ—যে সমীকরণে অজ্ঞাত রাশির সর্বোচ্চ ঘাত বর্গ তাহাকে দ্বিঘাত সমীকরণ বলে। ইহাকে দ্বিতীয় মানের সমীকরণও (Equation of the second degree) বলা হয়।

কোন দ্বিঘাত সমীকরণে অজ্ঞাত রাশি মাত্র দ্বিঘাত যুক্ত হইলে তাহাকে **অমিশ্র দ্বিঘাত** (Pure Quadratic) বলে, যেমন $ax^2-c=0$ একটি অমিশ্র দ্বিঘাত।

কোন দ্বিঘাত সমীকরণে অজ্ঞাত রাশির প্রথম ও দ্বিতীয় ঘাত বিদ্যমান থাকিলে তাহাকে **মিশ্র দ্বিঘাত** (Adfected Quadratic) বলে, যেমন $ax^2+bx+c=0$ একটি মিশ্র দ্বিঘাত।

2. অমিশ্র দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান।

অমিশ্র দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান প্রণালী উদাহরণ দ্বারা বুঝান হইতেছে।

উদা. 1. সমাধান কর : $5x^2=125$

$5x^2=125, \quad \therefore \quad x^2=25$ (উভয় পক্ষকে 5 দ্বারা ভাগ করিয়া)

$\therefore \quad x=\pm\sqrt{25}=\pm 5$

দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান করিয়া অজ্ঞাত রাশির (x-এর) দুইটি মান পাওয়া যায়। ঐ দুইটি মানকে সমীকরণের **বীজ** (Roots) বলা হয়।

দ্রষ্টব্য। অমিশ্র দ্বিঘাত সমীকরণে বীজ দুইটির পরম মান (absolute value) পরস্পর সমান কিন্তু বিপরীত চিহ্নযুক্ত।

উদা. 2. সমাধান কর : $\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+5}=\frac{1}{2}$ [C. U. 1919]

$$\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+5}=\tfrac{1}{2}$$

বা, $\frac{x+5+2x+2}{(x+1)(x+5)}=\frac{1}{2}$ বা, $\frac{3x+7}{x^2+6x+5}=\frac{1}{2}$

বা, $x^2+6x+5=6x+14$

বা, $x^2=9 \quad \therefore \quad x=\pm\sqrt{9}=\pm 3.$

উদা. 3. সমাধান কর : $\dfrac{1}{a+x}+\dfrac{1}{a-x}=1$

$$\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}=1$$

বা, $\dfrac{a-x+a+x}{(a+x)(a-x)}=1,$ বা, $\dfrac{2a}{a^2-x^2}=1$

বা, $2a=a^2-x^2$ বা, $x^2=a^2-2a$

$$\therefore\ x=\pm\sqrt{a^2-2a}$$

উদা. 4. সমাধান কর : $\dfrac{a+b+x}{a+b-x}=\dfrac{x+a-b}{x-a+b}$

বজ্রগুণন করিয়া, $\{(b+x)+a\}((b+x)-a\}=\{a+(b-x)\}\{a-(b-x)\}$

বা, $(b+x)^2-a^2=a^2-(b-x)^2$ বা, $(b+x)^2+(b-x)^2=2a^2$

বা, $2(b^2+x^2)=2a^2$ বা, $b^2+x^2=a^2$

বা, $x^2=a^2-b^2,\ \therefore\ x=\pm\sqrt{a^2-b^2}.$

প্রশ্নমালা 43

সমাধান কর :

1. $x^2=16$ **2.** $3x^2=27$ **3.** $2x^2-8=0$

4. $3x^2-5=70$ **5.** $x(x+5)=5x+7$

6. $(x-5)(x+2)+3x=0$ **7.** $(x+7)(x-3)=4x$

8. $\dfrac{3x^2+2}{2}=\dfrac{5x^2-3}{3}$ **9.** $(2x-5)^2=x^2-20x+73$

10. $\dfrac{4}{x-3}-\dfrac{4}{x+3}=\frac{1}{3}$ **11.** $\dfrac{x+5}{x-5}+\dfrac{x-5}{x+5}=4\frac{1}{4}$

12. $\dfrac{14x^2+16}{21}-\dfrac{2x^2+8}{8x^2-11}=\dfrac{2x^2}{3}$ **13.** $\dfrac{3x+8}{x-4}-\dfrac{5(12-x)}{2x+3}=11$

14. $\dfrac{x+a}{x-a}+\dfrac{x-a}{x+a}=3$ **15.** $\dfrac{3(3+x)}{8}=\dfrac{5x^2+1}{3x^2+5}+\dfrac{6x-5}{16}$

16. $\dfrac{x}{a}+\dfrac{a}{x}=\dfrac{x}{b}+\dfrac{b}{x}$ **17.** $\dfrac{x+4}{x-4}+\dfrac{x-4}{x+4}=\frac{10}{3}$

18. $\dfrac{2x+1}{x+1}=\dfrac{x+8}{x+4}$ **19.** $\dfrac{3x+1}{4x+3}-\dfrac{x-2}{4x-3}=\frac{5}{9}$

20. $\dfrac{x^2-8}{x^2-10}-\dfrac{x^2-5}{x^2-7}=\dfrac{x^2-7}{x^2-9}-\dfrac{x^2-4}{x^2-6}$

3. মিশ্র দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান।

বিশেষ বিশেষ স্থলে বিভিন্ন প্রণালীতে মিশ্র দ্বিঘাতের সমাধান করা হয়। এস্থলে মাত্র উৎপাদক সাহায্যে সমাধান প্রণালী প্রদর্শিত হইতেছে।

উদা. 1. সমাধান কর : $x^2 = 11x - 30$

$x^2 = 11x - 30$

বা, $x^2 - 11x + 30 = 0$ বা, $(x-5)(x-6) = 0$

$\therefore$ $x - 5 = 0$ অথবা, $x - 6 = 0$, $\therefore$ $x = 5$ বা 6.

উদা. 2. সমাধান কর : $3x^2 + 13x + 12 = 0$

$3x^2 + 13x + 12 = 0$

বা, $3x^2 + 9x + 4x + 12 = 0$ বা, $3x(x+3) + 4(x+3) = 0$

বা, $(x+3)(3x+4) = 0$

$\therefore$ $x + 3 = 0$ অথবা, $3x + 4 = 0$, $\therefore$ $x = -3$ বা $-\frac{4}{3}$.

উদা. 3. সমাধান কর : $(x-7)(x-19) = 64$

$(x-7)(x-19) = 64$ বা, $x^2 - 26x + 133 = 64$

বা, $x^2 - 26x + 69 = 0$ বা, $x^2 - 3x - 23x + 69 = 0$

বা, $x(x-3) - 23(x-3) = 0$ বা, $(x-3)(x-23) = 0$

$\therefore$ $x - 3 = 0$ অথবা, $x - 23 = 0$, $\therefore$ $x = 3$ বা 23

উদা. 4. সমাধান কর : $x = \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{2-x}}}$

$$x = \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{2-x}}} \quad \text{বা,} \quad x = \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{\cfrac{4-2x-1}{2-x}}}$$

$$\text{বা,} \quad x = \cfrac{1}{2 - \cfrac{2-x}{3-2x}} \quad \text{বা,} \quad x = \cfrac{1}{\cfrac{6-4x-2+x}{3-2x}}$$

বা, $x = \dfrac{3-2x}{4-3x}$ বা, $4x - 3x^2 = 3 - 2x$

বা, $3x^2 - 6x + 3 = 0$, বা, $x^2 - 2x + 1 = 0$

বা, $(x-1)^2 = 0$, বা, $(x-1)(x-1) = 0$

$\therefore$ $x = 1, 1.$

প্রশ্নমালা 44

সমাধান কর :

1. $x^2-3x+2=0$
2. $x^2-7x+10=0$
3. $x^2-x-12=0$
4. $x^2-4x-21=0$
5. $2x^2+10x+12=0$
6. $5x^2-27x+10=0$
7. $x^2+(a+b)x+ab=0$
8. $x^2+x-(a+1)(a+2)=0$
9. $x^2-\cdot9x+\cdot18=0$
10. $(17x-8)(x-2)=555$
11. $(x+4)(2x-3)=6$
12. $17x^2+19x=1848$
13. $\frac{x}{3}+\frac{3}{x}=4\frac{1}{4}$
14. $4x^2+25x-351=0$
15. $x+\frac{1}{x}=25\frac{1}{25}$
16. $\frac{x-2}{x+2}+\frac{6(x-2)}{x-6}=1$
17. $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+b}=\frac{1}{a}-\frac{1}{a+b}$
18. $\frac{1}{a+b+x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{x}$
19. $\frac{(x+1)^3-(x-1)^3}{(x+1)^2-(x-1)^2}=2$
20. $\frac{3}{4-\frac{3}{4-x}}=x$
21. $\frac{a^2}{x-b}+\frac{b^2}{x-a}=a+b$
22. $\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^2-8\left(\frac{x-a}{x+a}\right)+12=0$
23. $(a-b)x^2-(a+b)x+2b=0$
24. $\frac{x+4}{x-4}-\frac{x-4}{x+4}=\frac{9+x}{9-x}-\frac{9-x}{9+x}$

ত্রয়োদশ অধ্যায়

অনুপাত ও সমানুপাত

1. **অনুপাত (Ratio)**—একটি রাশির সহিত তজ্জাতীয় অপর একটি রাশির তুলনা করিতে হইলে উভয় রাশিকে একই এককে পরিণত করিয়া প্রাপ্ত রাশিদ্বয়ের একটি অপরটির কত গুণ বা কত অংশ তাহা নির্ণয় করিতে হয়। একটি রাশি সমজাতীয় অপর একটি রাশির কত অংশ বা কত গুণ ইহা যে সংখ্যা দ্বারা প্রকাশিত

হয় তাহাকে রাশিদ্বয়ের অনুপাত বলা হয়। 2 টাকার সহিত 3 টাকার অনুপাত কত ইহা বুঝাইতে 2 টাকা, 3 টাকার কত ভগ্নাংশ ইহাই বুঝায়। আবার, 2 টাকাকে 3 টাকার ভগ্নাংশে প্রকাশ করিলে উত্তর হয় $\frac{2}{3}$ ($\frac{2}{3}$ টাকা নহে)। সুতরাং 2 টাকার সহিত 3 টাকার অনুপাত $= \dfrac{2 \text{ টাকা}}{3 \text{ টাকা}} = \dfrac{2}{3}$.

দুইটি রাশির মধ্যে ':' এইরূপ চিহ্ন দ্বারা অনুপাত প্রকাশ করা হয়। অতএব $2 \text{ টাকা} : 3 \text{ টাকা} = \dfrac{2 \text{ টাকা}}{3 \text{ টাকা}} = \dfrac{2}{3}$. ':' এই চিহ্নটি প্রকৃতপক্ষে পূর্ণ ভাগচিহ্নের (÷) সংক্ষিপ্ত আকার।

এইরূপে সমজাতীয় এবং একই এককে প্রকাশিত a ও b দুইটি রাশির অনুপাত $= a \div b = \dfrac{a}{b} = a : b$.

বিভিন্ন জাতীয় দুইটি রাশির একটিকে অপরটির ভগ্নাংশে প্রকাশ করার যেমন কোন অর্থ হয় না, বিভিন্ন জাতীয় দুইটি রাশির অনুপাতও তেমনি অর্থহীন। "2 টাকা : 3 মণ", "2 ফুট : 3 সের" প্রভৃতি অর্থহীন।

আবার, এক জাতীয় দুইটি মিশ্র রাশি যদি বিভিন্ন এককে প্রকাশিত হয় তাহা হইলে উহাদের অনুপাত নির্ণয় করিতে হইলে মিশ্র রাশি দুইটিকে একই এককে পরিণত করিয়া লইতে হয়। 6 আনার সহিত 7 টাকার অনুপাত কত নির্ণয় করিতে হইলে 7 টাকাকে আনায় পরিণত করিয়া অথবা 6 আনাকে টাকায় পরিণত করিয়া লইতে হয়।

সুতরাং 6 আনার সহিত 7 টাকার অনুপাত $= 6 \text{ আনা} : 112 \text{ আনা} = \dfrac{6}{112} = \dfrac{3}{56}$.

(অথবা) $6 \text{ আনা} : 7 \text{ টাকা} = \dfrac{6}{16} \text{ টাকা} : 7 \text{ টাকা} = \dfrac{\frac{6}{16}}{7} = \dfrac{6}{16 \times 7} = \dfrac{3}{56}$.

2. দুইটি বদ্ধ বা মিশ্র রাশির অনুপাত গঠিত হইবার পরই উহা আর মিশ্র রাশি বা বদ্ধ সংখ্যা থাকে না—শুদ্ধ সংখ্যা হইয়া যায়। সুতরাং 2 টাকা : 3 টাকা,

2 মণ : 3 মণ, 4 ফুট : 6 ফুট এই তিনটি অনুপাত পরস্পর সমান, কারণ প্রত্যেক অনুপাতই $\frac{2}{3}$ এই ভগ্নাংশের সমান।

দুইটি রাশির অনুপাত কোন ভগ্নাংশ দ্বারা প্রকাশ করা হইলে বুঝিতে হইবে যে, ভগ্নাংশটির লব ও হরের সংখ্যা যত যত কোন নির্দিষ্ট এককের তত তত গুণ রাশি দুইটির সমান। 10 টাকা : 15 টাকা $= 10 : 15 = \frac{2}{3}$, এস্থলে 5 টাকা একক ধরিলে 5 টাকার 2 গুণ = 10 টাকা = প্রথম রাশি, এবং 5 টাকার 3 গুণ = 15 টাকা = দ্বিতীয় রাশি।

দুইটি বালকের বয়সের অনুপাত 2 : 3 ; ইহার অর্থ এই নয় যে বালক দুইটির বয়স যথাক্রমে 2 বৎসর এবং 3 বৎসর। বস্তুতঃ বালক দুইটির বয়স কোন নির্দিষ্ট এককের দ্বিগুণ এবং তিনগুণ। 1 বৎসর একক ধরিলে বালক দুইটির বয়স হইবে 2 বৎসর এবং 3 বৎসর, 2 বৎসর একক ধরিলে বয়স হইবে 4 বৎসর ও 6 বৎসর, 5 বৎসর একক ধরিলে বয়স হইবে 10 বৎসর ও 15 বৎসর, ইত্যাদি।

3. যে দুইটি রাশির অনুপাত গঠিত হয় তাহাদের প্রথমটিকে **পূর্ব রাশি** (Antecedent) এবং দ্বিতীয়টিকে **উত্তর রাশি** (Consequent) বলে। 2 : 3 —এস্থলে 2 পূর্ব রাশি এবং 3 উত্তর রাশি, $a : c$—এস্থলে a পূর্ব রাশি এবং b উত্তর রাশি। পূর্ব রাশি এবং উত্তর রাশিকে অনুপাতের **পদ** (Terms of the ratio) বলে। 2, 3, a, b প্রভৃতি অনুপাতের পদ।

4. অনুপাতের সমতা—অনুপাত ভগ্নাংশ আকারে প্রকাশ করা যায়। সুতরাং সমান ভগ্নাংশ দ্বারা প্রকাশিত দুইটি অনুপাত পরস্পর সমান। যেমন $4 : 6 = 8 : 12$; কারণ $4 : 6 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ এবং $8 : 12 = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$. সুতরাং অনুপাতের পূর্ব রাশি ও উত্তর রাশি উভয় পদকে একই রাশি দ্বারা গুণ বা ভাগ করিলে অনুপাতের মানের কোন পরিবর্তন হয় না ; যথা :

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \times 5}{3 \times 5} = \frac{10}{15} \text{ এবং } \frac{6}{10} = \frac{6 \div 2}{10 \div 2} = \frac{3}{5}.$$

তদ্রূপ, $$\frac{a}{b} = \frac{am}{bm} = \frac{a \div m}{b \div m}$$

অর্থাৎ $$a : b = am : bm = \frac{a}{m} : \frac{b}{m}.$$

সুতরাং দুইটি রাশির অনুপাত $a : b$ হইলে রাশি দুইটিকে ak এবং bk লেখা যাইতে পারে, যদি k একটি ধ্রুবক (Constant) রাশি হয়।

5. সাম্যানুপাত ও বৈষম্যানুপাত।

কোন অনুপাতের পদ দুইটি সমান হইলে তাহাকে সাম্যানুপাত (ratio of equality) বলে, যথা, $5 : 5$, $a : a$, $m : m$, ইত্যাদি। সাম্যানুপাতের মান সর্বদাই 1-এর সমান।

কোন অনুপাতের পদ দুইটি অসমান হইলে ঐ অনুপাতকে বৈষম্যানুপাত (ratio of inequality) বলে, যথা—$3 : 5$, $7 : 5$, $9 : 13$, ইত্যাদি বৈষম্যানুপাত।

কোন অনুপাতের পূর্ব রাশি উত্তর রাশি অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে **গুরু বৈষম্যানুপাত** বা **গুরু অনুপাত** (ratio of greater inequality) হয় ; যথা—$5 : 3$, $7 : 5$, $a : b$ (যদি $a > b$ হয়).

কোন অনুপাতের পূর্ব রাশি উত্তর রাশি অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইলে **লঘু বৈষম্যানুপাত** বা **লঘু অনুপাত** (ratio of lesser inequality) হয় ; যথা—$3 : 5$, $7 : 9$, $a : b$ (যদি $a < b$ হয়).

6. পূর্ব রাশি ও উত্তর রাশি উভয় পদের সহিত একই রাশি যোগ করিলে গুরু অনুপাত হ্রাস প্রাপ্ত হয় এবং লঘু অনুপাত বৃদ্ধি প্রাপ্ত হয়।

$\frac{a}{b}$ এই অনুপাতটির প্রত্যেক পদের সহিত x যোগ করিলে নূতন অনুপাতটি হয় $\frac{a+x}{b+x}$.

এখন, $\frac{a}{b} - \frac{a+x}{b+x} = \frac{ab+ax-ab-bx}{b(b+x)} = \frac{x(a-b)}{b(b+x)}$

$a > b$ হইলে, $\frac{x(a-b)}{b(b+x)}$ ধনাত্মক, $\therefore \frac{a+x}{b+x} < \frac{a}{b}$

আবার, $a < b$ হইলে, $\frac{x(a-b)}{b(b+x)}$ ঋণাত্মক, $\therefore \frac{a+x}{b+x} > \frac{a}{b}$

7. পূর্ব রাশি এবং উত্তর রাশি উভয় পদ হইতে একই রাশি বিয়োগ করিলে গুরু অনুপাত বৃদ্ধি প্রাপ্ত হয় এবং লঘু অনুপাত হ্রাস প্রাপ্ত হয়।

$\frac{a}{b}$ এই অনুপাতটির প্রত্যেক পদ হইতে x বিয়োগ করিলে নূতন অনুপাতটি হয় $\frac{a-x}{b-x}$. এখন, $\frac{a}{b}-\frac{a-x}{b-x}=\frac{ab-ax-ab+bx}{b(b-x)}=\frac{x(b-a)}{b(b-x)}$.

$a > b$ হইলে, $\frac{x(b-a)}{b(b-x)}$ ঋণাত্মক, $\therefore \frac{a-x}{b-x} > \frac{a}{b}$.

$a < b$ হইলে, $\frac{x(b-a)}{b(b-x)}$ ধনাত্মক, $\therefore \frac{a-x}{b-x} < \frac{a}{b}$.

8. **মেয় এবং অমেয় অনুপাত**। যে অনুপাতকে দুইটি অখণ্ড সংখ্যার অনুপাতরূপে প্রকাশ করা যায় তাহাকে মেয় (Commensurable) অনুপাত এবং যে অনুপাতকে ঐরূপ কোন আকারে প্রকাশ করা যায় না তাহাকে অমেয় (Incommensurable) অনুপাত বলে।

$5 : 7$, $3\frac{1}{2} : 5\frac{1}{2}$ ইহারা মেয় অনুপাত।

$\sqrt{3} : 7$ অমেয় অনুপাত, কারণ এমন কোন দুইটি অখণ্ড সংখ্যা নাই যাহাদের দ্বারা উক্ত অনুপাত প্রকাশ করা যায়।

মেয় অনুপাতকে ভগ্নাংশ, কোন সসীম দশমিক অথবা কোন আবৃত্ত দশমিক দ্বারা প্রকাশ করা যায়, কিন্তু অমেয় অনুপাতকে করণী অথবা অনাবৃত্ত অসীম দশমিক দ্বারা প্রকাশ করা যায়।

9. **বিবিধ অনুপাত**।

(i) **ব্যস্ত বা বিপরীত অনুপাত**। কোন অনুপাতের পূর্ব ও উত্তর রাশিকে যথাক্রমে উত্তর ও পূর্ব রাশিরূপে লিখিলে যে অনুপাত উৎপন্ন হয় তাহাকে প্রথম অনুপাতের ব্যস্ত বা বিপরীত অনুপাত (Inverse or reciprocal ratio) বলে।

$3 : 4$ এর ব্যস্ত অনুপাত $4 : 3$, $a : b$ এর ব্যস্ত অনুপাত $b : a$.

(ii) **মিশ্র বা যৌগিক অনুপাত**। দুই বা ততোধিক অনুপাতের পূর্ব রাশি সমূহের ক্রমিক গুণফলকে পূর্ব রাশি এবং উত্তর রাশি সমূহের ক্রমিক গুণফলকে উত্তর রাশিরূপে লিখিলে যে অনুপাত উৎপন্ন হয় তাহাকে প্রদত্ত অনুপাত সমূহের মিশ্র বা যৌগিক অনুপাত (Compound ratio) বলে, যথা—$2 : 3$, $3 : 4$, $5 : 6$ এই তিনটি অনুপাতের যৌগিক অনুপাত হইবে,

$$\frac{2\times3\times5}{3\times4\times6} = \frac{5}{12} = 5 : 12.$$

$a : b,\ c : d,\ e : f$ এর যৌগিক অনুপাত হইবে,

$$\frac{a \times c \times e}{b \times d \times f} = ace : bdf.$$

(*iii*) $a^2 : b^2$ এই অনুপাতকে $a : b$ অনুপাতের **দ্বিগুণানুপাত** (duplicate ratio), $a^3 : b^3$ অনুপাতকে $a : b$ অনুপাতের **ত্রিগুণানুপাত** (triplicate ratio) এবং $a^4 : b^4$ অনুপাতকে $a : b$ অনুপাতের **চতুর্গুণানুপাত** (quadruplicate ratio) বলা হয় ; ইত্যাদি।

$\sqrt{a} : \sqrt{b}$ অনুপাতকে $a : b$ অনুপাতের **দ্বিভাজিত অনুপাত** (subduplicate ratio) ; $\sqrt[3]{a} : \sqrt[3]{b}$ অনুপাতকে $a : b$ অনুপাতের **ত্রিভাজিত অনুপাত** (subtriplicate ratio) বলা হয়।

10. একাধিক অনুপাতের মানের তুলনা। অনুপাতের মানের তুলনা কতিপয় ভগ্নাংশের ক্রম মান নির্ণয়ের প্রণালীর অনুরূপ।

উদা. 1. $2 : 3,\ 5 : 7,\ 11 : 16$ এই তিনটি অনুপাতের মানের তুলনা কর।

$$2 : 3 = \tfrac{2}{3} = \frac{2 \times 7 \times 16}{3 \times 7 \times 16} = \frac{224}{336}$$

$$5 : 7 = \tfrac{5}{7} = \frac{5 \times 3 \times 16}{7 \times 3 \times 16} = \frac{240}{336}$$

$$11 : 16 = \tfrac{11}{16} = \frac{11 \times 3 \times 7}{16 \times 3 \times 7} = \frac{231}{336}$$

সুতরাং, $5 : 7$ বৃহত্তম এবং $2 : 3$ ক্ষুদ্রতম।

ঊর্ধ্বগক্রমে, $2 : 3,\ 11 : 16,\ 5 : 7$; নিম্নগক্রমে, $5 : 7,\ 11 : 16,\ 2 : 3.$

উদা. 2. $3 : 4,\ 2 : 3,\ 5 : 4$-র মিশ্র অনুপাত নির্ণয় কর।

নির্ণেয় মিশ্র অনুপাত $= \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{5}{8} = 5 : 8.$

উদা. 3. $a+b : a-b,\ a^2+b^2 : (a+b)^2$ এবং $a(a^2-b^2)^2 : b(a^4-b^4)$ এর মিশ্র অনুপাত নির্ণয় কর।

$$\text{নির্ণেয় মিশ্র অনুপাত} = \frac{a+b}{a-b} \times \frac{a^2+b^2}{(a+b)^2} \times \frac{a(a^2-b^2)^2}{b(a^4-b^4)}$$

$$= \frac{a+b}{a-b} \times \frac{a^2+b^2}{(a+b)^2} \times \frac{a(a+b)^2(a-b)^2}{b(a^2+b^2)(a+b)(a-b)} = \frac{a}{b} = a : b.$$

উদা 4. যদি $\frac{5x-2y}{3x+4y}=\frac{2}{9}$ হয়, তাহা হইলে $x:y$ কত?

$$\frac{5x-2y}{3x+4y}=\frac{2}{9}$$

$\therefore\ 45x-18y=6x+8y$ বা, $39x=26y$

$\therefore\ \frac{x}{y}=\frac{26}{39}=\frac{2}{3}.$ অর্থাৎ $x:y=2:3.$

উদা. 5. যদি $\frac{x}{y}=\frac{3}{4}$ হয়, $\frac{7x-4y}{3x+y}$ এর মান কত?

$$\frac{7x-4y}{3x+y}=\frac{\frac{7x-4y}{y}}{\frac{3x+y}{y}}=\frac{7.\frac{x}{y}-4}{3.\frac{x}{y}+1}=\frac{7.\frac{3}{4}-4}{3.\frac{3}{4}+1}=\frac{\frac{21}{4}-4}{\frac{9}{4}+1}=\frac{\frac{5}{4}}{\frac{13}{4}}=\frac{5}{13}.$$

উদা. 6. যদি $3x^2-10xy+7y^2=0$ হয়, $x:y$ কত?

$3x^2-10xy+7y^2=0$

$\therefore\ 3.\frac{x^2}{y^2}-10.\frac{x}{y}+7=0.$ (y^2 দ্বারা ভাগ করিয়া)

বা, $3\left(\frac{x}{y}\right)^2-10.\left(\frac{x}{y}\right)+7=0$

বা, $3a^2-10a+7=0$ $\left(\frac{x}{y}=a\right.$ ধরিয়া $\left.\right)$

বা, $3a^2-3a-7a+7=0$

বা, $3a(a-1)-7(a-1)=0$

বা, $(a-1)(3a-7)=0,\ \therefore\ a-1=0$ বা, $3a-7=0$

$\therefore\ a=1$ অথবা, $\frac{7}{3}$ $\therefore\ x:y=1:1$ অথবা $7:3.$

উদা. 7. দুইটি সংখ্যার অনুপাত $2:5$, কিন্তু সংখ্যাদ্বয়ের প্রত্যেকটির সহিত 3 যোগ করিলে উহাদের অনুপাত হয় $5:11.$ সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

নির্ণেয় সংখ্যা দুইটির অনুপাত $2:5.$

সুতরাং সংখ্যা দুইটিকে $2x$ এবং $5x$ দ্বারা সূচিত করা যায়।

অতএব প্রশ্নের শর্তানুসারে, $\frac{2x+3}{5x+3}=\frac{5}{11}.$

$\therefore\ 22x+33=25x+15,\ \therefore\ -3x=-18,\ \therefore\ x=6.$

সুতরাং সংখ্যা দুইটি $2\times6=12$ এবং $5\times6=30.$

উদা. 8. 10 : 7 এই অনুপাতের প্রত্যেক পদের সহিত কত যোগ করিলে প্রাপ্ত সংখ্যা দুইটির অনুপাত 4 : 3 হইবে ?

মনে কর নির্ণেয় সংখ্যা x.

সুতরাং প্রশ্নের শর্তানুসারে, $\dfrac{10+x}{7+x}=\frac{4}{3}$

$\therefore$ $28+4x=30+3x$, $\therefore$ $x=2$. সুতরাং নির্ণেয় সংখ্যাটি 2.

উদা. 9. $a : b$ অনুপাতের প্রত্যেক পদের সহিত কত যোগ করিলে $c : d$ অনুপাত উৎপন্ন হয় ?

মনে কর নির্ণেয় রাশি x.

$\therefore$ $\dfrac{a+x}{b+x}=\dfrac{c}{d}$, $\therefore$ $bc+cx=ad+dx$

বা, $cx-dx=ad-bc$ বা, $x(c-d)=ad-bc$

$\therefore$ $x=\dfrac{ad-bc}{c-d}$

উদা. 10. $2x+3 : 5x-2$ অনুপাতটি $2 : 3$ এর দ্বিগুণানুপাতের সমান হইলে, x-এর মান কত ?

$$\frac{2x+3}{5x-2}=\frac{2^2}{3^2}=\frac{4}{9}$$

$\therefore$ $20x-8=18x+27$

$\therefore$ $2x=35$, $\therefore$ $x=17\frac{1}{2}$.

উদা. 11. দুইটি সংখ্যার অনুপাত 3 : 5 এবং উহাদের বর্গের সমষ্টি 136. সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

নির্ণেয় সংখ্যা দুইটির অনুপাত 3 : 5.

সুতরাং উহাদিগকে $3x$ এবং $5x$ দ্বারা সূচিত করা যায়।

$\therefore$ $(3x)^2+(5x)^2=136$, $\therefore$ $9x^2+25x^2=136$

বা, $34x^2=136$, $\therefore$ $x^2=4$, $\therefore$ $x=2$

$\therefore$ সংখ্যা দুইটি $3.2=6$ এবং $5.2=10$.

প্রশ্নমালা 45

1. $2:3$, $5:8$ এবং $12:35$-এর মিশ্র অনুপাত নির্ণয় কর।

2. $a:x$, $x:y$, $y:b$-এর মিশ্র অনুপাত নির্ণয় কর।

3. কোন্‌টি বৃহত্তর নির্ণয় কর : $3:4$, অথবা, $4:5$.

4. মানের ক্রম অনুসারে সাজাও : $3:4$, $5:6$ এবং $2:3$.

5. $17x-3y=24y-x$ হইলে, $x:y$ কত ?

6. $x:y=3:4$ হইলে, $3x+y:5y-2x$ এর মান কত ?

7. (*i*) $48x^2-72xy+27y^2=0$ হইলে, $x:y$ কত ?

   (*ii*) $8x^2-22xy+15y^2=0$ হইলে, $x:y$ কত ?

8. $x-3:x+7$, $1:2$-এর ত্রিগুণানুপাত হইলে, x-এর মান কত ?

9. দুইজন লোকের বয়সের অনুপাত $3:7$; 5 বৎসর পরে উহাদের বয়সের অনুপাত $1:2$ হইবে। উহাদের বর্তমান বয়স কত ?

10. $5:8$ এই অনুপাতটির প্রত্যেক পদের সহিত কত যোগ করিলে $4:5$ অনুপাত হইবে ?

11. এমন দুইটি সংখ্যা নির্ণয় কর যাহাদের অনুপাত $1\frac{1}{2}:2\frac{2}{3}$; কিন্তু উভয় সংখ্যার সহিত 15 যোগ করিলে প্রাপ্ত সংখ্যাদ্বয়ের অনুপাত হয় $1\frac{2}{3}:2\frac{1}{2}$.

12. দুইটি সংখ্যার অনুপাত $3:4$; উহাদের বর্গের অন্তর 28. সংখ্যা দুইটি কত ?

13. 200 কে এমন দুই ভাগে বিভক্ত কর যেন উহাদের অনুপাত $2:3$ হয়।

14. এমন দুইটি সংখ্যা নির্ণয় কর যাহাদের অনুপাত $2:3$ এবং বর্গসমষ্টি 208.

15. $37:41$ এই অনুপাতের প্রত্যেক পদ হইতে কত বিয়োগ করিলে $7:8$ অনুপাত উৎপন্ন হইবে ?

16. বিনিময়ের হার এক টাকা = 1 শি. 6 পে. হইলে, 6 টাকা এবং 3 পা. 5 শিলিং-এর অনুপাত কত ?

17. $\dfrac{5x-3y}{3x+y}=\frac{1}{5}$ হইলে, $x:y$-এর মান কত ?

18. $\dfrac{3x+y+5}{7x-y+3}=\frac{5}{3}$ হইলে, $x:y$-এর মান কত ?

19. A-র নিকট যত আনা আছে, B-র নিকট তত টাকা আছে। প্রত্যেকের নিকট আর 4 টাকা অধিক থাকিলে উহাদের অর্থের অনুপাত 1 : 4 হইত। কাহার নিকট কত ছিল ?

20. পিতা ও পুত্রের বয়সের অনুপাত 5 : 3. 10 বৎসর পূর্বে তাহাদের বয়সের অনুপাত ছিল 2 : 1. পিতা ও পুত্রের বর্তমান বয়স কত ?

21. প্রমাণ কর যে $2ab : a^2+b^2$ অনুপাতটি একটি গুরু অনুপাত হইতে পারে না।

22. $a+x : b+x$, $a : b$-এর দ্বিগুণানুপাত হইলে, x-এর মান কত ?

23. দুইটি সৈন্যদলে যথাক্রমে 11,000 এবং 7,000 সৈন্য ছিল ; প্রত্যেক দলে নূতন করিয়া 1000 সৈন্য আসিয়া যোগ দিল। কোন্ পক্ষের সুবিধা হইল ?

(C. E. 1879)

---

11. সমানুপাত। চারিটি রাশি যদি এরূপ সম্বন্ধযুক্ত হয় যে প্রথম ও দ্বিতীয় রাশির অনুপাত তৃতীয় ও চতুর্থ রাশির অনুপাতের সমান, তাহা হইলে উক্ত রাশি চারিটি সমানুপাত (Proportion) উৎপন্ন করে এবং উহাদিগকে সমানুপাতী (Proportional) বলা হয়। সুতরাং দুইটি অনুপাত পরস্পর সমান হইলে অনুপাত দুইটির পদ চারিটি সমানুপাতী হয়।

2 টাকা, 3 টাকা, 6 ফুট, 9 ফুট সমানুপাতী, কারণ

2 টাকা : 3 টাকা = 6 ফুট : 9 ফুট (প্রত্যেক অনুপাতের মান $\frac{2}{3}$ বলিয়া)

দুইটি সমান অনুপাতের মধ্যে '=' চিহ্নের পরিবর্তে উহার সংক্ষিপ্ত আকারের ': :' এই চিহ্নটিও ব্যবহৃত হয়।

a, b, c, d সমানুপাতী হইলে, উহাদিগকে নিম্নলিখিতরূপে লেখা হয় :

$a : b : : c : d$; $a : b = c : d$. অথবা, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

$a : b : : c : d$ ইহাকে 'a ও b-এর অনুপাত c ও d-এর অনুপাতের সমান' এইরূপে পড়িতে হয়।

সমানুপাতের প্রথম ও চতুর্থ রাশিকে **অন্ত্যরাশি** (Extremes), দ্বিতীয় ও তৃতীয় রাশিকে **মধ্যরাশি** বা **মধ্যক** (Means) বলা হয়।

$a : b : : c : d$ এই সমানুপাতের a এবং d অন্ত্যরাশি, b এবং c মধ্যরাশি।

সমানুপাতের চতুর্থ রাশিটিকে প্রথম তিনটি রাশির **চতুর্থ সমানুপাতী** (Fourth Proportional) বলা হয়।

$a : b :: c : d$ এই সমানুপাতে a, b, c-এর চতুর্থ সমানুপাতী d.

প্রত্যেক অনুপাতের দুইটি পদ একজাতীয় হওয়া প্রয়োজন। সুতরাং চারিটি রাশি সমানুপাতী হইলে, প্রথম দুইটি একজাতীয় এবং শেষের দুইটি অপর একজাতীয় হইতে পারে ; কারণ অনুপাত মাত্রেরই মান একটি শুদ্ধ সংখ্যা।

12. সরল সমানুপাত। পরস্পর পৃথক চারিটি রাশি সমানুপাতী হইলে ঐরূপ অনুপাতকে **সরল সমানুপাত** (Simple Proportion) বলে, যেমন $a : b :: c : d$.

13. ক্রমিক সমানুপাত। তিন বা ততোধিক রাশি যদি এরূপ সম্বন্ধযুক্ত হয় যে প্রথম ও দ্বিতীয়ের অনুপাত, দ্বিতীয় ও তৃতীয়ের অনুপাত, তৃতীয় ও চতুর্থের অনুপাত প্রভৃতি পরস্পর সমান হয়, তাহা হইলে ঐ রাশি সমূহকে **ক্রমিক সমানুপাতী** (In continued proportion) বলা হয়।

a, b, c, d রাশি চারিটি ক্রমিক সমানুপাতী হইবে, যদি $a : b = b : c = c : d$ হয়। সমস্ত রাশি একজাতীয় না হইলে উহারা ক্রমিক সমানুপাতী হইতে পারে না।

তিনটি একজাতীয় রাশি যদি এরূপ সম্বন্ধযুক্ত হয় যে, প্রথম ও দ্বিতীয় রাশির অনুপাত, দ্বিতীয় ও তৃতীয় রাশির অনুপাতের সমান, তাহা হইলে দ্বিতীয় রাশিকে প্রথম ও তৃতীয় রাশির **মধ্য সমানুপাতী** (Mean Proportional) এবং তৃতীয় রাশিকে প্রথম দুই রাশির **তৃতীয় সমানুপাতী** (Third Proportional) বলা হয়।

14. a, b, c, d চারিটি রাশি সমানুপাতী হইলে, অন্ত্য রাশি দুইটির গুণফল, মধ্য রাশি দুইটির গুণফলের সমান।

$a : b :: c : d$ বা $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ $\therefore$ $ad = bc$ (বজ্রগুণন করিয়া)

a, b, c রাশি তিনটি ক্রমিক সমানুপাতী হইলে, অন্ত্য রাশি দুইটির গুণফল মধ্যসমানুপাতীর বর্গের সমান।

$a : b :: b : c$, বা $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$, $\therefore$ $ac = b^2$ (বজ্রগুণন করিয়া)

4, 12, 36 সংখ্যা তিনটি ক্রমিক সমানুপাতী। এস্থলে 4 ও 36-এর মধ্য সমানুপাতী 12, এবং 4 ও 12-এর তৃতীয় সমানুপাতী 36.

$4:12=12:36$, এস্থলে $4\times 36=12\times 12=12^2$

তদ্রূপ, $a:b::b:c$ হইলে $ac=b^2$

$\therefore\ b=\sqrt{ac}$.

আবার, $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ হইলে, $\frac{a}{b}\times\frac{b}{c}=\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}=\frac{a^2}{b^2}$ কিন্তু $\frac{a}{b}\times\frac{b}{c}=\frac{a}{c}$

$\therefore\ \frac{a}{c}=\frac{a^2}{b^2}$ অর্থাৎ $a:c::a^2:b^2$

এইরূপে, $a:b=b:c=c:d$ হইলে, $a:d=a^3:b^3$, ইত্যাদি।

উদা. 1. 4, 6, 9-এর চতুর্থ সমানুপাতী নির্ণয় কর।

মনে কর, নির্ণেয় চতুর্থ সমানুপাতী $=x$.

$\therefore\ 4:6::9:x$ অর্থাৎ $\frac{4}{6}=\frac{9}{x}$ $\therefore\ 4x=6\times 9=54$

$\therefore\ x=\frac{54}{4}=\frac{27}{2}=13\frac{1}{2}=$ নির্ণেয় চতুর্থ সমানুপাতী।

উদা. 2. 4 এবং 10 এই রাশিদ্বয়ের তৃতীয় সমানুপাতী নির্ণয় কর।

মনে কর, নির্ণেয় তৃতীয় সমানুপাতী $=x$

$\therefore\ 4:10::10:x$ অর্থাৎ $\frac{4}{10}=\frac{10}{x}$ $\therefore\ 4x=10\times 10=100$

$\therefore\ x=25=$ নির্ণেয় তৃতীয় সমানুপাতী।

উদা. 3. 16, 25 রাশি দুইটির মধ্য সমানুপাতী নির্ণয় কর।

মনে কর, মধ্য সমানুপাতী $=x$, $\therefore\ 16:x::x:25$ অর্থাৎ $\frac{16}{x}=\frac{x}{25}$

$\therefore\ x^2=16\times 25$, $\therefore\ x=4\times 5=20=$ নির্ণেয় মধ্য সমানুপাতী।

উদা. 4. দুইটি রাশির অনুপাত 5 : 6 ; যদি পূর্ব রাশিটি 85 হয়, তাহা হইলে উত্তর রাশিটি কত ?

মনে কর, উত্তর রাশিটি $=x$

$\therefore\ 5:6::85:x$ অর্থাৎ $\frac{5}{6}=\frac{85}{x}$ $\therefore\ 5x=6\times 85$

$\therefore\ x=102=$ নির্ণেয় উত্তর রাশি

উদা. 5. x এবং z রাশি দুইটির মধ্য সমানুপাতী y হইলে, প্রমাণ কর যে x^2+y^2 এবং y^2+z^2 এর মধ্য সমানুপাতী $xy+yz$. (P. E. 1890)

$x : y :: y : z \quad \therefore \; y^2 = xz$

এখন, $(x^2+y^2)(y^2+z^2) = (x^2+xz)(xz+z^2)$

$$= x(x+z).z(x+z)$$
$$= xz(x+z)^2$$
$$= y^2(x+z)^2$$
$$= (xy+yz)^2$$

সুতরাং $x^2+y^2 : xy+yz :: xy+yz : y^2+z^2$.

অর্থাৎ x^2+y^2 এবং y^2+z^2 এর মধ্য সমানুপাতী $xy+yz$.

প্রশ্নমালা 46

চতুর্থ সমানুপাতী নির্ণয় কর:

1. 6, 10, 12. **2.** 7, 8, 49. **3.** $2a, 3b, 5a^2c$

তৃতীয় সমানুপাতী নির্ণয় কর:

4. 8, 20. **5.** 2, 3. **6.** $(a-b)^2, a^3-b^3$.

মধ্য সমানুপাতী নির্ণয় কর:

7. 7, 63. **8.** 49, 81. **9.** $3x^3y, 12xyz^2$.

10. $6+3\sqrt{3}$ এবং $8-4\sqrt{3}$. (P. E. 1902)

11. a, b, c, d ক্রমিক সমানুপাতী হইলে, প্রমাণ কর যে $a+b$ এবং $c+d$ এর মধ্য সমানুপাতী $b+c$.

12. 3, 5, 7 এবং 10 এই রাশি চারিটির প্রত্যেকটির সহিত কত যোগ করিলে যোগফল চারিটি সমানুপাতী হইবে?

13. $3a+4b : 5a+6b = 3c+4d : 5c+6d$ হইলে, প্রমাণ কর $a : b :: c : d$.

---

15. সমানুপাত বিষয়ক কতিপয় সিদ্ধান্ত।

(1) $a : b :: c : d$ হইলে, $a : c :: b : d$

যেহেতু, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

$\therefore\ \frac{a}{b}\times\frac{b}{c}=\frac{c}{d}\times\frac{b}{c}$ (উভয় পক্ষকে $\frac{b}{c}$ দ্বারা গুণ করিয়া)

বা, $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ অর্থাৎ $a:c::b:d$

এই প্রক্রিয়াটিকে **একান্তর প্রক্রিয়া** (Alternando) বলে।

(2) $a:b::c:d$ হইলে, $b:a::d:c$

যেহেতু, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

$\therefore\ 1\div\frac{a}{b}=1\div\frac{c}{d}$ বা, $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$, অর্থাৎ $b:a::d:c$.

এই প্রক্রিয়াটিকে **ব্যস্ত প্রক্রিয়া** (Invertendo) বলে।

(3) $a:b::c:d$ হইলে, $a+b:b::c+d:d$

যেহেতু, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

$\therefore\ \frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1$ বা, $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$

অর্থাৎ $a+b:b::c+d:d$

এই প্রক্রিয়াকে **সংযোগ প্রক্রিয়া** (Componendo) বলে।

(4) $a:b::c:d$ হইলে, $a-b:b::c-d:d$

যেহেতু, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. $\therefore\ \frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1$ বা $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$

অর্থাৎ $a-b:b::c-d:d$

এই প্রক্রিয়াটিকে **বিভাগ প্রক্রিয়া** (Dividendo) বলে।

(5) $a:b::c:d$ হইলে, $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$

যেহেতু, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ হইলে, $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ এবং $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$

$\therefore\ \frac{a+b}{b}\times\frac{b}{a-b}=\frac{c+d}{d}\times\frac{d}{c-d}$ বা, $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$

অর্থাৎ $a+b:a-b::c+d:c-d$

এই প্রক্রিয়াটিকে **যোগ ও ভাগ প্রক্রিয়া** (Componendo and Dividendo) বলে।

(6) $\boldsymbol{a:b::c:d}$ হইলে, $\boldsymbol{a:a-b::c:c-d}$

যেহেতু, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ $\therefore$ $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ (ভাগ-প্রক্রিয়া)

$\therefore$ $\frac{b}{a-b}=\frac{d}{c-d}$ (ব্যস্ত-প্রক্রিয়া)

$\therefore$ $\frac{b}{a-b}\times\frac{a}{b}=\frac{d}{c-d}\times\frac{c}{d}$ বা, $\frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d}$

অর্থাৎ $a:a-b::c:c-d$

এই প্রক্রিয়াটিকে **রূপান্তর প্রক্রিয়া** (Convertendo) বলে।

16. সমানুপাত বিষয়ক একটি উপপাদ্য।

p, q, r, n যে কোন সংখ্যাই নির্দেশ করুক না কেন, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\cdots$হইলে,

$$\text{প্রত্যেকটি অনুপাত}=\left\{\frac{pa^n+qc^n+re^n+\cdots}{pb^n+qd^n+rf^n+\cdots}\right\}^{\frac{1}{n}}$$

মনে কর, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\cdots\cdots=k.$

সুতরাং, $a=bk,\quad c=dk,\quad e=fk,\quad \cdots\cdots$

অতএব, $pa^n=p(bk)^n=pb^nk^n$

$qc^n=q(dk)^n=qd^nk^n$

$re^n=r(fk)^n=rf^nk^n$

…………………

$\therefore$ $pa^n+qc^n+re^n+\cdots=k^n(pb^n+qd^n+rf^n+\cdots)$

$\therefore$ $k^n=\frac{pa^n+qc^n+re^n+\cdots}{pb^n+qd^n+rf^n+\cdots}$

$\therefore$ $k=\left\{\frac{pa^n+qc^n+re^n+\cdots}{pb^n+qd^n+rf^n+\cdots}\right\}^{\frac{1}{n}}$

কিন্তু, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\cdots=k$

$\therefore \ \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \cdots$ এর প্রত্যেকটি অনুপাত

$$= \left\{\frac{pa^n + qc^n + re^n + \cdots}{pb^n + qd^n + rf^n + \cdots}\right\}^{\frac{1}{n}}$$

এখন, (1) $n=1$ হইলে, প্রত্যেকটি অনুপাত $= \frac{pa+qc+re+\cdots}{pb+qd+rf+\cdots}$

(2) $p=q=r=n=1$ হইলে, প্রত্যেকটি অনুপাত $= \frac{a+c+e+\cdots}{b+d+f+\cdots}$

(3) $p=n=1$ এবং $q=r=-1$ হইলে, প্রত্যেকটি অনুপাত $= \frac{a-c-e+\cdots}{b-d-f+\cdots}$

উদা. 1. যদি $a : b :: c : d$ হয়,

প্রমাণ কর : $(ma+nb)(mc-nd) = (ma-nb)(mc+nd)$

যেহেতু, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ $\therefore$ $\frac{ma}{nb} = \frac{mc}{nd}$ (উভয় পক্ষকে $\frac{m}{n}$ দ্বারা গুণ করিয়া)

$\therefore$ $\frac{ma+nb}{ma-nb} = \frac{mc+nd}{mc-nd}$ (যোগ ও ভাগ প্রক্রিয়া)

$\therefore$ $(ma+nb)(mc-nd) = (ma-nb)(mc+nd)$.

উদা. 2. যদি $x : y :: y : z$ হয়,

$\frac{xyz(x+y+z)^3}{(xy+yz+zx)^3}$ এর মান কত ?

যেহেতু, $\frac{x}{y} = \frac{y}{z}$, $\therefore$ $y^2 = xz$. $\therefore$ $xyz = xz.y = y^2y = y^3$

এখন, $\frac{xyz(x+y+z)^3}{(xy+yz+zx)^3} = \frac{y^3(x+y+z)^3}{(xy+yz+y^2)^3}$ [$\because$ $zx = y^2$]

$$= \frac{y^3(x+y+z)^3}{y^3(x+y+z)^3} = 1.$$

উদা. 3. যদি $a : b = b : c$ হয়

প্রমাণ কর : $(a+b+c)(a-b+c) = a^2+b^2+c^2$.

যেহেতু, $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ $\therefore$ $ac = b^2$

$$\begin{aligned}(a+b+c)(a-b+c) &= (a+c)^2 - b^2 \\ &= a^2+c^2+2ac-b^2 \\ &= a^2+c^2+2b^2-b^2 \\ &= a^2+b^2+c^2.\end{aligned}$$

উদা. 4. $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}$ হইলে,

প্রমাণ কর : $(b-c)^2+(c-a)^2+(b-d)^2=(a-d)^2$

যেহেতু, $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}$, $\therefore \; b^2=ac, \; ad=bc, \; c^2=bd.$

$$\begin{aligned}&(b-c)^2+(c-a)^2+(b-d)^2\\&=b^2+c^2-2bc+c^2+a^2-2ac+b^2+d^2-2bd\\&=2b^2-2bc+2c^2-2ac+a^2+d^2-2bd\\&=2ac-2ad+2bd-2ac+a^2+d^2-2bd\\&=a^2+d^2-2ad\\&=(a-d)^2.\end{aligned}$$

উদা. 5. $a:b=b:c=c:d$ হইলে,

প্রমাণ কর : $(a^2-b^2)(c^2-d^2)=(b^2-c^2)^2$

যেহেতু, $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}$ $\therefore \; ac=b^2, \; ad=bc, \; bd=c^2.$

$$\begin{aligned}(a^2-b^2)(c^2-d^2)&=a^2c^2-a^2d^2-b^2c^2+b^2d^2\\&=(b^2)^2-b^2c^2-b^2c^2+(c^2)^2\\&=(b^2)^2-2b^2c^2+(c^2)^2\\&=(b^2-c^2)^2.\end{aligned}$$

17. সমানুপাত ঘটিত প্রশ্নের অন্যরূপ সমাধান প্রণালী।

উদা. 6. $a:b=c:d$ হইলে,

প্রমাণ কর : $a^2+b^2:a^2-b^2=ac+bd:ac-bd.$

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$ (মনে কর), সুতরাং $a=bk, \; c=dk.$

এক্ষণে, $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}=\frac{b^2k^2+b^2}{b^2k^2-b^2}=\frac{b^2(k^2+1)}{b^2(k^2-1)}=\frac{k^2+1}{k^2-1}$

এবং $\frac{ac+bd}{ac-bd}=\frac{bk.dk+bd}{bk.dk-bd}=\frac{bd(k^2+1)}{bd(k^2-1)}=\frac{k^2+1}{k^2-1}$

$\therefore \; \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}=\frac{ac+bd}{ac-bd}$ $\left(\text{উভয় পক্ষ} = \frac{k^2+1}{k^2-1} \text{ বলিয়া}\right)$

উদা. 7. $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ হইলে,

প্রমাণ কর : $\frac{x^3}{a^3}+\frac{y^3}{b^3}+\frac{z^3}{c^3} = 3\left(\frac{x+y+z}{a+b+c}\right)^3$

$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = k$ (মনে কর)

$\therefore\ x = ak,\ \ y = bk,\ \ z = ck.$

$\frac{x^3}{a^3}+\frac{y^3}{b^3}+\frac{z^3}{c^3} = \frac{a^3k^3}{a^3}+\frac{b^3k^3}{b^3}+\frac{c^3k^3}{c^3} = k^3+k^3+k^3 = 3k^3.$

$3\left(\frac{x+y+z}{a+b+c}\right)^3 = 3.\left(\frac{ak+bk+ck}{a+b+c}\right)^3 = 3.\left\{\frac{k(a+b+c)}{a+b+c}\right\}^3 = 3k^3.$

$\therefore$ উভয় পক্ষ সমান।

উদা. 8. $a : b = b : c = c : d$ হইলে

প্রমাণ কর : $a : d = a^3+b^3+c^3 : b^3+c^3+d^3$

$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = k$ (মনে কর)

$\therefore\ c = dk.$

$b = ck = dk.k = dk^2$

এবং $a = bk = dk^2.k = dk^3$

এখন $\frac{a}{d} = \frac{dk^3}{d} = k^3.$

$\frac{a^3+b^3+c^3}{b^3+c^3+d^3} = \frac{(dk^3)^3+(dk^2)^3+(dk)^3}{(dk^2)^3+(dk)^3+d^3}$

$= \frac{d^3k^9+d^3k^6+d^3k^3}{d^3k^6+d^3k^3+d^3} = \frac{d^3k^3(k^6+k^3+1)}{d^3(k^6+k^3+1)} = k^3.$

$\therefore$ উভয় পক্ষ সমান।

উদা. 9. যদি $\frac{cy-bz}{a} = \frac{az-cx}{b} = \frac{bx-ay}{c}$ হয়, প্রমাণ কর : $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$,

ধর প্রদত্ত প্রত্যেক অনুপাত k-এর সমান। তাহা হইলে,

$ak = cy - bz$, বা, $a.ak = a(cy-bz)$, বা, $a^2k = cay - abz$

$bk = az - cx$, বা, $b.bk = b(az-cx)$, বা, $b^2k = abz - bcx$

$ck = bx - ay$, বা, $c.ck = c(bx-ay)$, বা, $c^2k = bcx - cay$

$\therefore$ স্তম্ভক্রমে যোগ করিয়া, $k(a^2+b^2+c^2)=0$, $\therefore$ $k=0$.
কারণ, $a^2+b^2+c^2=0$ হইতে পারে না,

$\therefore$ $cy-bz=ak=a.0=0$, তদ্রূপ, $az-cx=0$;

$cy-bz=0$ ধরিলে, $cy=bz$, বা, $\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$

$az-cx=0$ ধরিলে, $az=cx$, বা, $\frac{x}{a}=\frac{z}{c}$

$$\therefore \frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$$

উদা. 10. যদি $x=cy+bz$, $y=az+cx$, $z=bx+ay$ হয়,

প্রমাণ কর : $\frac{x^2}{1-a^2}=\frac{y^2}{1-b^2}=\frac{z^2}{1-c^2}$.

$x=cy+bz$ ... ... (i),
$y=az+cx$ ... ... (ii),
$z=bx+ay$ ... ... (iii),

এখন (i) হইতে $x=cy+b(bx+ay)$

[(iii) হইতে z-এর মান বসাইয়া]

বা, $x=cy+b^2x+aby$, বা, $x-b^2x=cy+aby$

বা, $x(1-b^2)=y(c+ab)$,

$\therefore$ $\frac{x}{y}=\frac{c+ab}{1-b^2}$ ... ... (iv)

(ii) হইতে, $y=a(bx+ay)+cx$ [(iii) হইতে z-এর মান বসাইয়া]

বা, $y=abx+a^2y+cx$, বা, $y-a^2y=abx+cx$

বা, $y(1-a^2)=x(c+ab)$,

$\therefore$ $\frac{x}{y}=\frac{1-a^2}{c+ab}$ ... ... (v)

(iv) ও (v) গুণ করিয়া, $\frac{x^2}{y^2}=\frac{c+ab}{1-b^2}\cdot\frac{1-a^2}{c+ab}=\frac{1-a^2}{1-b^2}$

$\therefore$ $\frac{x^2}{1-a^2}=\frac{y^2}{1-b^2}$.

এইরূপে প্রমাণ করা যায় যে, $\frac{y^2}{1-b^2}=\frac{z^2}{1-c^2}$

$$\therefore \frac{x^2}{1-a^2}=\frac{y^2}{1-b^2}=\frac{z^2}{1-c^2}$$

প্রশ্নমালা 47

1. যদি $a : b = c : d = e : f$ হয়, প্রমাণ কর যে প্রত্যেক অনুপাত নিম্নলিখিত অনুপাত সমূহের প্রত্যেকটির সমান :

(i) $4a+5c-6e : 4b+5d-6f$. (ii) $ka+lc+me : kb+ld+mf$.

(iii) $\sqrt[3]{(a^3+c^3+e^3)} : \sqrt[3]{(b^3+d^3+f^3)}$.

যদি $a : b :: c : d$ হয়, প্রমাণ কর :

2. $\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}=\dfrac{ac+bd}{ac-bd}$. 3. $\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}=\dfrac{c^2+d^2}{c^2-d^2}$.

4. $(a^2+c^2)(b^2+d^2)=(ab+cd)^2$.

5. $\sqrt{a^2+c^2} : \sqrt{b^2+d^2}=ma+nc : mb+nd$.

6. $ma-nb : a+b=mc-nd : c+d$.

7. $(a+c)^3 : (b+d)^3=a(a-c)^2 : b(b-d)^2$.

8. $ac : bd=a^2+c^2 : b^2+d^2$.

9. $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 : (\sqrt{c}+\sqrt{d})^2=a-b : c-d$.

10. $4(a+b)(c+d)=bd\left(\dfrac{a+b}{b}+\dfrac{c+d}{d}\right)^2$.

যদি $a : b = c : d = e : f$ হয়, প্রমাণ কর :

11. $\dfrac{ce}{df}=\dfrac{a^2+c^2+e^2}{b^2+d^2+f^2}$. 12. $\dfrac{ace}{bdf}=\left(\dfrac{2a+3c+5e}{2b+3d+5f}\right)^3$.

13. $\dfrac{\sqrt{(ac)}}{\sqrt{(bd)}}=\sqrt[3]{(a^3+c^3+e^3)} : \sqrt[3]{(b^3+d^3+f^3)}$.

14. $\dfrac{ace}{bdf}=\dfrac{a^3+c^3+e^3}{b^3+d^3+f^3}$.

15. $(a^2+c^2+e^2)(b^2+d^2+f^2)=(ab+cd+ef)^2$.

$a : b = b : c = c : d$ হইলে, প্রমাণ কর :

16. $a : d=a^3 : b^3$.

17. $a+b : c+d=a^2+b^2+c^2 : b^2+c^2+d^2$.

18. $(ab+cd) : (ab-cd)=(b^2+d^2) : (b^2-d^2)$.

19. $a^2+ab+b^2 : b^2+bc+c^2=a : c$.

20. $\dfrac{a}{d}=\dfrac{pa^3+qb^3+rc^3}{pb^3+qc^3+rd^3}$.

21. $(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)=(ab+bc+cd)^2$.

22. $(a+d)^2+(b-c)^2=(b+c)^2+(a-d)^2$

23. $(a-b)^3 : (b-c)^3 = a : d$.

a, b, c ক্রমিক সমানুপাতী হইলে, প্রমাণ কর :

24. $\left(\dfrac{a+b}{b+c}\right)^2=\dfrac{a^2+b^2}{b^2+c^2}$. 25. $\dfrac{abc(a+b+c)^3}{(ab+bc+ca)^3}=1$.

26. $a^2b^2c^2\left(\dfrac{1}{a^3}+\dfrac{1}{b^3}+\dfrac{1}{c^3}\right)=a^3+b^3+c^3$.

27. যদি $x : a = y : b$ হয়, প্রমাণ কর :

(i) $\dfrac{x^3}{a^2}+\dfrac{y^3}{b^2}=\dfrac{(x+y)^3}{(a+b)^2}$ (ii) $(x^2+y^2)(a^2+b^2)=(ax+by)^2$

28. $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{e}{f}$ হইলে, প্রমাণ কর : $\dfrac{a}{b}=\left(\dfrac{a^2+c^2+e^2}{b^2+d^2+f^2}\right)^{\frac{1}{2}}$.

29. যদি $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$ হয়, প্রমাণ কর : (i) $\dfrac{x^3+y^3+z^3}{a^3+b^3+c^3}=\dfrac{xyz}{abc}$.

(ii) $\dfrac{x^3}{a^2}+\dfrac{y^3}{b^2}+\dfrac{z^3}{c^2}=\dfrac{(x+y+z)^3}{(a+b+c)^2}$.

30. যদি $5(x-y) = 3(x+y)$ হয়, $x : y$-এর মান কত ?

31. যদি $2a+3b : 2c+3d = 4a+5b : 4c+5d$ হয়,
প্রমাণ কর : $a : b = c : d$.

32. যদি $\dfrac{3a+4c+3b+4d}{5a+2c+5b+2d}=\dfrac{3a+4c+6b+8d}{5a+2c+10b+4d}$ হয়,

প্রমাণ কর : $a : b = c : d$.

33. যদি $a^2+b^2 : ab = a+c : b$ হয়, প্রমাণ কর, a এবং c এর মধ্য সমানুপাতী b.

34. যদি $\dfrac{a+b}{b+c}=\dfrac{c+d}{d+a}$ হয়, প্রমাণ কর, $c=a$ অথবা, $a+b+c+d=0$.

35. যদি $\dfrac{x}{a+b-c}=\dfrac{y}{b+c-a}=\dfrac{z}{c+a-b}$ হয়, প্রমাণ কর :

প্রত্যেক অনুপাত $=\dfrac{x+y+z}{a+b+c}$.

36. যদি $\dfrac{x}{b+c}=\dfrac{y}{c+a}=\dfrac{z}{a+b}$ হয়,
প্রমাণ কর : $(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z=0.$

37. $\dfrac{a}{b+c}=\dfrac{b}{c+a}=\dfrac{c}{a+b}$ হইলে, প্রমাণ কর প্রত্যেক অনুপাত $=\frac{1}{2}$ অথবা -1.

38. যদি $\dfrac{a}{b+c}=\dfrac{b}{c+a}=\dfrac{c}{a+b}$ হয় এবং $a+b+c\neq 0$ ($\neq$ সমান নহে)
প্রমাণ কর : $a=b=c$.

39. যদি $\dfrac{ay-bx}{c}=\dfrac{cx-az}{b}=\dfrac{bz-cy}{a}$ হয়, প্রমাণ কর : $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$.

40. যদি $\dfrac{x}{b+c-a}=\dfrac{y}{c+a-b}=\dfrac{z}{a+b-c}$ হয়,
$(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z$ এর মান নির্ণয় কর।

41. যদি $x(b-c)+y(c-a)+z(a-b)=0$ হয়,
প্রমাণ কর : $\dfrac{b-c}{y-z}=\dfrac{c-a}{z-x}=\dfrac{a-b}{x-y}$

42. যদি $x(b-c)+y(c-a)+z(a-b)=0$ হয়,
প্রমাণ কর : $\dfrac{b-c}{cy-bz}=\dfrac{c-a}{az-cx}=\dfrac{a-b}{bx-ay}$

43. $(a+b+c+d)(a-b-c+d)=(a-b+c-d)(a+b-c-d)$
হইলে, প্রমাণ কর : $a:b=c:d$.

44. $x=\dfrac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}$ হইলে, প্রমাণ কর, $bx^2-2ax+b=0$.

45. $x=\dfrac{4ab}{a+b}$ হইলে, $\dfrac{x+2a}{x-2a}+\dfrac{x+2b}{x-2b}$ এর মান নির্ণয় কর।

46. $a+b:a-b=c:d$ হইলে,
প্রমাণ কর : $a^2+ab:ab-b^2=c^2+cd:cd-d^2$.

47. যদি $(x^2+y^2+z^2)(a^2+b^2+c^2)=(ax+by+cz)^2$ হয়, প্রমাণ কর যে $x:a=y:b=z:c$.

---

18. সমীকরণ ও সমানুপাত। সমানুপাত বিষয়ক বিবিধ প্রক্রিয়ার প্রয়োগ দ্বারা কতকগুলি বিশিষ্ট আকারের সমীকরণের সমাধান সহজে সম্পন্ন করা যায়। সমাধান প্রক্রিয়ার কয়েকটি উদাহরণ দেখান হইল।

উদা. 11. সমাধান কর : $\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}=\frac{1}{2}$.

$$\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}=\frac{1}{2}.$$

$\therefore \frac{2\sqrt{x+1}}{-2\sqrt{x-1}}=\frac{3}{-1}$ (যোগ ও ভাগ প্রক্রিয়া করিয়া)

বা $\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}=\frac{3}{1}$ বা $\frac{x+1}{x-1}=\frac{9}{1}$. (উভয় পক্ষের বর্গ করিয়া)

বা $\frac{2x}{2}=\frac{10}{8}$ (পুনর্বার যোগ ও ভাগ প্রক্রিয়া করিয়া)

$\therefore x=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}=1\frac{1}{4}$.

উদা. 12. সমাধান কর : $\frac{(x+1)(x+6)}{(x+3)(x+5)}=\frac{x+7}{x+8}$.

$$\frac{(x+1)(x+6)}{(x+3)(x+5)}=\frac{x+7}{x+8}$$

বা $\frac{x^2+7x+6}{x^2+8x+15}=\frac{x+7}{x+8}=\frac{x^2+7x}{x^2+8x}$ (ডান পক্ষের লব ও হরকে x দ্বারা গুণ করিয়া)

$\therefore \frac{x+7}{x+8}=\frac{(x^2+7x+6)-(x^2+7x)}{(x^2+8x+15)-(x^2+8x)}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$

বা $5x+35=2x+16$

বা $3x=-19$ $\therefore x=-\frac{19}{3}=-6\frac{1}{3}$.

উদা. 13. সমাধান কর : $\left(\frac{2x-10}{2x-5}\right)^2=\frac{x-10}{x-5}$

$$\left(\frac{2x-10}{2x-5}\right)^2=\frac{x-10}{x-5}$$

বা $\frac{4x^2-40x+100}{4x^2-20x+25}=\frac{x-10}{x-5}=\frac{4x^2-40x}{4x^2-20x}$ (ডান পক্ষের লব ও হরকে $4x$ দ্বারা গুণ করিয়া)

$\therefore \frac{x-10}{x-5}=\frac{(4x^2-40x+100)-(4x^2-40x)}{(4x^2-20x+25)-(4x^2-20x)}=\frac{100}{25}=4$

$\therefore 4x-20=x-10$ বা $3x=10$ $\therefore x=\frac{10}{3}=3\frac{1}{3}$.

প্রশ্নমালা 48

সমাধান কর :

1. $\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^2 = \frac{x+2}{x+4}$.

2. $\left(\frac{x-5}{x-6}\right)^3 = \frac{x-4}{x-7}$

3. $\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^3 = \frac{x-2a+b}{x+a-2b}$

4. $\left(\frac{x+10}{x-13}\right)^2 = \frac{(x+8)(x+12)}{(x-11)(x-15)}$

5. $\frac{(x+2)(x+3)}{(x+1)(x+7)} = \frac{x+5}{x+8}$

6. $\left(\frac{x+5}{x+6}\right)^2 = \frac{(x+4)(x+6)}{(x+5)(x+7)}$

7. $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{a-x}}{\sqrt{a}+\sqrt{a-x}} = a$

8. $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{x}-\sqrt{a-x}} = c$

9. $\frac{3x^2+5x+7}{4x^2+6x+9} = \frac{3x+5}{4x+6}$

10. $\frac{ax^2+bx+c}{px^2+qx+r} = \frac{ax+b}{px+q}$

অনুপাত ও সমানুপাত বিষয়ক প্রশ্নের সমাধান।

19. অনুপাত ও সমানুপাতের বিবিধ প্রক্রিয়ার সাহায্যে সমস্যার সমাধান-প্রণালী উদাহরণ দ্বারা প্রদর্শিত হইল।

উদা. 1. 39 কে এমন দুই অংশে বিভক্ত কর যেন প্রথম অংশের সহিত 6 যোগ করিলে এবং দ্বিতীয় অংশ হইতে 3 বিয়োগ করিলে প্রাপ্ত সংখ্যা দুইটির অনুপাত 5 : 2 হয়।

(C. U. 1859)

মনে কর বৃহত্তর অংশ x, তাহা হইলে ক্ষুদ্রতর অংশ $39-x$.

সুতরাং প্রশ্নের শর্ত অনুসারে, $\frac{x+6}{39-x-3} = \frac{5}{2}$. বা $\frac{x+6}{36-x} = \frac{5}{2}$

$\therefore\ 2x+12 = 180-5x$ বা $7x = 168,\quad x = 24$

সুতরাং অংশদ্বয় 24 এবং 15.

উদা. 2. A এবং B-র বর্তমান বয়সের অনুপাত 8 : 7 ; 27 বৎসর পূর্বে তাহাদের বয়সের অনুপাত ছিল 5 : 4. তাহাদের বর্তমান বয়স কত ? (A. E. 1900)

যেহেতু A ও B-র বর্তমান বয়সের অনুপাত 8 : 7, সুতরাং ধরা যাইতে পারে উহাদের বর্তমান বয়স যথাক্রমে $8x$ বৎসর ও $7x$ বৎসর (প্রথম শর্ত অনুসারে)।

$\therefore$ 27 বৎসর পূর্বে A ও B-র বয়স ছিল যথাক্রমে $(8x-27)$ বৎসর ও $(7x-27)$ বৎসর।

$\therefore$ প্রশ্নের দ্বিতীয় শর্ত অনুসারে, $\frac{8x-27}{7x-27}=\frac{5}{4}$

বা, $35x-135=32x-108$

বা, $3x=27$ বা, $x=9$.

$\therefore$ A-র বর্তমান বয়স $=8\times 9=72$ বৎসর,

এবং B-র বর্তমান বয়স $=7\times 9=63$ বৎসর।

উদা. 3. 85 গ্যালন মিশ্রিত মদ্যে মদ্য ও জলের অনুপাত 3 : 2 ; ইহাতে আর কত জল মিশ্রিত করিলে, মদ্য ও জলের অনুপাত 4 : 3 হইবে ?

85 গ্যালন মিশ্রিত মদ্যে, মদ্যের পরিমাণ $=(85\times\frac{3}{5})$ গ্যালন $=51$ গ্যালন ;

এবং জলের পরিমাণ $=(85-51)$ গ্যালন $=34$ গ্যালন।

এখন মনে কর x-গ্যালন জল মিশ্রিত করা হইল। সুতরাং প্রশ্নের শর্ত অনুসারে,

$\frac{51}{34+x}=\frac{4}{3}$, $\therefore$ $136+4x=153$ বা $4x=153-136=17$

$\therefore$ $x=\frac{17}{4}=4\frac{1}{4}$, $\therefore$ মিশ্রিত জলের পরিমাণ $=4\frac{1}{4}$ গ্যালন।

উদা. 4. দুইটি পাত্রে 8 : 3 এবং 5 : 1 অনুপাতে মদ্য ও জল মিশ্রিত আছে। এখন কি অনুপাতে দুইটি পাত্র হইতে মিশ্রিত মদ্য তুলিয়া পুনরায় মিশ্রিত করিলে এই নূতন মিশ্রণে মদ্য ও জলের অনুপাত 4 : 1 হইবে ?

মনে কর প্রথম পাত্র হইতে x এবং দ্বিতীয় পাত্র হইতে y পরিমাণ মদ্য তুলিয়া লওয়া হইল।

এখন প্রথম পাত্রে মদ্য $\frac{8}{11}$ অংশ এবং জল $\frac{3}{11}$ অংশ ;

এবং দ্বিতীয় পাত্রে মদ্য $\frac{5}{6}$ অংশ এবং জল $\frac{1}{6}$ অংশ।

সুতরাং প্রথম পাত্র হইতে x পরিমাণ তুলিলে উহাতে মদ্যের পরিমাণ থাকিবে $\frac{8}{11}x$ এবং জলের পরিমাণ থাকিবে $\frac{3}{11}x$. এই ভাবে দ্বিতীয় পাত্র হইতে y পরিমাণ তুলিলে উহাতে মদ্যের পরিমাণ থাকিবে $\frac{5}{6}y$ এবং জলের পরিমাণ থাকিবে $\frac{1}{6}y$.

সুতরাং প্রশ্নের শর্তানুসারে,

$$(\tfrac{8}{11}x+\tfrac{5}{6}y):(\tfrac{3}{11}x+\tfrac{1}{6}y) = 4:1.$$

অর্থাৎ, $\dfrac{\frac{8}{11}x+\frac{5}{6}y}{\frac{3}{11}x+\frac{1}{6}y}=\frac{4}{1}$ $\therefore$ $\dfrac{48x+55y}{18x+11y}=\frac{4}{1}$

বা, $72x+44y=48x+55y$.

বা, $24x=11y$, $\therefore$ $\dfrac{x}{y}=\dfrac{11}{24}$

অর্থাৎ নির্ণেয় অনুপাত $11:24$.

উদা. 5. প্রতি পাউণ্ড 1 টাকা 2 আনা এবং 1 টাকা 12 আনা দরে চা ক্রয় করিয়া কি অনুপাতে মিশ্রিত করিয়া মিশ্রিত চা-এর প্রতি পাউণ্ড 2 টাকা 2 আনা 8 পাই দরে বিক্রয় করিলে 30 % লাভ হইবে ?

1 টাকা 2 আনা $=1\frac{1}{8}$ টাকা $=\frac{9}{8}$ টাকা ; 1 টাকা 12 আনা $=1\frac{3}{4}$ টাকা $=\frac{7}{4}$ টাকা ; 2 টাকা 2 আনা 8 পাই $=2\frac{1}{6}$ টাকা $=\frac{13}{6}$ টাকা ।

মনে কর, প্রথম প্রকারের x-পাউণ্ডের সহিত দ্বিতীয় প্রকারের y-পাউণ্ড মিশ্রিত করা হইল ।

এখন, x-পাউণ্ডের ক্রয়-মূল্য $=\frac{9}{8}x$ টাকা এবং y-পাউণ্ডের ক্রয়-মূল্য $=\frac{7}{4}y$ টাকা । এবং $(x+y)$ পাউণ্ডের বিক্রয়-মূল্য $=(x+y)\frac{13}{6}$ টাকা ।

সুতরাং প্রশ্নের শর্ত অনুসারে, $(\frac{9}{8}x+\frac{7}{4}y)\frac{130}{100}=(x+y)\frac{13}{6}$.

বা, $(\frac{9}{8}x+\frac{7}{4}y)=(x+y)\frac{13}{6}\times\frac{100}{130}=(x+y)\times\frac{5}{3}$

বা, $\frac{27}{8}x+\frac{21}{4}y=5x+5y$ বা, $\frac{27}{8}x-5x=5y-\frac{21}{4}y$

বা, $\frac{13}{8}x=\frac{1}{4}y$, $\therefore$ $\dfrac{x}{y}=\frac{1}{4}\times\frac{8}{13}=\frac{2}{13}$ অর্থাৎ নির্ণেয় অনুপাত $2:13$.

প্রশ্নমালা 49

1. এমন তিনটি ক্রমিক সমানুপাতী সংখ্যা নির্ণয় কর যাহাদের সমষ্টি 13 এবং গুণফল 27.

2. এমন তিনটি সংখ্যা নির্ণয় কর যাহাদের অনুপাত $2:3:5$ এবং যাহাদের ক্ষুদ্রতম ও বৃহত্তম সংখ্যা দুইটির সমষ্টি অন্যটি অপেক্ষা 24 বেশী ।

3. তিনটি সংখ্যার অনুপাত $2:3:5$ এবং উহাদের ঘন-সমষ্টি 4320. সংখ্যা তিনটি নির্ণয় কর ।

4. দুইটি সংখ্যার অনুপাত $1\frac{1}{2}:2\frac{2}{3}$; কিন্তু প্রত্যেক সংখ্যার সহিত 10 যোগ করিলে প্রাপ্ত সংখ্যা দুইটির অনুপাত $2\frac{1}{6}:3\frac{1}{4}$ হইবে । সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর ।

5. অভিন্ন দুই অঙ্কের এমন দুইটি সংখ্যা নির্ণয় কর যাহাদের অনুপাত 4 : 7 এবং অঙ্ক-সমষ্টি 6.

6. দুই অঙ্কবিশিষ্ট এমন একটি সংখ্যা নির্ণয় কর যাহার দশকের অঙ্কটি এককের অঙ্কের দ্বিগুণ এবং অঙ্ক দুইটির স্থান পরিবর্তন করিয়া নূতন সংখ্যা গঠিত করিলে উক্ত সংখ্যার সহিত 60-এর অনুপাত হইবে 4 : 5.

7. A-র বয়স B-র বয়সের $2\frac{1}{2}$ গুণ এবং C-র বয়স B-র বয়সের $1\frac{1}{3}$ গুণ; A ও C-এর বয়সের অনুপাত নির্ণয় কর।

8. এক মণ মিশ্রিত দুগ্ধে দুগ্ধ ও জলের অনুপাত 4 : 1. ইহাতে আর কত দুগ্ধ মিশ্রিত করিলে, দুগ্ধ ও জলের অনুপাত 9 : 2 হইবে ?

9. পিতা ও পুত্রের বয়সের সমষ্টি 74 বৎসর। 10 বৎসর পূর্বে তাহাদের বয়সের অনুপাত ছিল 7 : 2. 10 বৎসর পরে তাহাদের বয়সের অনুপাত কত হইবে ?

10. পিতা ও পুত্রের বয়সের অনুপাত 7 : 1. 15 বৎসর পরে উভয়ের বয়সের অনুপাত হইবে 5 : 2. উহাদের বর্তমান বয়স কত ?

11. একটি পাত্রে তিন ভাগ দুধ এবং এক ভাগ জল আছে। এই মিশ্রিত দুধের কতটুকু তুলিয়া তাহার বদলে জল ঢালিলে, অর্ধেক দুধ ও অর্ধেক জল হইবে ?

12. 1 টাকা ও 1·08 টাকা সের দরের দুই প্রকার চিনি কি অনুপাতে মিশ্রিত করিলে মিশ্রিত চিনির সের 1·02 টাকা পড়িবে ?

13. একটি বিদ্যালয়ে 600 এবং আর একটিতে 800 ছাত্র ছিল। প্রথম বিদ্যালয় হইতে 50 এবং দ্বিতীয় বিদ্যালয় হইতে 60 ছাত্র চলিয়া গেল। কোন্ বিদ্যালয়ের বেশী ক্ষতি হইল ?

14. দুইটি পাত্রে জল মিশ্রিত দুগ্ধ আছে ; প্রথমটিতে দুগ্ধ ও জলের অনুপাত 5 : 3 এবং দ্বিতীয়টিতে দুগ্ধ ও জলের অনুপাত 8 : 1. উভয় পাত্র হইতে কি অনুপাতে মিশ্রিত দুগ্ধ তুলিয়া পুনরায় মিশ্রিত করিলে, নূতন মিশ্রণে দুগ্ধ ও জলের অনুপাত 4 : 1 হইবে ?

15. কিছু দুগ্ধের সহিত জল মিশ্রিত করায় উহার পরিমাণ 5 : 4 অনুপাতে বৃদ্ধি পাইল। উহা হইতে 12 সের বিক্রয় করিয়া অবশিষ্টের সহিত 3 সের জল পুনরায় মিশ্রিত করা হইল। ইহাতে মিশ্রণের পরিমাণ 7 : 6 অনুপাতে বৃদ্ধি পাইল। কত সের খাঁটি দুগ্ধ ছিল ?

চতুর্দশ অধ্যায়

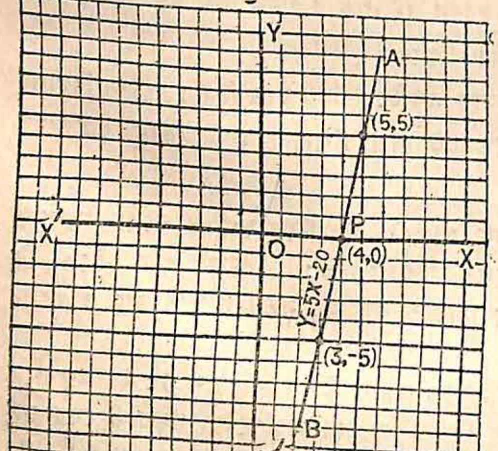
লেখ-চিত্র সাহায্যে প্রথম মানের সমীকরণের সমাধান

1. প্রথম মানের সমীকরণের নানাবিধ সমাধান প্রণালী পূর্বেই আলোচিত হইয়াছে। লেখ-চিত্রের সাহায্যে ঐ প্রকার সমীকরণের সমাধান কিভাবে করা যায় তাহা এই অধ্যায়ে আলোচিত হইবে। কতিপয় উদাহরণ দ্বারা সমাধান-প্রণালী প্রদর্শিত হইতেছে।

2. একটি অজ্ঞাত রাশি বিশিষ্ট সরল সমীকরণের সমাধান।

মনে কর $5x-20=0$ এই সমীকরণটির সমাধান লেখ-চিত্র সাহায্যে করিতে হইবে। $y=5x-20$ এই সমীকরণটির লেখ-চিত্র অঙ্কিত কর। অঙ্কিত লেখটি x-অক্ষকে যে বিন্দুতে ছেদ করিবে লেখ-চিত্র হইতে তাহার ভুজ (abscissa) নির্ণয় কর। প্রাপ্ত ভুজ-মানই (সংক্ষেপে ভুজ) নির্ণেয় সমাধান, কারণ x-অক্ষের উপর সমস্ত বিন্দুর কোটি-মান (সংক্ষেপে কোটি) শূন্য।

উদা. 1. লেখ-চিত্র সাহায্যে সমাধান কর, $5x-20=0$



মনে কর, $y=5x-20$

এখন, যদি $x=$	3	4	5
$y=$	-5	0	5

ছক কাগজে XX′, YY′ দুইটি অক্ষ এবং O মূল বিন্দু। ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের এক বাহুকে একক লইয়া $(3,-5)$, $(4,0)$, $(5,5)$ বিন্দু তিনটি স্থাপন কর এবং উক্ত তিনটি বিন্দুগামী AB সরলরেখাটি আঁক। AB সরলরেখাটিই $y=5x-20$ এই সমীকরণের লেখ।

মনে কর AB সরলরেখা x-অক্ষকে P বিন্দুতে ছেদ করিল।
P বিন্দুর ভুজ (অর্থাৎ OP) 4 একক,

$\therefore$ $x=4$ ইহাই নির্ণেয় সমাধান।

উদা. 2. লেখ সাহায্যে সমাধান কর : $12-x = \dfrac{x+3}{2}$

মনে কর $12-x = \dfrac{x+3}{2} = y.$

এস্থলে প্রথমতঃ $y=12-x$ এবং $y=\dfrac{x+3}{2}$ এর লেখ দুইটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

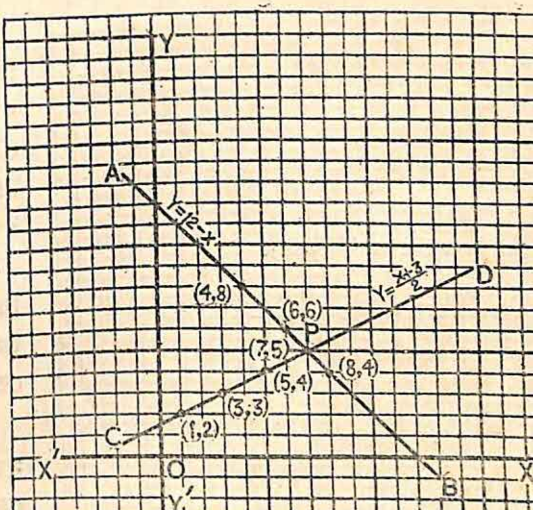
$y=12-x$ এর বিন্দু তালিকা :

যদি $x=$	4	6	8
$y=$	8	6	4

$y=\dfrac{x+3}{2}$ এর বিন্দু তালিকা :

যদি $x=$	1	3	5
$y=$	2	3	4

ছক কাগজে XX′, YY′ দুইটি অক্ষ এবং O মূলবিন্দু। ক্ষুদ্রতম বর্গ-ক্ষেত্রের এক বাহুকে একক লইয়া উক্ত তালিকার বিন্দুগুলি স্থাপন কর এবং প্রত্যেক তালিকার তিন তিনটি বিন্দুর মধ্য দিয়া যথাক্রমে AB ও CD দুইটি সরলরেখা আঁক। ঐ সরলরেখা দুইটিই সমীকরণদ্বয়ের লেখ।



লেখ-চিত্রে AB ও CD সরলরেখা দুইটি পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। গণিয়া দেখ, P বিন্দুর ভুজ 7. $\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x=7.$

দ্রষ্টব্য। কোন সমাধানে দুইটি লেখ-চিত্রের প্রয়োজন হইলে, একই অক্ষ ও মূলবিন্দু এবং একই একক লইয়া লেখ অঙ্কিত করিতে হইবে।

ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর বেশী একক ধরা হইলে লেখ-চিত্র হইতে প্রাপ্ত কোন বিন্দুর ভুজ-কোটির সাংখ্যমান একক অনুসারে নির্ণয় করিতে হইবে।

3. সহ-সমীকরণের সমাধান।

উদা. 3. লেখ সাহায্যে সমাধান কর : $\left.\begin{array}{r} y-x=2 \\ 3x-2y=5 \end{array}\right\}$

$y-x=2$

$\therefore \quad y=x+2.$

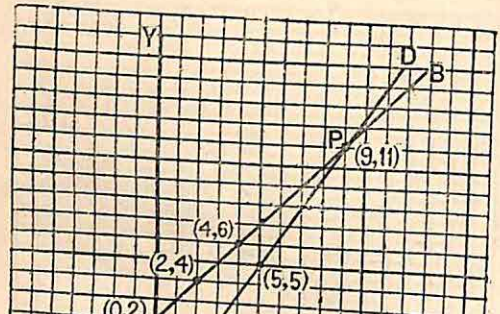
যদি $x=$	0	2	4
$y=$	2	4	6

$3x-2y=5$

$\therefore \quad 3x-5=2y$

$y=\dfrac{3x-5}{2}$

যদি $x=$	1	3	5
$y=$	-1	2	5



ছক কাগজে অক্ষ ও মূলবিন্দু চিহ্নিত করিয়া এবং ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের এক বাহুকে একক ধরিয়া (0, 2), (2, 4), (4, 6) বিন্দু তিনটি স্থাপন কর এবং উহাদের মধ্য দিয়া AB সরলরেখা আঁক।

(1, −1), (3, 2), (5, 5) বিন্দু তিনটি স্থাপন কর এবং উহাদের মধ্য দিয়া CD সরলরেখা আঁক।

ছক কাগজে AB ও CD সরলরেখা দুইটি P-বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। P বিন্দুর ভুজ-কোটি (9, 11).

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $\left.\begin{array}{l} x=9 \\ y=11 \end{array}\right\}$ উত্তর।

4. সমাধানের শুদ্ধতার পরীক্ষা। লেখ-চিত্রের সাহায্যে সমীকরণের সমাধান করিতে হইলে যথাসম্ভব শুদ্ধ করিয়া লেখ অঙ্কন করা প্রয়োজন। লেখ অঙ্কনে দোষ হইলে সমাধান অশুদ্ধ হইবে।

লেখ হইতে নির্ণীত বীজ উভয় সমীকরণে বসাইয়া দেখ প্রত্যেকটি সমীকরণ সিদ্ধ হয় কি না। যদি সিদ্ধ হয়, তাহা হইলে বুঝিবে সমাধান শুদ্ধ হইয়াছে।

$$y - x = 11 - 9 = 2 \quad \text{(প্রথম সমীকরণে)}$$

$$3x - 2y = 27 - 22 = 5 \quad \text{(দ্বিতীয় সমীকরণে)}$$

সুতরাং লেখ ও লৈখিক সমাধান উভয়ই শুদ্ধ হইয়াছে জানা গেল।

উদা. 4. লেখ সাহায্যে সমাধান কর : $\left.\begin{aligned} 2x - 5y &= 0 \\ \frac{x-y}{3} &= 2 \end{aligned}\right\}$

$$2x - 5y = 0$$
$$\therefore \; 5y = 2x$$
$$\therefore \; y = \frac{2x}{5}$$

যদি $x =$	0	5	−5
$y =$	0	2	−2

$$\frac{x-y}{3} = 2$$
$$\therefore \; x - y = 6$$
$$\therefore \; x - 6 = y$$

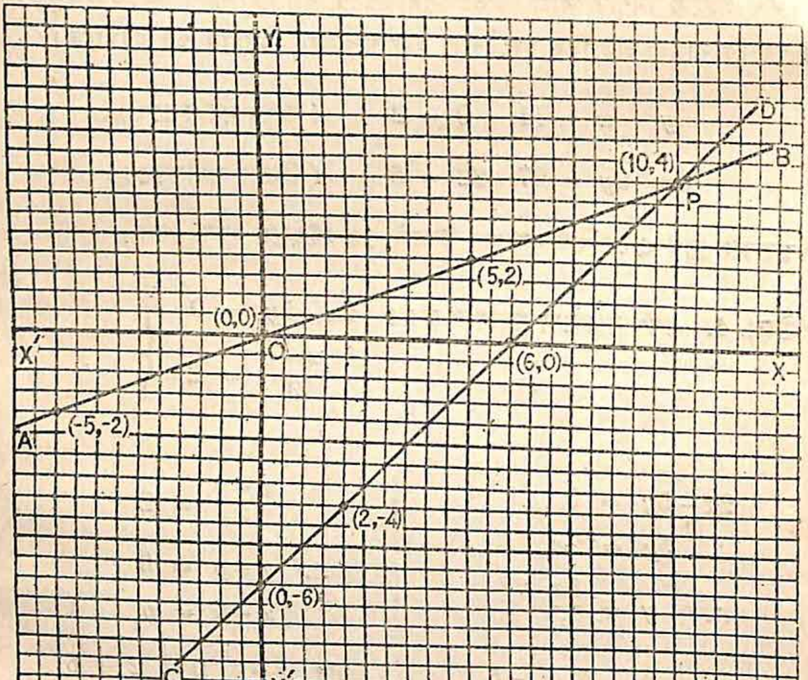
যদি $x =$	0	2	6
$y =$	−6	−4	0

ছক কাগজে অক্ষ ও মূলবিন্দু চিহ্নিত করিয়া এবং ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের প্রতি বাহুর দ্বিগুণকে একক ধরিয়া (0, 0), (5, 2), (−5, −2) বিন্দু তিনটি স্থাপন কর এবং উহাদের মধ্য দিয়া AB সরলরেখা আঁক। ঐ সরলরেখাই প্রথম সমীকরণের লেখ।

এইরূপে (0, −6), (2, −4), (6, 0) বিন্দু তিনটি স্থাপন করিয়া উহাদের মধ্য দিয়া CD সরলরেখা আঁক। ঐ সরলরেখাই দ্বিতীয় সমীকরণের লেখ।

লেখ-চিত্র হইতে দেখা যায় AB ও CD, P বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। একক অনুসারে P বিন্দুর ভুজ-কোটি (10, 4).

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $\left.\begin{array}{l} x = 10 \\ y = 4 \end{array}\right\}$ উত্তর।



উদা. 5. লেখ সাহায্যে সমাধান কর : $\left.\begin{array}{l} 3x+4y=9 \\ x+6y=10 \end{array}\right\}$

$3x+4y=9$

$\therefore\ y=\dfrac{9-3x}{4}$

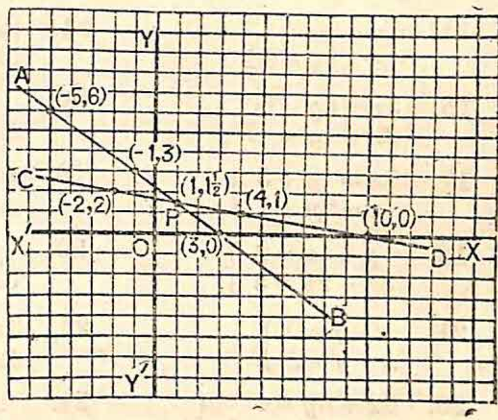
যদি $x=$	3	-1	-5
$y=$	0	3	6

$x+6y=10$

$y=\dfrac{10-x}{6}$

যদি $x=$	10	4	-2
$y=$	0	1	2

ছক কাগজে অক্ষ এবং মূলবিন্দু চিহ্নিত করিয়া এবং ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের এক বাহুকে একক ধরিয়া তালিকার বিন্দুগুলি স্থাপন কর। প্রথম তালিকার বিন্দু তিনটির মধ্য দিয়া AB এবং দ্বিতীয় তালিকার বিন্দু তিনটির মধ্য দিয়া CD সরলরেখা আঁক।



AB ও CD সরলরেখা দুইটি P বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। P বিন্দুর ভুজ 1 এবং কোটি $1\frac{1}{2}$.

স্থতরাং নির্ণেয় সমাধান ঃ $\left.\begin{array}{l} x=1 \\ y=1\frac{1}{2} \end{array}\right\}$ উত্তর।

দ্রষ্টব্য। দুইটি লেখ ছক কাগজে অঙ্কিত বর্গের ঠিক কৌণিক বিন্দুতে ছেদ না করিলে যথাসম্ভব আনুমানিক স্থানাঙ্ক-মান লইতে হয়। এইরূপ ক্ষেত্রে একক ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর অধিক লইলে সমাধান অধিকতর শুদ্ধ হইবে। ছেদ বিন্দুর স্থানাঙ্ক ভগ্নাংশ বা ভগ্নাংশযুক্ত হইলে যথাসম্ভব শুদ্ধ আসন্নমান নির্ণয় করিলেই সমাধান স্থূলতঃ শুদ্ধ হইয়াছে মনে করা যাইতে পারে।

প্রশ্নমালা 50

লেখ সাহায্যে সমাধান কর ঃ

1. $2x=6$

2. $2x-8=0$

3. $3x-5=2x+1$

4. $7x+2=5x+4$

5. $2x+3=0$

6. $3x-12=0$

7. $\frac{7-4x}{5}=\frac{2x+13}{3}$

8. $2-\frac{2x}{3}=\frac{3x-47}{5}$

9. $\left.\begin{array}{l} y=x+5 \\ y=2x+7 \end{array}\right\}$

10. $\left.\begin{array}{l} y=3x \\ y+5x=16 \end{array}\right\}$

11. $\left.\begin{array}{l} x+y=5 \\ y=3x+1 \end{array}\right\}$

12. $\left.\begin{array}{l} 2x+7y+8=0 \\ 5x-4y+20=0 \end{array}\right\}$

13. $\left.\begin{array}{l} 4y=3x \\ 4x-3y=14 \end{array}\right\}$

14. $\left.\begin{array}{l} 3x-2y=12 \\ 5x-7y=20 \end{array}\right\}$

15. $\left.\begin{array}{l} 5x+6y=60 \\ 2x-y=7 \end{array}\right\}$

16. $\left.\begin{array}{l} x+y=4 \\ 2x-1=5y \end{array}\right\}$

17. $\left.\begin{array}{l} 2x=y+5 \\ x=2y+1 \end{array}\right\}$

18. $\left.\begin{array}{l} y=3x-5 \\ x+y=11 \end{array}\right\}$

19. $\left.\begin{array}{l} y-x=2 \\ 3x-2y=5 \end{array}\right\}$

20. $\left.\begin{array}{l} y-x=2 \\ 8x-2y=5 \end{array}\right\}$

21. $\left.\begin{array}{l} x+y=0 \\ x-y=2 \end{array}\right\}$

22. $\left.\begin{array}{l} 3x-y=3 \\ 4x+3y=17 \end{array}\right\}$

23. $\left.\begin{array}{l} 2x+3y=4 \\ 3x-2y=-7 \end{array}\right\}$

24. $\left.\begin{array}{l} x-y=3 \\ 3x+2y=14 \end{array}\right\}$

25. $\left.\begin{array}{l} 3x=17-2y \\ 3y=2x+6 \end{array}\right\}$

26. $\left.\begin{array}{l} y=5 \\ 5x+6y=30 \end{array}\right\}$

27. $\left.\begin{array}{l} 3x+2y=5 \\ 5x-2y=3 \end{array}\right\}$

28. $\left.\begin{array}{l} 2x+3y=13 \\ 3x-2y=13 \end{array}\right\}$

29. $\left.\begin{array}{l} 2y-x=5 \\ 8x-2y=16 \end{array}\right\}$

30. $\left.\begin{array}{l} 4x+3y=15 \\ x=y+2 \end{array}\right\}$

31. $y-2x+4=0$ সমীকরণটির লেখ-চিত্র আঁক এবং ঐ লেখ হইতে $2x-4=0$ সমীকরণের সমাধান কর।

বিবিধ প্রশ্ন

1. উৎপাদক নির্ণয় কর :

(i) $8x^3-y^3+z^3+6xyz$ (ii) $x^2+\left(a+\frac{1}{a}\right)x+1$

(iii) $(x+1)(x+3)(x-4)(x-6)+24$

(iv) $2(a+b)^2-5(a+b)-25.$

2. গ. সা. গু. নির্ণয় কর :

(i) $2x^5-10x^3-4x^2,\quad 6x^4+13x^3-4x$

(ii) $x^4-5x^2+4,\quad x^5-11x+10$

3. ল. সা. গু. নির্ণয় কর :

(i) $x^2-4,\ x^2-x-2,\ x^2+x-2$

(ii) $x^2-3x+2,\ (x-1)^2,\ x^4-1$

(iii) $6x^2-x-1,\ 3x^2+7x+2,\ 2x^2+3x-2$

4. x^2+px+q এবং $x^2+p'x+q'$ এর গ. সা. গু. $(x+a)$ হইলে, প্রমাণ কর যে $(p-p')a=q-q'$. [C. U. 1941]

5. দুইটি বীজগণিতীয় রাশিমালার গ. সা. গু. $(x-5)$ এবং ল. সা. গু. $2x^3+3x^2-44x-105$. একটি রাশিমালা $2x^2-3x-35$ হইলে, অপরটি কত ?

6. সরল কর :

(i) $\dfrac{1}{x^2-3x+2}+\dfrac{1}{x^2-4x+3}+\dfrac{1}{5x-x^2-6}$

(ii) $\dfrac{b+c-a}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{c+a-b}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{a+b-c}{(c-a)(c-b)}$

(iii) $\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)(b+c-a)+\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}\right)(c+a-b)+\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)(a+b-c)$

7. সমাধান কর :

(i) $\dfrac{x-a}{b+c}-\dfrac{b-x}{c+a}-\dfrac{c-x}{a-b}=3$

(ii) $\dfrac{a}{x-b-c}=\dfrac{b}{x-c-a}$

(iii) $\dfrac{ax+a^2}{b+c}+\dfrac{bx+b^2}{c+a}+\dfrac{cx+c^2}{a+b}=-(a+b+c)$

8. কোন একটি পূর্ণ সংখ্যার অর্ধ উহার পরবর্তী বৃহত্তর সংখ্যার $\frac{1}{3}$ অপেক্ষা 2 অধিক ; সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

9. পিতার বর্তমান বয়স পুত্রের বর্তমান বয়সের দ্বিগুণ। 8 বৎসর পরে পিতার বয়সের 4 গুণ, পুত্রের বয়সের 7 গুণের সমান হইবে। পুত্রের বর্তমান বয়স নির্ণয় কর।

10. 20 বৎসর পূর্বে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের 4 গুণ ছিল, কিন্তু 4 বৎসর পরে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের দ্বিগুণ হইবে। তাহাদের বর্তমান বয়স কত ?

11. এমন একটি ভগ্নাংশ নির্ণয় কর যাহার হরের সহিত 1 যোগ করিলে $\frac{1}{2}$ হয় এবং লব হইতে 2 বিয়োগ করিলে $\frac{1}{3}$ হয়।

12. দুই অঙ্কের একটি সংখ্যা, উহার অঙ্কসমষ্টির 8 গুণ। সংখ্যাটি হইতে 45 বিয়োগ করিলে, অঙ্ক দুইটি স্থান পরিবর্তন করে। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

13. একশতের ন্যূন একটি সংখ্যার অঙ্কসমষ্টি 6. অঙ্ক দুইটি উল্টা করিলে যে সংখ্যাটি উৎপন্ন হয় তাহা পূর্বসংখ্যা অপেক্ষা 18 কম। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

14. একদল সৈন্যদ্বারা 10-গভীরতা বিশিষ্ট একটি শূন্য-গর্ভ বর্গব্যূহ রচনা করা যায়। আরও 144 সৈন্য বেশী হইলে ইহাদের দ্বারা 8-গভীরতা বিশিষ্ট একটি শূন্য-গর্ভ বর্গব্যূহ রচনা করা যায়। কিন্তু প্রথম রচনায় সম্মুখ সারিতে যতজন সৈন্য থাকিবে দ্বিতীয় রচনায় সম্মুখ সারিতে তাহা অপেক্ষা 25 জন সৈন্য বেশী থাকিবে। কত সৈন্য লইয়া প্রথম ব্যূহ রচনা করা হইয়াছিল ?

15. তিনটি ক্রমিক অঙ্কদ্বারা গঠিত সংখ্যার অঙ্কগুলি উল্টা করিলে যে নূতন সংখ্যা উৎপন্ন হয়, উহার সহিত মূল সংখ্যার অন্তর বৃহত্তম অঙ্কটির 33 গুণের সমান। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

16. কোন লোক একটি দ্রব্য 10 % লাভে বিক্রয় করিল। যদি দ্রব্যটির ক্রয়-মূল্য $2\frac{1}{2}$ % কম হইত এবং বিক্রয়মূল্য 14 টাকা বেশী হইত, তাহা হইলে তাহার 20 % লাভ হইত। দ্রব্যটির ক্রয়-মূল্য কত ?

17. একটি বালকের নিকট যত অর্থ ছিল সে উহাদ্বারা লেবু ক্রয় করিল। যদি সে আর চারিটি লেবু বেশী পাইত তাহা হইলে প্রতি লেবুর মূল্য $\frac{1}{2}$ পেনি কম পড়িত। কিন্তু যদি সে তিনটি কম পাইত তাহা হইলে প্রতি লেবুর মূল্য $\frac{1}{2}$ পেনি বেশী পড়িত। বালকটি কত মূল্যের লেবু কিনিয়াছিল ?

18. এক পর্যটককে কিছু দূর যাইতে হয়। যদি সে তাহার বেগ ঘণ্টায় 2 মাইল বাড়ায়, তাহা হইলে তাহার 3 ঘণ্টা সময় কম লাগে ; কিন্তু যদি সে তাহার বেগ ঘণ্টায় 1 মাইল কমায় তাহা হইলে তাহার 3 ঘণ্টা সময় বেশী লাগে। গন্তব্য স্থানের দূরত্ব নির্ণয় কর।

(Pat. U. 1934)

19. কোন ফেরিওয়ালা 100 লেবুর কতকগুলি 25 % লাভে এবং বাকীগুলি 15 % লাভে বিক্রয় করিয়া মোটের উপর 18 % লাভ করিল। প্রত্যেক মূল্যে বিক্রীত লেবুর সংখ্যা নির্ণয় কর।

20. $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$ এর লেখ অঙ্কিত কর এবং অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী এই লেখের ছিন্ন অংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

21. $\frac{2x+7}{3}$ এর লেখ অঙ্কিত কর এবং $x=4$ হইলে উহার মান কত হইবে নির্ণয় কর। লেখ হইতে x-এর মান নির্ণয় কর যাহাতে উক্ত রাশিটির মান 0 হয়।

22. $3x-2y-4=0$ এর লেখ অঙ্কিত কর এবং লেখ হইতে y-এর মান নির্ণয় কর, যখন $x=2$.

23. $2x+3y=5$, $5x-2y=3$ এবং $3y=x+2$ এর লেখ অঙ্কিত করিয়া প্রমাণ কর যে উহাদের লেখ তিনটি সমবিন্দু।

24. লেখ সাহায্যে সমাধান কর :

(i) $\left.\begin{array}{l} 7x-2y=14 \\ x+2y=2 \end{array}\right\}$ (ii) $\frac{2x-3}{3}=\frac{3x-5}{4}$. (iii) $\left.\begin{array}{l} x+2y=12 \\ x-3y=2 \end{array}\right\}$

25. একটি পাত্র তিন-চতুর্থাংশ পেট্রল পূর্ণ ছিল। উহা হইতে 21 গ্যালন তুলিয়া লইবার পর দেখা গেল পাত্রটি মাত্র দুই-পঞ্চমাংশ পূর্ণ আছে। পাত্রটিতে কত গ্যালন পেট্রল ধরে ?

26. যদি $a^2+b^2=1=c^2+d^2$ হয়, প্রমাণ কর : $(ad+bc)(ad-bc) = a^2-c^2$.

27. যদি $y=\frac{1}{1-x}$ হয়, $\frac{x^3-3x+1}{x^2-x}$ এর মান নির্ণয় কর।

28. যদি $2x-\frac{2}{x}=3$ হয়, প্রমাণ কর : $8\left(x^3-\frac{1}{x^3}\right)=63$.

29. যদি $2x-3=a$ হয়, দেখাও যে $8x^3-18ax=a^3+27$.

30. যদি $2s=a+b+c$ হয়,

প্রমাণ কর : $(s-a)^3+(s-b)^3+(s-c)^3+3abc=s^3$.

31. যদি $a+b+c=0$ হয়,

প্রমাণ কর : $a(a^2-bc)+b(b^2-ca)+c(c^2-ab)=0$.

32. যদি $a+b+c=0$ হয়,

প্রমাণ কর : $\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}=3.$

33. যদি $a^2-b^2=b^2-c^2=c^2-a^2$ হয়,

প্রমাণ কর : $\frac{ab-c^2}{a-b}+\frac{bc-a^2}{b-c}+\frac{ca-b^2}{c-a}=0.$

34. যদি $\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+b}=\frac{2}{c+a}$ হয়, প্রমাণ কর : $a^2+c^2=2b^2.$

35. যদি $a+c=2b$ হয়,

প্রমাণ কর : (i) $\frac{a}{a-b}+\frac{c}{c-b}=2.$

(ii) $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)=6b^3.$

36. যদি a ও b-এর গ. সা. গু. x এবং ল. সা. গু. y হয় এবং $x+y=a+b$ হয়, প্রমাণ কর : $x^3+y^3=a^3+b^3.$

37. যদি $x^2-3x+1=0$ হয়, x^4-7x^2+1 এর মান কত ?

38. যদি $x+\frac{1}{x}=5$ হয়, $\frac{x}{x^2+x+1}$ এর মান নির্ণয় কর।

39. যদি $x+y=a$, $x^2+y^2=b^2$, $x^3+y^3=c^3$ হয়,

প্রমাণ কর : $a^3+2c^3=3ab^2.$

40. 100 কে এমন চারি অংশে বিভক্ত কর যেন প্রথম অংশের সহিত 4 যোগ করিলে, দ্বিতীয় অংশ হইতে 4 বিয়োগ করিলে, তৃতীয় অংশকে 4 দ্বারা গুণ করিলে এবং চতুর্থ অংশকে 4 দ্বারা ভাগ করিলে প্রতি ক্ষেত্রে লব্ধ ফল সমান হয়।

41. যদি $x=b+c$, $y=c+a$, $z=a+b$ হয়,

প্রমাণ কর : $\frac{x^3+y^3+z^3-3xyz}{a^3+b^3+c^3-3abc}=2.$

42. যদি $x^2+1=5x$ হয়, প্রমাণ কর : $x^3+\frac{1}{x^3}=110.$

43. একখানি নৌকা স্রোতের অনুকূলে 16 ঘণ্টায় 104 মাইল চলিতে পারে এবং স্রোতের প্রতিকূলে 24 ঘণ্টায় 84 মাইল চলিতে পারে ; নৌকা ও স্রোতের বেগ নির্ণয় কর।

44. যদি $a : b = b : c = c : d$ হয়, প্রমাণ কর :

$$b(a-c) : c^2 - d^2 = a^2 - b^2 : c(b-d).$$

45. কোন সৈন্যাধ্যক্ষ তাঁহার সৈন্যদিগকে 5 গভীরতা বিশিষ্ট শূন্যগর্ভ বর্গব্যূহে অথবা 6 গভীরতা বিশিষ্ট শূন্যগর্ভ বর্গব্যূহে সাজাইতে পারেন, কিন্তু দ্বিতীয় প্রকার ব্যূহ রচনায় প্রথম সারিতে পূর্বাপেক্ষা 4 জন সৈন্য কম থাকে। উক্ত সৈন্যদলে কত সৈন্য আছে ? (C. U. 1887)

46. যদি $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$ হয়, দেখাও যে $\frac{x^3}{a^2} + \frac{y^3}{b^2} = \frac{(x+y)^3}{(a+b)^2}$.

47. যদি $x = b+c$, $y = c+a$, $z = a+b$ হয়, দেখাও যে

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca.$$

48. এক ব্যক্তি যত মূল্যে একখানি ছবি ক্রয় করিলেন, তত মূল্যেই উহা বাঁধাইলেন ; বাঁধাই খরচ 1 পাউণ্ড কম এবং ছবির ক্রয়-মূল্য 15 শিলিং বেশী হইলে, বাঁধাই খরচ ছবির মূল্যের অর্ধেক হইত। ছবির মূল্য নির্ণয় কর। (C. U. 1860)

49. যদি $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = 2$ হয়, প্রমাণ কর :

$$\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} = 1.$$

50. সমাধান কর :

$$\frac{2x+2y-3}{5} = \frac{3x-7y+4}{6} = \frac{8y-x+2}{7}$$ (C. U. 1914)

51. উৎপাদক নির্ণয় কর : $a(a+2b)^3 - b(b+2a)^3$.

52. তিন অঙ্কে গঠিত কোন সংখ্যার মধ্যের অঙ্কটি শূন্য এবং অঙ্কগুলির সমষ্টি 8 ; অঙ্কগুলির স্থান পরিবর্তন করিয়া যে সংখ্যা গঠিত হয় উহা মূল সংখ্যা অপেক্ষা 198 বেশী। সংখ্যাটি নির্ণয় কর। (C. U. 1922)

53. একটি নির্বাচন প্রতিদ্বন্দ্বিতায় A এবং B দুইজন মনোনয়ন প্রার্থী ছিলেন। ভোটদাতাদের $\frac{2}{5}$ অংশ A-কে ভোট দিল এবং B অপেক্ষা 200 ভোট বেশী পাইয়া A নির্বাচিত হইলেন। যদি ভোটদাতাদের $\frac{1}{3}$ অংশ ভোট না দিয়া থাকে, তাহা হইলে ভোটদাতাদের সংখ্যা কত ? (A. U. 1934)

54. যদি $x - \frac{1}{x} = 4$ হয়, দেখাও যে, $x^3 + 6x - \frac{6}{x} - \frac{1}{x^3} = 100.$

55. যদি $a+b+c+d = 0$ হয়, প্রমাণ কর :

$$a^3+b^3+c^3+d^3 = 3(bcd+cda+dab+abc).$$

56. যদি $x = by+cz+dw$, $y = ax+cz+dw$, $z = ax+by+dw$, $w = ax+by+cz$ হয়, প্রমাণ কর,

$$\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}+\frac{d}{1+d} = 1.$$

57. যদি $2s = a+b+c+d$ হয়, প্রমাণ কর :

$$4(bc+ad)^2-(b^2+c^2-a^2-d^2)^2 = 16(s-a)(s-b)(s-c)(s-d).$$

58. এক ব্যক্তি বৈকাল 5-টা ও 6-টার মধ্যে ঘড়ি দেখিয়া বাহিরে গিয়া 6-টা ও 7-টার মধ্যে কোন এক সময়ে ফিরিয়া আসিয়া দেখিল ঘড়ির কাঁটা দুইটি পরস্পর স্থান পরিবর্তন করিয়াছে। লোকটি কখন বাহিরে গিয়াছিল ?

59. এক এরোপ্লেন-চালক নির্দিষ্ট সময়ের $2\frac{1}{2}$ ঘণ্টা পরে ছাড়িয়া 1200 মাইল দূরবর্তী কোন ষ্টেশনে নির্দিষ্ট সময়ে পৌঁছিবার জন্য, প্লেনের বেগ ঘণ্টায় 40 মাইল বাড়াইয়া দিল এবং যথাসময়ে উক্ত ষ্টেশনে পৌঁছিল। প্লেনের স্বাভাবিক বেগ কত ?

60. কোন পরিবারের মাসে 6 কিলোগ্রাম চিনি এবং 5 কিলোগ্রাম গুড় লাগে, এবং ইহাতে তাহার 12 টাকা 50 ন. প. খরচ হয়। চিনির মূল্য 25% এবং গুড়ের মূল্য 20% বাড়িয়া যাওয়ায় ঐ দুইটি দ্রব্যের জন্য খরচ 23% বাড়িয়া গেল। মূল্যবৃদ্ধির পূর্বে প্রতি কিলোগ্রাম চিনি ও গুড়ের মূল্য কত ছিল ?

উত্তরমালা

বীজগণিত

প্রশ্নমালা 1 (পৃঃ 4)

1. +20 টাকা, −15 টাকা **2.** +100 মাইল, −100 মাইল
3. 12টা + 10 মিনিট, 12টা − 10 মিনিট **4.** $+8°$, $-8°$
5. +30 টাকা, −30 টাকা **6.** +1000 ফুট, −1000 ফুট
7. $+10°$, $-10°$ **8.** $-x$ টাকা **9.** $3x$ টাকা লাভ **10.** 3% কম।

প্রশ্নমালা 3 (পৃঃ 9-10)

1. 72 **2.** −35 **3.** −24 **4.** 70 **5.** −24
6. 90 **7.** 3 **8.** −3 **9.** −3 **10.** 3
11. −6 **12.** −16 **13.** −64 **14.** 81 **15.** −432
16. −18, −54, −324, 0

প্রশ্নমালা 4 (পৃঃ 18)

1. $2b$ **2.** $a-b-c+d$ **3.** $x+y+z$
4. 0 **5.** $2ac-2ad$ **6.** $3x-3y$
7. $2x+3z$ **8.** $2a$ **9.** $b-c$
10. $2d-2b-2c$ **11.** $15x$ **12.** $3z$
13. $2a$ **14.** $x+3y-3z$ **15.** $4q-2p$

প্রশ্নমালা 5 (পৃঃ 23-24)

1. $3\frac{1}{3}$ **2.** 36 **3.** 4 **4.** 3 **5.** 2 **6.** 6
7. 7 **8.** 3 **9.** 10 **10.** 5 **11.** $10\frac{2}{3}$ **12.** 8
13. 3 **14.** 4 **15.** 0 **16.** 1 **17.** 4 **18.** 4
19. 3 **20.** 3 **21.** 2 **22.** 3 **23.** 15 **24.** 1
25. 6 **26.** 6 **27.** 20 **28.** 12 **29.** 24 **30.** 8
31. $-3\frac{3}{5}$ **32.** −9 **33.** 18 **34.** 0 **35.** −2 **36.** $\frac{1}{3}$
37. 4 **38.** 10 **39.** 12·4 **40.** 14

প্রশ্নমালা 6 (পৃঃ 34-40)

1. 60 **2.** 10 **3.** 2 **4.** 30 **5.** 540 **6.** 15 ব.
7. 5 **8.** 5 **9.** 2 **10.** 1 **11.** 60, 40 **12.** 13, 6
13. 17, 13 **14.** 55, 45 **15.** 100 বালক, 30 বালিকা
16. 48 বৎসর, 16 বৎসর **17.** 80 মাইল **18.** 60 **19.** 40
20. পুরুষ 5 টাকা, স্ত্রীলোক 3 টাকা **21.** 6 দিনে
22. 20, 21, 22 **23.** 28 **24.** 9 **25.** 12, 13 **26.** 12, 8
27. A 30, B 20, C 50 টাকা **28.** 30 টাকা, 20 আধুলি
29. 30 ফুট **30.** 24 ফুট **31.** 20 মাইল, 30 মাইল
32. 30 বৎসর **33.** 51 টাকা **34.** 19, 42
35. 12 ফুট **36.** 60, 15 **37.** 32, 27 **38.** $\frac{12}{25}$
39. $\frac{11}{13}$ **40.** 50, 51, 52 **41.** 63, 64, 65
42. 8টি দরে 56 এবং 12টি দরে 24 **43.** 400
44. 25 বৎসর **45.** 9 বৎসর **46.** পিতার বয়স 68 বৎ, পুত্রের বয়স 32 বৎ.
47. 70 বৎসর **48.** 91 **49.** 18টি দরে 96 এবং 15টি দরে 70
50. 22 সিকি, 98 দশ নয়া পয়সা **51.** 60 আধুলি, 40 সিকি
52. 8 চেয়ার, 5 টেবিল **53.** 15 দিন **54.** 6 দিন
55. 960 টাকা **56.** 1830 টাকা **57.** 1100
58. 33 বৎসর **59.** 2, 5, 1, 12 **60.** 19, 31, 8, 96
61. 84 **62.** 56 **63.** 26 **64.** 26 **65.** 73
66. 123 **67.** 456 অথবা 654 **68.** 20 ফুট, 15 ফুট
69. 24 ফুট, 12 ফুট **70.** $3\frac{2}{3}$ মাইল

প্রশ্নমালা 7 (পৃঃ 44-45)

1. $4a^2+12ab+9b^2$ **2.** $25x^2+30ax+9a^2$

3. $9a^4+12a^2b^2+4b^4$ **4.** $x^2+2+\frac{1}{x^2}$

5. $\frac{1}{p^2}+\frac{4}{pq}+\frac{4}{q^2}$ **5.** $4x^2y^2+4abxy+a^2b^2$

7. $9a^2+4+\frac{4}{9a^2}$ **8.** $4a^4-12a^2b^2+9b^4$

9. $a^2-2+\frac{1}{a^2}$ **10.** $9x^2-2+\frac{1}{9x^2}$ **11.** $p^8-4p^4q^2+4q^4$

12. $9x^2+16y^2+z^2+24xy+8yz+6zx$

13. $x^2+y^2+z^2-2xy-2yz+2zx$
14. $9a^4+b^4+16c^4-6a^2b^2+8b^2c^2-24c^2a^2$
15. $p^2x^2+p^2y^2+r^2z^2+2pqxy-2qryz-2przx$
16. $(4a+5b)^2$ 17. $(7a^2-1)^2$ 18. $(5x-3y)^2$
19. $(6ab-x)^2$ 20. $(2a-\frac{1}{2})^2$ 21. $(\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}y)^2$
22. $\left(3x+\frac{1}{3x}\right)^2$ 23. $\left(\frac{2}{ab}-\frac{ab}{4}\right)^2$ 24. 10000
25. 25 26. 100 27. ·0025 28. 2·25 29. $4b^2$
30. $36b^2$ 31. $4c^3$ 32. $4x^2-12xy+9y^2$ 34. 34
35. 61 36. 1 37. 12 38. 2 41. 11
43. 4 44. 34, 706 46. 80

প্রশ্নমালা 8 (পৃঃ 47)

1. $25a^2-36b^2$ 2. a^4-4x^2 3. $a^2b^2-a^2c^2$
4. $a^6-b^2c^2$ 5. a^6-b^6 6. $x^2-\frac{1}{4}y^2$
7. $4m^4-9n^4$ 8. $4a^2c^2-b^2d^2$ 9. a^4-b^4
10. x^4-y^4 11. a^4-16b^2 12. $1-x^4$
13. 14480 14. 1739600 15. 11447000
16. 159424 17. 1439744 18. 6249375
19. $x^2+2xy+y^2-z^2$ 20. $x^2-y^2+2yz-z^2$
21. $4x^2-12zx+9z^2-9y^2$ 22. x^4+x^2+1 23. x^4+4y^4
24. $x^8+x^4y^4+y^8$ 25. $a^2+2ab+b^2-c^2-2cd-d^2$
26. $a^2+b^2+c^2+2ab-2bc-2ca-d^2$

প্রশ্নমালা 9 (পৃঃ 51-52)

1. $1+6x+12x^2+8x^3$ 2. $125x^3+150x^2+60x+8$
3. $a^3+9a^2b+27ab^2+27b^3$
4. $64x^3+144x^2y+108xy^2+27y^3$
5. $8a^6+36a^4b^2+54a^2b^4+27b^6$
6. $a^3x^3+3a^2bx^2y+3ab^2xy^2+b^3y^3$
7. $a^3x^6+3a^4x^5+3a^5x^4+a^6x^3$
8. $p^3x^6+3p^2qx^4+3pq^2x^2+q^3$
9. $x^9+15x^6y^2+75x^3y^4+125y^6$
10. $a^3b^6+3a^2b^5c+3ab^4c^2+b^3c^3$

11. $125a^3x^3 + 150a^2bx^2y + 60ab^2xy^2 + 8b^3y^3$

12. $64a^9 + 240a^6b^2 + 300a^3b^4 + 125b^6$

13. $8a^3 + b^3 + c^3 + 12a^2b + 6ab^2 + 3b^2c + 3bc^2 + 6c^2a + 12ca^2 + 12abc$

14. $a^6 + b^3c^3 + d^3 + 3a^4bc + 3a^2b^2c^2 + 3b^2c^2d + 3bcd^2 + 3a^2d^2 + 3a^4d + 6a^2bcd$

15. $8x^3 + 27y^3 + 125z^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 135y^2z + 225yz^2 + 150z^2x + 60zx^2 + 180xyz$

16. $a^6 + b^6 + 8c^6 + 3a^4b^2 + 3a^2b^4 + 6b^4c^2 + 12b^2c^4 + 12c^4a^2 + 6c^2a^4 + 12a^2b^2c^2$

17. (*i*) 91125 (*ii*) 421875 (*iii*) 8615125

18. $8a^3x^3$ 19. $8x^3$ 20. $8b^3$ 21. $512y^3$

22. $8(a^6 + 3a^4b^2 + 3a^2b^4 + b^6)$ 23. 1 24. 125

25. (*i*) 64 (*ii*) 67 26. (*i*) 65 (*ii*) 152 (*iii*) 217 (*iv*) 72

28. 18 32. 28 33. 10 34. 9

প্রশ্নমালা 10 (পৃঃ 55—56)

1. $8a^3 - 36a^2b + 54ab^2 - 27b^3$ 2. $1 - 9x + 27x^2 - 27x^3$

3. $64x^3 - 144x^2y + 108xy^2 - 27y^3$

4. $8a^6 - 60a^4b^2 + 150a^2b^4 - 125b^6$

5. $27x^9 - 135x^6 + 225x^3 - 125$

6. $8a^9 - 60a^6b^2 + 150a^3b^4 - 125b^6$

7. $a^6 - 3a^4bc + 3a^2b^2c^2 - b^3c^3$

8. $125x^3 - 225x^4 + 135x^5 - 27x^6$

9. $a^3b^6 - 3a^4b^5 + 3a^5b^4 - a^6b^3$

10. $a^3 + b^3 - c^3 + 3a^2b + 3ab^2 - 3a^2c + 3ac^2 - 3b^2c + 3bc^2 - 6abc$

11. $8a^3 - 27b^3 - 1 - 36a^2b + 54ab^2 - 12a^2 + 6a - 27b^2 - 9b + 36ab$

12. $a^6 + b^3c^3 - 27d^3 + 3a^4bc - 9a^4d + 3a^2b^2c^2 + 27a^2d^2 - 9b^2c^2d + 27bcd^2 - 18a^2bcd$

13. 704969 14. 122763473 15. 25672375 16. $27a^3$

17. $64q^3$ 18. $512y^3$ 19. $8b^3 + 24b^2c + 24bc^2 + 8c^3$

20. $64a^3$ 21. ·125 22. ·001 23. 729

24. 20 25. (*i*) 7 (*ii*) 117 (*iii*) 152 (*iv*) 124

26. 14 27. $m^3 + 3m$ 28. 1000

30. c^3 31. 3 32. 60

প্রশ্নমালা 11 (পৃঃ 56-57)

1. $125x^3+1$ 2. $27a^3+64b^3$ 3. a^3b^3+64
4. $1000x^3+27y^3$ 5. a^6+1 6. a^6b^3+216
7. $a^3b^3+b^3c^3$ 8. a^9+125b^{18} 9. a^6-b^6
10. x^9+y^9 11. $53x^3+64b^3$ 12. $6a^3-8b^3$
13. $(3x+4)(9x^2-12x+16)$ 14. $(1+ab)(1-ab+a^2b^2)$
15. $(7x+2y)(49x^2-14xy+4y^2)$
16. $(5a+6b)(25a^2-30ab+36b^2)$
17. $(10a^2+9b^2)(100a^4-90a^2b^2+81b^4)$

প্রশ্নমালা 12 (পৃঃ 58)

1. x^6-1 2. $64a^6-1$ 3. $8a^6-27b^6$
4. $125x^3-27y^3$ 5. $27x^3y^3-64z^3$ 6. $1000a^9-27$
7. a^9-b^9 8. $x^{18}-y^{18}$ 9. 0
10. 0 11. $(2x-3)(4x^2+6x+9)$
12. $(5x-4y)(25x^2+20xy+16y^2)$
13. $(6-5a)(36+30a+25a^2)$ 14. $(ab-c)(a^2b^2+abc+c^2)$
15. $(2a+1)(4a^2-2a+1)(2a-1)(4a^2+2a+1)$
16. $(10-a^2b^2)(100+10a^2b^2+a^4b^4)$

প্রশ্নমালা 13 (পৃঃ 60)

1. x^2+4x+3 2. $x^2+17x+70$ 3. $x^2+16x+63$
4. $a^2-7a+12$ 5. $a^2-13a+40$ 6. $a^2+9a-10$
7. $a^2-7a-60$ 8. $a^2-7a-450$ 9. $a^2-a-110$
10. x^4-2x^2-35 11. a^6+a^3-72 12. $a^4b^4-6a^2b^2-7$
13. $9x^2+36x+20$ 14. $25x^4-20x^2-320$
15. $25a^6-65a^3+30$ 16. $a^2x^4-30ax^2-130$

প্রশ্নমালা 14 (পৃঃ 61)

1. $(x-y)(a+b+c)$ 2. $(x^2+y^2)(a+b-c-d)$
3. $(x-y)(a^2+b^2+1)$ 4. $2(x+y)(a+b+c)$
5. $(x+1)(x^2+1)$ 6. $(x-1)(2x^2-1)$
7. $(a+b+c)(x+y+z)$ 8. $(x+y)(3x+3y+5a+5b)$

প্রশ্নমালা 15 (পৃঃ 62)

1. $(2a+1)^2$ 2. $(x-15)^2$ 3. $4(3a^2+5)^2$
4. $(5ab-c)^2$ 5. $(a+b)^4$ 6. $(2a-2b-3c)^2$
7. $\{(a-b)x^2-4(a+b)y^2\}^2$

প্রশ্নমালা 16 (পৃঃ 63)

1. $(a+3b)(a-3b)$ 2. $(2x+5y)(2x-5y)$
3. $15a^2(a+3b)(a-3b)$ 4. $2a(a+4b^2)(a-4b^2)$
5. $9(2xy+5z)(2xy-5z)$ 6. $(a^2+b^2)(a+b)(a-b)$
7. $(9a^2+1)(3a+1)(3a-1)$ 8. $(a+b+c+d)(a+b-c-d)$
9. $(4+p+q+r)(4-p-q-r)$ 10. $(2a+2b+5)(2a+2b-5)$
11. $(x+4y-3z)(x-2y+3z)$ 12. $(21a+8b)(9a-28b)$
13. $a^2(bc-bd+c+d)(bc-bd-c-d)$
14. $4b(a+c)$ 15. $(a-3b)(3a+b-2c)$
16. $px(2qx-rx+qy-2ry)(2qx-rx-qy+2ry)$

প্রশ্নমালা 17 (পৃঃ 65-66)

1. $(a^2+a+1)(a^2-a+1)$
2. $(a^2b^2+abc+c^2)(a^2b^2-abc+c^2)$
3. $(2x^2+2x+1)(2x^2-2x+1)$ 4. $(a^2+4a+8)(a^2-4a+8)$
5. $(a^2+ab+2b^2)(a^2-ab+2b^2)$ 6. $(x^2+3x+1)(x^2-3x+1)$
7. $(a^2+a+1)(a^2-a+1)(a^4-a^2+1)$
8. $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)(a^4-a^2b^2+b^4)$
9. $9(x^2+4x+8)(x^2-4x+8)$ 10. $(x^2+6x+2)(x^2-6x+2)$
11. $(1+a+b)(1-a-b)$ 12. $(3x-y+2z)(3x-y-2z)$
13. $(x^2-2y^2+1)(x^2-2y^2-1)$ 14. $(a+2b+c)(a-c)$
15. $(a-b+c-d)(a-b-c+d)$
16. $(2x+y-3z+1)(2x-y-3z-1)$
17. $(2x+y+3z)(2x-3y-3z)$ 18. $(a+b-3)(a-b-7)$
19. $(x+2y)(x-2y-3)$
20. $2(x^2+3xy-y^2)(x^2-3xy-y^2)$ 21. $3(x^2+2x+3)(x^2-2x+3)$
22. $(3a^2+2a-4)(3a^2-2a-4)$ 23. $(3a^2+a+8)(3a^2-a+8)$
24. $(4x^2+x+9)(4x^2-x+9)$
25. $(2x^2+3xy+3y^2)(2x^2-3xy+3y^2)$

26. $(2x+z)(2x-2y-z)$
27. $(3x^2+xy+y^2)(3x^2-xy+y^2)(9x^4-5x^2y^2+y^4)$
28. $(x^2+6x+2)(x^2-6x+2)$
29. $(x^2+x-3-2y)(x^2-x-3+2y)$ 30. $(a-1-y)(a-3+y)$
31. $(a-2-y)(a-4+y)$
32. $(ax-bx+by+ay)(ax+bx+by-ay)$
33. $(x+1)(x-1)(1+y)(1-y)$
34. $(x+y+a+b)(x+y-a-b)(a-b+x-y)(a-b-x+y)$

প্রশ্নমালা 18 (পৃঃ 67)

1. $(3x+1)^3$ 2. $(5x-2)^3$ 3. $(2a+7b)^3$
4. $(1-8x)^3$ 5. $(4x-3)^3$ 6. $(6a^2+5b^2)^3$
7. $(2ab-c)^3$ 8. $2ab(5a+4b)^3$ 9. $(2a+2b+3c)^3$
10. $(a^2-7a+12)^3$

প্রশ্নমালা 19 (পৃঃ 69)

1. $(3x+1)(9x^2-3x+1)$ 2. $(2x+5y)(4x^2-10xy+25y^2)$
3. $(4x-1)(16x^2+4x+1)$ 4. $3a(a-2b)(a^2+2ab+4b^2)$
5. $(x+y)(x^2-xy+y^2)(x^6-x^3y^3+y^6)$
6. $(3x^2-4y^2)(9x^4+12x^2y^2+16y^4)$
7. $(x+3)(x-3)(x^2+3x+9)(x^2-3x+9)$
8. $(9x-2y^2)(81x^2+18xy^2+4y^4)$ 9. $(7x+2)(49x^2-14x+4)$
10. $(x+y)(x-y)(x^2+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$
11. $x^2y^2(5x-3y)(25x^2+15xy+9y^2)$
12. $(a-c)(a^2+3b^2+c^2-3ab-3bc+ac)$
13. $(2x-y-z)(4x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx)$
14. $(2x-5y+3z)(4x^2+7y^2+9z^2-2xy-12yz-6zx)$
15. $(a+b)(x-z)(x^2+3y^2+z^2-3xy-3yz+zx)$
16. $(2a-1)^2(16a^4+16a^3+24a^2+4a+1)$
17. $(a-b)(2a-2b-1)(4a^2-8ab+4b^2+2a-2b+1)$

প্রশ্নমালা 20 (পৃঃ 72-73)

1. $(x+1)(x+2)$ 2. $(x-1)(x-2)$ 3. $(x-1)(x+2)$
4. $(x+1)(x-2)$ 5. $(x+2)(x+3)$ 6. $(x-2)(x-3)$

7. $(x+1)(x+6)$ 8. $(x-1)(x-6)$ 9. $(x-2)(x+3)$
10. $(x+2)(x-3)$ 11. $(x-1)(x+6)$ 12. $(x+1)(x-6)$
13. $(x+2)(x+12)$ 14. $(x-2)(x-12)$ 15. $(x-2)(x+12)$
16. $(x+2)(x-12)$ 17. $(x+4)(x+6)$ 18. $(x-4)(x-6)$
19. $(x-4)(x+6)$ 20. $(x+4)(x-6)$ 21. $(x+1)(x+24)$
22. $(x-1)(x-24)$ 23. $(x-1)(x+24)$ 24. $(x+1)(x-24)$
25. $(x-6)(x-16)$ 26. $(x+9)(x-12)$ 27. $(x+16)(x-30)$
28. $(x+10)(x-11)$ 29. $(x+12)(x-50)$ 30. $(x+12)(x-18)$
31. $3(x-3)(x+17)$ 32. $x(x+12)(x-15)$
33. $8x(x-6)(x-17)$ 34. $(ax+6b)(ax-13b)$
35. $a(ax-2)(ax+40)$ 36. $(a+17)(a+60)$
37. $(a-19)(a+30)$ 38. $(a^2-2)(a^2+22)$
39. $(x-1)(x+1)(x^2+40)$ 40. $x(x^2+3)(x^2-13)$
41. $(x-6)(x-8)$ 42. $(x-8)(x-9)$
43. $(x+11)(x-12)$ 44. $(x-7)(x+18)$
45. $(a^2-13)(a^2-18)$ 46. $(a^2-50)(a^2+51)$
47. $(xy+6z)(xy-12z)$ 48. $(a+b-8)(a+b-9)$
49. $(x^2+y^2+7)(x^2+y^2-9)$ 50. $(x+1)(x+4)(x^2+5x-7)$
51. $(x-y)^2(x^2-7xy+y^2)$ 52. $(x-1)(x-2)(x+5)(x-8)$
53. $(x+1)(x-5)(x-2)^2$

প্রশ্নমালা 21 (পৃ: 75-76)

1. $(x+1)(2x+1)$ 2. $(x-1)(2x-1)$ 3. $(x+1)(2x-1)$
4. $(x-1)(2x+1)$ 5. $(x+1)(2x+3)$ 6. $(x-1)(2x-3)$
7. $(x-1)(2x+3)$ 8. $(x+1)(2x-3)$ 9. $(x+1)(3x+2)$
10. $(x-1)(3x-2)$ 11. $(x+1)(3x-2)$ 12. $(x-1)(3x+2)$
13. $(x+2)(3x+1)$ 14. $(x-2)(3x-1)$ 15. $(x+1)(6x+1)$
16. $(x-1)(6x-1)$ 17. $(x+1)(6x-1)$ 18. $(x-1)(6x+1)$
19. $(x+2)(3x+4)$ 20. $(x-2)(3x-4)$ 21. $(2x+3)(4x-1)$
22. $(x-4)(3x+2)$ 23. $(x+3)(5x-3)$ 24. $(3x+1)(5x-8)$
25. $(3x-4)(5x-4)$ 26. $(2ab-7c)(7ab+c)$
27. $(x-8)(3x-4)$ 28. $(5x+4)(6x-5)$ 29. $(5a-1)(5a-16)$
30. $(2a^2+1)(8a^2-15)$ 31. $(x-3y)(5x-27y)$

32. $(2x-5y)(5x+3y)$ **33.** $3(m-5n)(6m+n)$
34. $3(2a^2+5b^2)(a^2-5b^2)$ **35.** $a(a^2-8b)(3a^2+5b)$
36. $(2x+3)(2x-3)(3x+5)(3x-5)$
37. $(2x-1)(2x+1)(7x^2+5)$ **38.** $(x-2y)(x+2y)(9x^2+4y^2)$
39. $(2x-1)(2x+1)(3x^2+5)$ **40.** $(x^2y^2-5)(16x^2y^2+9)$
41. $(2a-3)(2a+3)(2a^2+5)$ **42.** $(xy-2z)(5xy+8z)$
43. $(2x-5y)(3x-4y)$ **44.** $(3x^2+4)(5x^2-3)$
45. $(5x-3)(7x+4)$ **46.** $(3x+11)(4x+7)$
47. $x(3x-7)(6x+5)$ **48.** $(x+3)(4x+3)$
49. $(x-3)(5x+8)$ **50.** $(3x-4)(3x+10)$
51. $(x+11)(3x-35)$ **52.** $(2x-9)(3x+1)$
53. $(a^2-5)(2a^2+5)$ **54.** $(x^2-8)(4x^2-3)$
55. $(a-b-7)(3a-3b+1)$ **56.** $(a-4b+5c)(2a+5b-3c)$
57. $(3a+b)(11b-3a)$

প্রশ্নমালা 22 (পৃঃ 82-83)

20. (1) $(a+b+c+d)^2-(a+b-c-d)^2$
(2) $(3a-3b)^2-(a+b)^2$ (3) $\left(\frac{2x+a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$
(4) $(6x+y^2)^2-(x-3y)^2$ (5) $(x-1)^2-(y-1)^2$
(6) $(2x-3)^2-(3y-5)^2$ (7) $\left(\frac{2x+y}{2}\right)^2-\left(\frac{y}{2}\right)^2$
(8) $\left(\frac{2x-7}{2}\right)^2-\left(\frac{11}{2}\right)^2$ (9) $(x^2+7x+11)^2-(1)^2$
(10) $(4x^2-16x+11)^2-(4)^2$

21. (1) $(5x+9y)^2+(x+y)^2$ (2) $(2a+b-c)^2+(3b-5c)^2$
(3) $(x^2+y^2+2)^2+(x^2-y^2+4xy)^2$
(4) $(x^2+3x+1)^2+(3)^2$ (5) $(4x^2+8x-13)^2+(5)^2$

প্রশ্নমালা 24 (পৃঃ 88-89)

1. $6a^2b^2c$ **2.** $5x^2y^3z^3$ **3.** $x+2$
4. $x-2$ **5.** $x^2(x+2)$ **6.** $x+3$
7. $x+2$ **8.** $a-5$ **9.** $x-2$
10. $ab(a^2+ab+b^2)$ **11.** $x(2x-1)$ **12.** $2x+y$
13. $1+2x+4x^2$ **14.** x^2-y^2 **15.** $3x+1$

প্রশ্নমালা 25 (পৃঃ 91)

1. $42a^3b^4c^5$
2. $60x^4y^4z^2$
3. $x^2(x+2)(x-2)(x+4)$
4. $(x+2)(x-3)(x+4)$
5. $(x+2y)(x+3y)(x-3y)(x+4y)$
6. $(x+1)(x-1)(2x+1)$
7. $(a+b)(a-b)(a^2+b^2)(a^2+ab+b^2)$
8. $(x-1)(x-2)(x+3)$
9. $(x+2)(x-3)(x+4)$
10. $(x-1)(x-2)(x-3)$
11. $(x-2)(x-3)(2x+1)$
12. $(x^3+xy^2+y^3)(x^3-xy^2+y^3)(x^3-xy^2-y^3)$
13. $(2a-3b)(3a+2b)(a-b)(4a^2+6ab+9b^2)$
14. $60(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$
15. $(1+x+x^2)(1-x+x^2)$
16. $(x+a)(x-a)(x^2+ax+a^2)(x^2-ax+a^2)$
17. $a(a+b)(a-b)(a^2+ab+b^2)(a^2+b^2)(a^4+b^4)$
18. $(3x+1)(3x-1)(3x^2+1)(3x^2-1)(x^2-3)^2$
19. $(x-1)^2(x+1)$
20. $(2x+3y+z)(2x-3y-z)(2x+3y-z)$

প্রশ্নমালা 26 (পৃঃ 98)

1. $x-3$
2. $x+1$
3. x^2+3x+1
4. x^2+x-2
5. $x-1$
6. $x-1$
7. x^2+x-1
8. x^3-2x^2+3x-1
9. $x-1$
10. x^2-3x-4
11. x^2+5x+1
12. $3x-7$
13. $2(x-2)$
14. $x^2(2x-3)$ [প্রশ্নে $-6x^3$ স্থলে $+6x^3$ হইবে]
15. $xy(x+y)$
16. x^2-2x+3
17. x^2-3x+4
18. $x+5$
19. $x(x-3)$
20. x^2-2x+3
21. x^2-2x+3
22. x^2-3x+2
23. $x-2$
24. $2x+3$
25. x^2-2x+1
26. $x+2$
27. $x-2$
28. a^2+2a+3
29. x^2+x+1
30. $2(x^2+3x+2)$

প্রশ্নমালা 27 (পৃঃ 102)

1. $2x^5+x^4-10x^3-5x^2+8x+4$
2. $x^5+3x^4+2x^3+2x^2-8$
3. $12x^4+4x^3-21x^2-16x-3$
4. $x^4+3x^3-7x^2-21x-36$
5. $6x^6+25x^5+6x^4-50x^3-6x^2+25x-6$
6. $2x^6+13x^5-10x^4-33x^3+13x^2-18x-3$

7. $6x^5 - 10x^4 + 13x^3 - 9x^2 + 5x - 2$ 8. $a^4 - 5a^2 + 4$

9. $x^6 + 5x^5 - 33x^4 - 149x^3 + 212x^2 + 684x - 720$

10. $6x^6 + 5x^5 - 22x^3 + 17x - 6$ 11. $4x^4 - 32x^3 + 77x^2 - 55x + 12$

12. $2x^2 + 5x - 3$ 13. $2x - 1$.

প্রশ্নমালা 28 (পৃঃ 104)

1. $\frac{x^2}{2x-1}$ 2. $x - 1$ 3. $\frac{9x^2 - 15x + 25}{x(5x+3)}$

4. $\frac{3x+1}{x+1}$ 5. $\frac{1-3x}{2-3x}$ 6. $\frac{1+x}{1+x^2}$

7. $\frac{9x^2+3x+1}{4x-3}$ 8. $\frac{x^2+x+1}{x+1}$ 9. $\frac{9+3x+x^2}{12-x}$

10. $\frac{(3x+1)^2}{(3x-1)(9x^2+1)}$ 11. $\frac{a+b+c}{a-b+c}$ 12. $\frac{x-3y}{2x+y}$

প্রশ্নমালা 29 (পৃঃ 109—111)

1. $\frac{b^2c^2(c-a)(a-b)}{abc(b-c)(c-a)(a-b)}, \frac{c^2a^2(b-c)(a-b)}{abc(b-c)(c-a)(a-b)}, \frac{a^2b^2(b-c)(c-c)}{abc(b-c)(c-a)(a-b)}$

2. $\frac{x+4}{(x+1)(x-3)(x+4)}, \frac{2x(x+1)}{(x+1)(x-3)(x+4)}, \frac{3x^2(x-3)}{(x+1)(x-3)(x+4)}$

3. 1 4. $-\frac{(x-y)}{2(x+y)}$ 5. $\frac{2+x}{1-x^3}$ 6. 1

7. $\frac{2(a^2+b^2)}{a^2-b^2}$ 8. $\frac{4ab}{a^2-b^2}$ 9. $\frac{3}{x^2-6x+5}$

10. $\frac{3}{x^2-4x+3}$ 11. 0 12. 1 13. 1 14. 1

15. 0 16. $\frac{64ax^3}{16x^4-a^4}$ 17. $\frac{8a^7}{a^8-b^8}$

18. $\frac{1}{a^4-x^4}$ 19. $\frac{16a}{1-a^4}$ 20. 0 21. 0 22. 1

23. 1 24. 0 25. 0 26. 1

27. $\frac{3}{a+c}$ 28. 1 29. $\frac{2}{(1-a^2)^2}$ 30. 0

31. $\frac{1}{x(x-a)(x-b)}$ 32. $\frac{16x^{15}}{x^{16}-1}$ 33. $x^4 + 2$

প্রশ্নমালা 30 (পৃঃ 113—114)

1. $\frac{xy^2(x-y)}{x+y}$ 2. $\frac{3z}{x^2(x+y)}$ 3. $\frac{2a}{a+2b}$

4. $\frac{2}{3x^2}$ 5. $(a+b)(a^2+ab+b^2)$ 6. 1 7. $a+b$

8. $-\frac{1}{y}$ 9. 1 10. 1 11. 1 12. $\frac{x}{y}$

13. $\frac{1-b}{a}$ 14. $\frac{a-b}{a}$ 15. $\frac{ab}{(a-b)^2}$ 16. $\frac{ab}{a-b}$ 17. $x-3$

18. $\frac{4(a^2+b^2)}{(a-b)^2}$ 19. 1 20. $\frac{1}{x^3+y^3}$

প্রশ্নমালা 31 (পৃঃ 115—116)

1. 1 2. 1 3. $\frac{a-3b}{a-b}$ 4. $\frac{a+x}{a-4x}$

5. 1 6. $\frac{4x^2+6xy+9y^2}{(x+y)(2x+3y)}$ 7. $\frac{1}{x}$ 8. 1

9. $\frac{a^2+1}{a^2-1}$ 10. 1 11. $\frac{1}{(a-b)^2}$ 12. $\frac{a}{a^2-b^2}$

13. $\frac{(a+b+c)^2}{2bc}$ 14. $\frac{2(x^2+y^2)}{y^2}$ 15. $\frac{2a^2}{a^2+b^2}$

প্রশ্নমালা 32 (পৃঃ 124—125)

1. $\frac{6}{1-a^6}$ 2. $\frac{1}{(x+1)^2}$ 3. $\frac{y^8}{x^8-y^8}$

4. $\frac{4x^7}{x^8-a^8}$ 5. $\frac{1}{x-1}$ 6. $\frac{4a^2}{a^2-b^2}$

7. $\frac{1}{x-y}$ 8. 3 9. $2(a+b+c)$ 10. 1

11. $\frac{a+b}{a-b}$ 12. $\frac{2a^4}{(a^2+b^2)^2}$ 13. $\frac{1}{2}$ 14. x

15. 1 16. $\frac{(2+x^2)(1+x^4)}{x}$ 17. $\frac{x^2}{x^2+x-1}$

18. $\frac{3}{3a+2-x}$ 19. $\frac{4a^4}{a^4-x^4}$ 20. 0 21. 0 22. 0

প্রশ্নমালা 34 (পৃঃ 135)

1. 8	**2.** 5	**3.** $\frac{6a}{7}$	**4.** $\frac{ab}{ac-1}$
5. $\frac{a^2c}{b(c-a)}$	**6.** $-(a+b)$	**7.** $\frac{bd-ac}{a-b}$	**8.** $2a$
9. $\frac{1}{ab}$	**10.** 1	**11.** $\frac{1}{5}$	**12.** 1
13. b	**14.** 5	**15.** $4\frac{1}{2}$	**16.** 4
17. 7	**18.** $\frac{2ab}{a+3b}$	**19.** $\frac{bc-ad}{a-b-c+d}$	**20.** 12·4
21. 5	**22.** 3	**23.** 1·5	**24.** $\frac{b^2-ab}{a+3b}$

প্রশ্নমালা 35 (পৃঃ 138)

1. 2	**2.** $-18\frac{1}{2}$	**3.** 6	**4.** 20
5. 6	**6.** -4	**7.** c	**8.** $-\frac{ab(m+n)}{am+bn}$
9. $a+3b+5c$	**10.** $bc+ca+ab$	**11.** $-(a+b+c)$	
12. $-(a+b+c)$	**13.** $\frac{bc+ca+ab}{abc}$	**14.** $a+b$	
15. $a^3+b^3+c^3$			

প্রশ্নমালা 36 (পৃঃ 145-147)

1. -2	**2.** 1	**3.** $\frac{bc-ad}{b+c-a-d}$	**4.** $a-2b$
5. -2	**6.** $\frac{ab}{a+b}$	**7.** $-\frac{4}{3}$	**8.** $-6\frac{1}{2}$
9. $-5\frac{1}{2}$	**10.** $3\frac{1}{3}$	**11.** 16	**12.** 6
13. -1	**14.** 16	**15.** $\frac{4}{5}$ **16.** $-\frac{73}{48}$	**17.** $\frac{2}{7}$
18. $-\frac{13}{24}$	**19.** $\frac{a^2+b^2}{a+b}$	**20.** $2(c-a-b)$	**21.** 2
22. $a-2b$	**23.** 3	**24.** 3	**25.** 6
26. $2\frac{1}{2}$	**27.** $-1\frac{1}{2}$	**28.** $4\frac{1}{2}$	**29.** 6
30. 3	**31.** $\frac{ab(a+b-2c)}{ac+bc-a^2-b^2}$	**32.** $\frac{c^2-ab}{a+b-2c}$	

33. $\frac{-ab(p+q)}{pa+qb}$ 34. 2 35. $-(a^2+b^2+c^2)$
36. $-\frac{a+b}{2}$ 37. $-5\frac{1}{2}$ 38. $-b$
39. $a+b+c$ 40. $5\frac{1}{2}$ 41. $-\frac{2ab}{c}$
42. $\frac{b(a+c)}{a-c}$ 43. $2a$ 44. $\frac{ab}{2(a+b)}$
45. $\frac{ab+bc-b^2}{a}$ 46. a

প্রশ্নমালা 37 (পৃঃ 152)

1. $x=3, y=2$ 2. $x=13, y=6$ 3. $x=3, y=2$
4. $x=2, y=3$ 5. $x=4, y=-1$ 6. $x=5, y=2$
7. $x=2, y=3$ 8. $x=1, y=1$ 9. $x=2, y=3$
10. $x=1, y=2$ 11. $x=16, y=4$ 12. $x=6, y=2$
13. $x=2, y=3$ 14. $x=2a, y=2b$ 15. $x=a^2, y=b^2$

প্রশ্নমালা 38 (পৃষ্ঠা 156—157)

1. $x=1, y=2$ 2. $x=2, y=3$ 3. $x=2, y=3$
4. $x=5, y=2$ 5. $x=2, y=3$ 6. $x=4, y=5$
7. $x=7, y=4$ 8. $x=10, y=5$ 9. $x=4, y=3$
10. $x=6, y=7$ 11. $x=4, y=6$ 12. $x=7, y=5$
13. $x=5, y=3$ 14. $x=2, y=3$ 15. $x=3, y=2$
16. $x=1, y=-1$ 17. $x=4, y=2$ 18. $x=3, y=2$
19. $x=\frac{3}{34}, y=\frac{7}{17}$ 20. $x=8, y=5$ 21. $x=2, y=3$
22. $x=5, y=7$ 23. $x=16, y=4$ 24. $x=4, y=10$
25. $x=\frac{1}{8}, y=\frac{1}{5}$ 26. $x=2, y=\frac{2}{3}$ 27. $x=-\frac{1}{2}, y=\frac{1}{7}$
28. $x=\frac{1}{5}, y=\frac{1}{7}$ 29. $x=\frac{r(q-r)}{p(q-p)}, y=\frac{r(p-r)}{q(p-q)}$
30. $x=\frac{pm-qn}{p^2}, \quad y=\frac{pm-qn}{pq}$
31. $x=\frac{n}{m^2-mn+n^2}, \quad y=\frac{m}{m^2-mn+n^2}$
32. $x=3, y=2$ 33. $x=2\frac{1}{2}, y=\frac{1}{2}$ 34. $x=c, y=b$
35. $x=\frac{a^2bc}{a^2+b^2}, \quad y=-\frac{ab^2c}{a^2+b^2}$

প্রশ্নমালা 39 (পৃঃ 160)

1. $x=3, \quad y=1$ 2. $x=4, \; y=3$ 3. $x=5, y=-1$
4. $x=-1, y=-2$ 5. $x=4, \; y=8$ 6. $x=3, y=5$
7. $x=3, \quad y=3$ 8. $x=6, \; y=3$ 9. $x=\frac{1}{2}, y=\frac{1}{3}$
10. $x=2, \quad y=5$ 11. $x=\frac{1}{m}, y=\frac{1}{n}$ 12. $x=a, y=b$

প্রশ্নমালা 40 (পৃঃ 171-174)

1. 72 2. 42 3. 82 বা 28 4. 75
5. 253 6. 8, 3 7. 3 মাইল
8. ঘণ্টায় 4 মাইল এবং 1 মাইল 9. 17 ফু., 13 ফু.
10. 7 টা $38\frac{2}{11}$ মি. 11. 3 টা $16\frac{4}{11}$ মি., 3 টা $49\frac{1}{11}$ মি.
12. 5 টা $10\frac{10}{11}$ মি. এবং 5 টা $43\frac{7}{11}$ মি.
13. 4 টা $10\frac{10}{11}$ মি., 4 টা $32\frac{8}{11}$ মি.
14. 10 টা $10\frac{10}{11}$ মি., 10 টা $32\frac{8}{11}$ মি. 15. 3 টা. $21\frac{57}{143}$ মি.
16. 2 টা $31\frac{7}{143}$ মি., 6 টা. $12\frac{84}{143}$ মি., 3 ঘ. $41\frac{7}{13}$ মি.
17. 3 টা $29\frac{5}{11}$ মি. 18. 2250 19. 600
20. 1000 21. 120 22. 800
23. 530 24. 156 টাকা 4 আনা 25. 3 টা. 12 আ.
26. 520 টাকা 27. 72 28. 22 টাকা, 24 টাকা
29. 75 টাকা 30. $7\frac{1}{11}$ দিন 31. $5\frac{11}{61}$ দিন
32. 3 মাইল 33. 6 মিনিট 34. 1100 ফুট
35. 33, 21

প্রশ্নমালা 41 (পৃঃ 181)

36. $y=11-3x$ 37. $y=13-4x$ 38. $3y=4x+5$
39. $y=3x-10$ 40. $3y=x-13$ 41. $-3y=4x+13$
42. $y=7-x$ 43. $5x-6y=15$ 44. $-5y=4x+20$

প্রশ্নমালা 42 (পৃঃ 183)

1. 40 বর্গ একক 2. 25 ব. একক
3. (1) $22\frac{1}{2}$ ব. একক (2) 10 ব. একক (3) 12 ব. একক (4) $22\frac{1}{2}$ ব. একক
4. (1) $12\frac{1}{2}$ ব. একক (2) $10\frac{1}{2}$ ব. একক (3) 9 ব. একক (4) 50 ব. একক
5. (1) 33 ব. একক (2) $37\frac{1}{2}$ ব. একক (3) $25\frac{1}{2}$ ব. একক
6. 27 ব. একক।

প্রশ্নমালা 43 (পৃঃ 185)

1. ± 4 2. ± 3 3. ± 2 4. ± 5
5. $\pm \sqrt{7}$ 6. $\pm \sqrt{10}$ 7. $\pm \sqrt{21}$ 8. $\pm 2\sqrt{3}$
9. ± 4 10. ± 9 11. $\pm 8\frac{1}{3}$ 12 ± 2
13. ± 6 14. $\pm a\sqrt{5}$ 15. ± 3 16. $\pm \sqrt{ab}$
17. ± 8 18. ± 2 19. ± 3 20. $\pm 2\sqrt{2}$

প্রশ্নমালা 44 (পৃঃ 187)

1. 1, 2 2. 2, 5 3. 4, -3 4. 7, -3
5. $-2, -3$ 6. 5, $\frac{2}{5}$ 7. $-a, -b$
8. $a+1, -(a+2)$ 9. ·3, ·6 10. 7, $-4\frac{9}{17}$
11. 2, $-4\frac{1}{2}$ 12. $-11, 9\frac{15}{17}$ 13. 12, $\frac{3}{4}$
14. $-13, 6\frac{3}{4}$ 15. 25, $\frac{1}{25}$ 16. 0, $\frac{2}{3}$
17. $a, -(a+b)$ 18. $-a, -b$ 19. 1, $\frac{1}{3}$
20. 1, 3 21. $a+b, \dfrac{a^2+b^2}{a+b}$
22. $-3a, \dfrac{-7a}{5}$ 23. $1, \dfrac{2b}{a-b}$ 24. ± 6, 0.

প্রশ্নমালা 45 (পৃঃ 195-196)

1. 1 : 7 2. $a : b$ 3. 4 : 5 4. 5 : 6, 3 : 4, 2 : 3
5. 3 : 2 6. $\frac{13}{14}$ 7. (*i*) $\frac{3}{4}$ (*ii*) $\frac{3}{2}$ অথবা $\frac{5}{4}$
8. $4\frac{3}{7}$ 9. 15 বৎসর, 35 বৎসর 10. 7
11. 27, 48 12. 6 এবং 8 13. 80, 120
14. 8, 12 15. 9 16. 9 : 65
17. $\frac{2}{3}$ 18. $\frac{4}{13}$ 19. A-র 1 টাকা, B-র 16 টাকা
20. পিতার বয়স 50 বৎসর, পুত্রের বয়স 30 বৎসর।
22. $\dfrac{-ab}{a+b}$ 23. দ্বিতীয় দলের।

প্রশ্নমালা 46 (পৃঃ 199)

1. 20 2. 56 3. $\dfrac{15abc}{2}$ 4. 50
5. $4\frac{1}{2}$ 6. $(a^2+ab+b^2)^2$ 7. 21
8. 63 9. $6x^2yz$ 10. $2\sqrt{3}$ 12. 5

প্রশ্নমালা 47 (পৃঃ 206-208)

30. 4 40. 0 45. 2

প্রশ্নমালা 48 (পৃঃ 210)

1. $-1\frac{1}{3}$ 2. $5\frac{1}{2}$ 3. $\frac{a+b}{2}$ 4. $1\frac{1}{2}$ 5. 13
6. $-5\frac{1}{2}$ 7. $\left(\frac{2a}{a+1}\right)^2$ 8. $\frac{a(c+1)^2}{2(c^2+1)}$ 9. 3 10. $\frac{cq-br}{ar-cp}$

প্রশ্নমালা 49 (পৃঃ 212-213)

1. 1, 3, 9 2. 12, 18, 30 3. 6, 9, 15 4. 18, 32
5. 24, 42 6. 84 7. 15 : 8 8. 4 সের
9. 31 : 16 10. 35 বৎসর, 5 বৎসর 11. $\frac{1}{3}$
12. 3 : 1 13. প্রথম বিস্থালয়ের 14. 32 : 63 15. 24 সের

প্রশ্নমালা 50 (পৃঃ 219-220)

1. 3 2. 4 3. 6 4. 1
5. $-1\frac{1}{2}$ 6. 4 7. -2 8. 9
9. $x=-2, y=3$ 10. $x=2, y=6$ 11. $x=1, y=4$
12. $x=-4, y=0$ 13. $x=8, y=6$ 14. $x=4, y=0$
15. $x=6, y=5$ 16. $x=3, y=1$ 17. $x=3, y=1$
18. $x=4, y=7$ 19. $x=9, y=11$ 20. $x=1\frac{1}{2}, y=3\frac{1}{2}$
21. $x=1, y=-1$ 22. $x=2, y=3$ 23. $x=-1, y=2$
24. $x=4, y=1$ 25. $x=3, y=4$ 26. $x=0, y=5$
27. $x=1, y=1$ 28. $x=5, y=1$ 29. $x=3, y=4$
30. $x=3, y=1$ 31. $x=2$

বিবিধ প্রশ্ন (পৃঃ 220-226)

1. (i) $(2x-y+z)(4x^2+y^2+z^2+2xy+yz-2zx)$
(ii) $(x+a)\left(x+\frac{1}{a}\right)$ (iii) $(x^2-3x-6)(x^2-3x-16)$
(iv) $(2a+2b+5)(a+b-5)$
2. (i) $x(x+2)$ (ii) x^2+x-2
3. (i) $(x^2-1)(x^2-4)$ (ii) $(x-1)^2(x+1)(x-2)(x^2+1)$
(iii) $(3x+1)(2x-1)(x+2)$

5. $x^2-2x-15$

6. (i) $\dfrac{x-4}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ (ii) 0 (iii) 6

7. (i) $a+b+c$ (ii) $a+b+c$ (iii) $-(a+b+c)$

8. 14 9. 24 বৎসর 10. পিতার 68 বৎসর, পুত্রের 32 বৎসর

11. $\frac{5}{9}$ 12. 72 13. 42 14. 3600

15. 654 বা 456 16. 200 টাকা 17. 7 শিলিং 18. 36 মাইল

19. 30 এবং 70 20. 5 একক 21. 5, $-3\frac{1}{2}$ 22. $y=1$

24. (i) $x=2, y=0$ (ii) $x=3$ (iii) $x=8, y=2$

25. 60 গ্যালন 27. $\dfrac{y^3-3y+1}{y(y-1)}$ 37. 0 38. $\frac{1}{6}$

40. 12, 20, 4, 64 43. ঘণ্টায় 5 মাইল এবং $1\frac{1}{2}$ মাইল

45. 600 48. 2 পা. 15 শি. 50. $x=3, y=1$

51. $(a+b)(a-b)^3$ 52. 305 53. 1500

58. 5 টা $32\frac{4}{13}$ মি. 59. ঘণ্টায় 120 মাইল 60. 1 টাকা 25 ন. প., 1 টাকা

জ্যামিতি

নবম শ্রেণীর পাঠ্যাংশ

উপক্রমণিকা

সপ্তম ও অষ্টম শ্রেণীর পাঠের পুনরালোচনা

1. জ্যামিতি শাস্ত্র যুক্তিমূলক। এই যুক্তি প্রণালীর একটি বিশিষ্ট ধারা আছে, কতকগুলি তথ্য অগ্রে প্রমাণ করিয়া উহাদের সাহায্যে পরবর্তী অধিকতর দুরূহ তথ্যগুলি যাহাতে প্রমাণ করা যাইতে পারে এইরূপে তথ্যগুলি পর পর সুবিন্যস্ত। আবার তথ্যগুলি পূর্বাপর প্রমাণ সাপেক্ষ হইলেও এমন আরও কতকগুলি মৌলিক সত্য মানিয়া লইতে হয় যেগুলিকে কোনরূপ যুক্তিদ্বারা প্রমাণ করিবার প্রয়োজন হয় না। এই সত্যগুলি মানুষের সহজাত-বুদ্ধির উপর এমন ভাবে প্রতিষ্ঠিত যে ইহার বিপরীত কল্পনা অসম্ভব। এইরূপ সহজ জ্ঞানের উপর প্রতিষ্ঠিত প্রমাণ-নিরপেক্ষ মৌলিক সত্যগুলিকে স্বতঃসিদ্ধ (Axiom) বলা হয়।

জ্যামিতির নূতন পাঠ্যাংশ আরম্ভ করিবার পূর্বে স্বতঃসিদ্ধগুলি একবার আলোচনা করিয়া লওয়া প্রয়োজন। স্বতঃসিদ্ধগুলি যথাস্থানে দ্রষ্টব্য।

এতদ্ভিন্ন আরও কয়েকটি প্রমাণযোগ্য ঔপপত্তিক সত্যকে স্বতঃসিদ্ধের ন্যায় স্বীকার করিয়া লওয়া হইয়াছে। এগুলিকে স্বীকৃত-সিদ্ধান্ত নামে অভিহিত করা হইয়াছে। পুনরাবৃত্তির জন্য স্বীকৃত-সিদ্ধান্ত কয়টির পুনরুল্লেখ করা হইল।

স্বীকৃত সিদ্ধান্ত 1. একটি সরলরেখা অন্য আর একটি সরলরেখার সহিত কোন বিন্দুতে মিলিত হইয়া একই পার্শ্বে যে দুইটি সন্নিহিত কোন উৎপন্ন করে তাহাদের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান।

স্বীকৃত সিদ্ধান্ত 2. দুইটি সন্নিহিত কোণ পরস্পর সম্পূরক হইলে, উহাদের বহিঃস্থ বাহুদ্বয় একই সরলরেখায় অবস্থিত হইবে।

স্বীকৃত সিদ্ধান্ত 3. একটি সরলরেখা অপর দুইটি সরলরেখাকে ছেদ করিলে যদি অনুরূপ কোণ দুইটি সমান হয়, তাহা হইলে সরলরেখা দুইটি পরস্পর সমান্তরাল।

স্বীকৃত সিদ্ধান্ত 4. যদি কোন ত্রিভুজের দুই বাহু ও উহাদের অন্তর্ভূত কোণ যথাক্রমে অপর একটি ত্রিভুজের দুই বাহু ও উহাদের অন্তর্ভূত কোণের সমান হয়, তাহা হইলে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম।

স্বীকৃত সিদ্ধান্ত 5. যদি দুইটি ত্রিভুজের মধ্যে একটির দুই কোণ যথাক্রমে অপরটির দুই কোণের সমান হয় এবং একটি ত্রিভুজের এক বাহু অপরটির অনুরূপ বাহুর সমান হয়, তাহা হইলে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম।

এতদ্ব্যতীত স্বীকার্য (Postulates) নামে অভিহিত কয়েকটি সহজ অঙ্কন এবং প্রয়োজনস্থলে কাল্পনিক অঙ্কনের (Hypothetical Construction) পুনরালোচনা করা প্রয়োজন।

2. দুইটি ত্রিভুজের সর্বসমতা অতি প্রয়োজনীয় উপপাদ্য বিষয়। ঔপপত্তিক প্রমাণে উহাদের বহুল প্রয়োগ। এইগুলির অতি সুস্পষ্ট ধারণা না থাকিলে পদে পদে অসুবিধার সৃষ্টি হয়। এগুলিকে জ্যামিতিক প্রমাণের অন্যতম প্রাথমিক ভিত্তি বলা যাইতে পারে।

দুইটি ত্রিভুজের সর্বসমতার স্থলগুলির মাত্র উল্লেখ করা হইল ; প্রমাণ যথাস্থানে দ্রষ্টব্য।

(i) স্বীকৃত সিদ্ধান্ত 4 এবং স্বীকৃত সিদ্ধান্ত 5.

(ii) একটি ত্রিভুজের তিন বাহু অপর একটি ত্রিভুজের তিনবাহুর সহিত যথাক্রমে সমান হইলে, ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম। (উপ. 11)

(iii) দুইটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজদ্বয় পরস্পর সমান এবং একটির এক বাহু অপরটির এক বাহুর সমান হইলে, ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। (উপ. 12)

3. নিম্নলিখিত বিষয়গুলি মনে রাখা প্রয়োজন :

(i) দুইটি সরলরেখা পরস্পর ছেদ করিলে, বিপ্রতীপ কোণগুলি পরস্পর সমান। (উপ. 1)

(ii) একটি সরলরেখা অপর দুইটি সরলরেখাকে ছেদ করিলে যদি দুইটি একান্তর কোণ সমান হয় অথবা ছেদকের একই পার্শ্বস্থ অন্তঃকোণদ্বয়ের সমষ্টি দুই সমকোণ হয়, তাহা হইলে সরলরেখা দুইটি পরস্পর সমান্তরাল (বিপরীত প্রতিজ্ঞা সহ)। (উপ. 2, 3)

(iii) যে সকল সরলরেখা একই সরলরেখার সমান্তরাল, তাহারা পরস্পর সমান্তরাল। (উপ. 4)

(iv) ত্রিভুজের তিনকোণের সমষ্টি দুই সমকোণ এবং ত্রিভুজের কোন বাহু বর্ধিত হইলে, বহিঃকোণ বিপরীত অন্তঃকোণ দুইটির সমষ্টির সমান। (উপ. 5, 6)

(v) কোন ঋজুরেখক্ষেত্রের অন্তঃকোণ সমূহের সমষ্টি, ঐ ক্ষেত্রের যে কয়টি বাহু তাহার দ্বিগুণসংখ্যক সমকোণ অপেক্ষা চারি সমকোণ কম। (উপ. 7)

(vi) কোন প্রবৃদ্ধকোণশূন্য ঋজুরেখ ক্ষেত্রের বাহুগুলি একই ক্রমে বর্ধিত হইলে, উৎপন্ন বহিঃকোণগুলির সমষ্টি চারি সমকোণের সমান। (উপ. 8)

(vii) ত্রিভুজের সমান বাহুদ্বয়ের বিপরীত কোণদ্বয় পরস্পর সমান (বিপরীত প্রতিজ্ঞা সহ)। (উপ. 9, 10)

(viii) ত্রিভুজের বৃহত্তর বাহুর বিপরীত কোণ, ক্ষুদ্রতর বাহুর বিপরীত কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর (বিপরীত প্রতিজ্ঞাসহ)। (উপ. 13, 14)

(ix) ত্রিভুজের যে কোন দুই বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর। (উপ. 15)

(x) কোন সরলরেখার বহিঃস্থ কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে ঐ সরলরেখা পর্যন্ত যতগুলি সরলরেখা টানা যায়, তাহাদের মধ্যে লম্বই ক্ষুদ্রতম। (উপ. 16)

4. সপ্তম শ্রেণীর পাঠ্যাংশে যুক্তিমূলক প্রমাণযোগ্য কতিপয় উপপাদ্যের অঙ্কন ও পরিমাপমূলক প্রমাণের অবতারণা করা হইয়াছে। উহাদের উদ্দেশ্য হইল চাক্ষুষজ্ঞানের সহিত যুক্তিমূলক জ্ঞানের সমন্বয় সাধন। যে যে উপপাদ্যের ঐরূপ দ্বিবিধ প্রমাণ আছে, ঔপপত্তিক প্রমাণের পূর্বে সংশ্লিষ্ট অনুরূপ উপপাদ্যগুলির অঙ্কন ও পরীক্ষামূলক প্রমাণগুলির একবার পুনরালোচনা করিয়া লইলে শিক্ষার্থীদের ঔপপত্তিক প্রমাণ কতকটা সহজবোধ্য হইবে। যেমন, নবমশ্রেণীর পাঠ্যাংশের প্রথম উপপাদ্য (উপ. 17) পড়িবার পূর্বে সপ্তম শ্রেণীর পাঠ্যাংশের অন্তর্গত "সামান্তরিকের ধর্ম" শীর্ষক অংশটির একবার পুনরালোচনা করিয়া লইলে, উপপাদ্যটির ঔপপত্তিক প্রমাণ সহজবোধ্য হইবে।

5. অষ্টম শ্রেণীর পাঠ্যাংশে যে উপপাদ্যগুলি পঠিত হইয়াছে উহাদের পুনরনুশীলনের জন্য একটি প্রশ্নমালা প্রদত্ত হইল।

অনুশীলনী 1

1. প্রমাণ কর যে কোন কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক ও বহির্দ্বিখণ্ডক পরস্পর লম্ব।

2. AB, CD দুইটি সরলরেখা O-বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। (i) যদি $\angle AOC = 35^\circ$ হয়, COB, BOD,, COA কোণগুলির পরিমাণ নির্ণয় কর। (ii) যদি $\angle COB + \angle AOD = 250^\circ$ হয়, AOC কোণের পরিমাণ কত ?

3. যদি দুই বা ততোধিক সরলরেখার প্রত্যেকটি অপর একটি সরলরেখার উপর লম্ব হয়, তাহা হইলে উহারা পরস্পর সমান্তরাল হইবে।

4. যদি কোন সরলরেখা দুইটি সমান্তরাল সরলরেখাকে ছেদ করে, প্রমাণ কর যে দুইটি একান্তর কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ও পরস্পর সমান্তরাল।

5. কোন ত্রিভুজের শিরঃকোণের বহির্দ্বিখণ্ডক ভূমির সমান্তরাল হইলে ত্রিভুজটির ভূমিসংলগ্ন কোণ দুইটি সমান হইবে।

6. কোন ত্রিভুজের ভূমিসংলগ্ন কোণ দুইটি পরস্পর সমান হইলে, উহার শীর্ষ দিয়া অঙ্কিত ভূমির সমান্তরাল সরলরেখা শিরঃকোণের বহির্দ্বিখণ্ডক হইবে।

7. প্রত্যেক ত্রিভুজে অন্ততঃ দুইটি সূক্ষ্মকোণ থাকিবে।

৪. ত্রিভুজের কোন বাহু বর্ধিত হইলে উৎপন্ন বহিঃকোণ বিপরীত অন্তঃকোণ দুইটির প্রত্যেকটি অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

9. কোন ত্রিভুজের অন্তর্বর্তী যে কোন বিন্দুর সহিত ভূমি-প্রান্তদ্বয় যোগ করিলে ঐ বিন্দুতে যে কোণ উৎপন্ন হয়, তাহা ত্রিভুজের শিরঃকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর।

10. চতুর্ভুজের যে কোন তিনটি কোণের সমষ্টি চারি সমকোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

11. চতুর্ভুজের চারি কোণের সমষ্টি চারি সমকোণ।

12. কোন ত্রিভুজের ভূমিসংলগ্ন কোণদ্বয় সমান এবং প্রত্যেক কোণ শিরঃকোণের দ্বিগুণ। ত্রিভুজটির কোণ তিনটির পরিমাণ ডিগ্রীতে নির্ণয় কর।

13. ABCD চতুর্ভুজের $\angle B$ ও $\angle C$এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় O-বিন্দুতে মিলিত হইলে, প্রমাণ কর যে $\angle BOC = \frac{1}{2}(\angle A + \angle D)$ [C. U. '36, '42]

14. পঞ্চভুজের অন্তঃকোণ সমূহের সমষ্টি নির্ণয় কর।

15. কোন সুষম বহুভুজের প্রত্যেক অন্তঃকোণ 108° হইলে, উহার বাহুর সংখ্যা কত ?

16. সমবাহু ত্রিভুজের মধ্যমা তিনটি পরস্পর সমান।

17. সমবাহু ত্রিভুজের তিনটি কোণই পরস্পর সমান।

18. রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পর লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

19. কোন কোণের সমদ্বিখণ্ডকের অন্তর্গত যে কোন বিন্দু কোণটির দুই বাহু হইতে সমদূরবর্তী।

20. যদি কোন ত্রিভুজের শিরঃকোণের সমদ্বিখণ্ডক ভূমিকেও সমদ্বিখণ্ডিত করে, তাহা হইলে ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু।

21. সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ-বিন্দু ও অতিভুজের মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা অতিভুজের অর্ধ।

22. ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের AB = AC ; BA-কে D পর্যন্ত বর্ধিত কর যেন AD = AB হয়। DC যুক্ত কর। প্রমাণ কর ∠DCB সমকোণ।

23. সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ বৃহত্তম বাহু।

24. ABC ত্রিভুজের ∠A-এর সমদ্বিখণ্ডক BC বাহুর সহিত D-বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। যদি AB > AC হয়, তবে প্রমাণ কর BD > CD.

25. ত্রিভুজের যে কোন দুই বাহুর অন্তর তৃতীয় বাহু অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

26. ত্রিভুজের যে কোন দুই বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহুর সমদ্বিখণ্ডক মধ্যমার দ্বিগুণ অপেক্ষা বৃহত্তর।

27. চতুর্ভুজের যে কোন তিনটি বাহুর সমষ্টি চতুর্থ বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর।

28. ABC সমকোণী ত্রিভুজের AC = BC ; AD, ∠BAC-কে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়া BC-কে D-বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে ; প্রমাণ কর AC + CD = AB.

29. ABC সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ BC-র অন্তর্গত কোন D-বিন্দু A-বিন্দুর সহিত যুক্ত করা হইয়াছে। যদি ∠BAD = ∠ABD হয়, তবে প্রমাণ কর D, BC-র মধ্যবিন্দু এবং AD, BC-র অর্ধ।

30. কোন ত্রিভুজের অন্তঃস্থ কোন বিন্দু হইতে উহার যে কোন বাহুর প্রান্ত-বিন্দুদ্বয়ের দূরত্বের সমষ্টি উহার অপর বাহুদ্বয়ের সমষ্টি অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

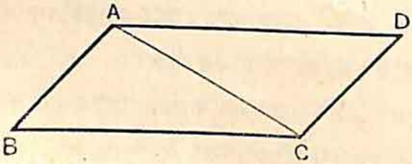
প্রথম অধ্যায়

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা

উপপাদ্য 17

সামান্তরিকের বিপরীত বাহুগুলি ও বিপরীত কোণগুলি পরস্পর সমান এবং প্রত্যেক কর্ণ সামান্তরিককে দুইটি সর্বসম ত্রিভুজে বিভক্ত করে।

[The opposite sides and angles of a parallelogram are equal to one another, and each diagonal divides the parallelogram into two congruent triangles.]



মনে কর ABCD একটি সামান্তরিক এবং AC ইহার একটি কর্ণ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

(1) $AB = DC$ (2) $BC = AD$ (3) $\angle ABC = \angle ADC$

(4) $\angle BAD = \angle BCD$. (5) $\triangle ABC \equiv \triangle ADC$.

প্রমাণ। AB ও DC সমান্তরাল, এবং AC উহাদের সহিত মিলিত হইয়াছে,

$\therefore$ $\angle BAC =$ একান্তর $\angle ACD$,

আবার, BC ও AD সমান্তরাল এবং AC উহাদের সহিত মিলিত হইয়াছে,

$\therefore$ $\angle BCA =$ একান্তর $\angle CAD$.

এখন, ABC ও ADC ত্রিভুজ দুইটির

$\angle BAC = \angle ACD$, $\angle BCA = \angle CAD$, এবং AC বাহু সাধারণ,

$\therefore$ $\triangle ABC \equiv \triangle ADC$ ... (5)

সুতরাং $AB = DC$, $BC = AD$ এবং $\angle ABC = \angle ADC$ ... (1,2,3)

আবার $\angle BAC = \angle ACD$ এবং $\angle CAD = \angle BCA$

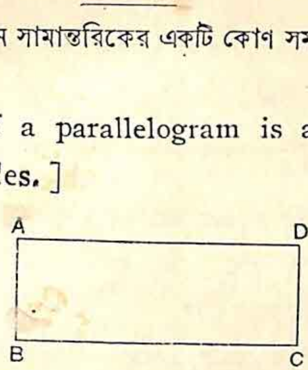
$\therefore \angle BAC + \angle CAD = \angle ACD + \angle BCA$

অর্থাৎ সমগ্র $\angle BAD =$ সমগ্র $\angle BCD$. ... ... (4)

এইরূপে BD যুক্ত করিয়া প্রমাণ করা যায় যে $\triangle ABD \equiv \triangle BCD$.

অনুসিদ্ধান্ত 1. কোন সামান্তরিকের একটি কোণ সমকোণ হইলে উহার সকল কোণই সমকোণ হইবে।

[If one angle of a parallelogram is a right angle, all its angles are right angles.]



মনে কর ABCD সামান্তরিকের $\angle B$ সমকোণ।

$AD \parallel BC$, $\therefore \angle A + \angle B = 2$ সমকোণ। কিন্তু $\angle B$ একটি সমকোণ

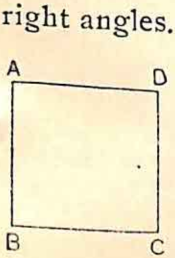
$\therefore$ $\angle A$ একটি সমকোণ। আবার ABCD একটি সামান্তরিক।

$\angle A = \angle C$ এবং $\angle B = \angle D$;

সুতরাং $\angle C$ এবং $\angle D$ প্রত্যেকেই এক একটি সমকোণ।

অনুসিদ্ধান্ত 2. বর্গক্ষেত্রের বাহুগুলি পরস্পর সমান এবং কোণগুলির প্রত্যেকটি সমকোণ।

[All the sides of a square are equal and all its angles are right angles.]



মনে কর ABCD একটি বর্গক্ষেত্র অর্থাৎ একটি আয়তক্ষেত্র যাহার সন্নিহিত AB এবং BC বাহুদ্বয় সমান।

আয়তক্ষেত্রটি সামান্তরিক বলিয়া $AB = DC$ এবং $BC = AD$

কিন্তু $AB = BC$, $\therefore$ চারিটি বাহুই পরস্পর সমান।

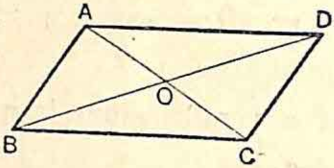
অনুসিদ্ধান্ত 1 অনুসারে, আয়তক্ষেত্রের চারি কোণই সমকোণ।

$\therefore$ বর্গক্ষেত্রের বাহুগুলি পরস্পর সমান এবং প্রত্যেক কোণ সমকোণ।

উপপাদ্য 18

সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

[The diagonals of a parallelogram bisect each other.]



মনে কর, ABCD সামান্তরিকের AC, BD কর্ণদ্বয় পরস্পর O-বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে $OA=OC$, $OB=OD$.

প্রমাণ। AOD, BOC ত্রিভুজ দুইটির

$\angle OAD=$ একান্তর $\angle OCB$, $\angle AOD=$ বিপ্রতীপ $\angle BOC$,

এবং $AD=BC$ (সামান্তরিকের বিপরীত বাহু বলিয়া)

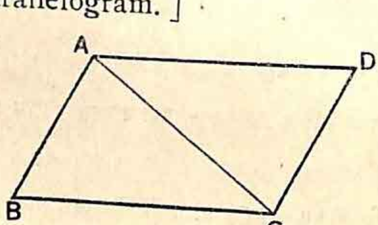
$\therefore$ ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম।

অতএব $OA=OC$, $OB=OD$.

উপপাদ্য 19

চতুর্ভুজের বিপরীত দুই দুইটি বাহু পরস্পর সমান হইলে, চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক হইবে।

[If both pairs of opposite sides of a quadrilateral are equal, the figure is a parallelogram.]



মনে কর ABCD চতুর্ভুজের $AB=CD$ এবং $AD=BC$.

প্রমাণ করিতে হইবে যে ABCD একটি সামান্তরিক।

অঙ্কন। AC যোগ কর।

প্রমাণ। ABC এবং ADC ত্রিভুজদ্বয়ে,

$AB = CD$, $BC = AD$ এবং AC সাধারণ

সুতরাং ABC ও ADC ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

$\therefore$ $\angle BAC = \angle ACD$; ইহারা একান্তর কোণ, সুতরাং $AB \parallel CD$

এবং $\angle BCA = \angle CAD$; ইহারা একান্তর কোণ, সুতরাং $AD \parallel BC$

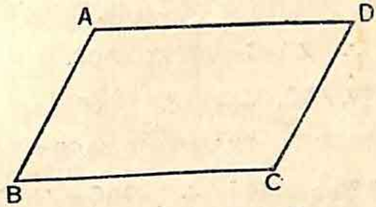
অতএব ABCD চতুর্ভুজটি সামান্তরিক।

অনুসিদ্ধান্ত। রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পর লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

উপপাদ্য 20

চতুর্ভুজের বিপরীত দুই দুইটি কোণ সমান হইলে, চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক হইবে।

[If both pairs of opposite angles of a quadrilateral are equal, the figure is a parallelogram.]



মনে কর ABCD চতুর্ভুজের $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$

প্রমাণ করিতে হইবে যে ABCD একটি সামান্তরিক।

প্রমাণ। $\angle BAD = \angle BCD$, $\angle ABC = \angle ADC$.

$\therefore$ $\angle BAD + \angle ABC = \angle BCD + \angle ADC =$ দুই সমকোণ,

কারণ, $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D =$ চারি সমকোণ।

এখন, AB ছেদকের একই পার্শ্বস্থ $\angle BAD + \angle ABC =$ দুই সমকোণ,

$\therefore$ $AD \parallel BC$

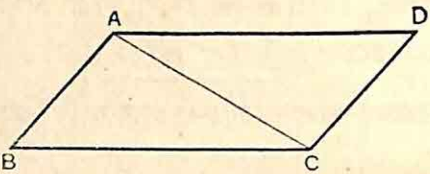
এইরূপে প্রমাণ করা যায় যে $AB \parallel DC$.

অতএব ABCD একটি সামান্তরিক।

উপপাদ্য 21

কোন চতুর্ভুজের দুইটি বিপরীত বাহু সমান এবং সমান্তরাল হইলে চতুর্ভুজটি সামান্তরিক হইবে।

[If a pair of opposite sides of a quadrilateral are both equal and parallel, the figure is a parallelogram.]



মনে কর ABCD চতুর্ভুজে AD এবং BC বাহুদ্বয় সমান এবং সমান্তরাল।

প্রমাণ করিতে হইবে ABCD একটি সামান্তরিক।

অঙ্কন। AC সংযুক্ত কর।

প্রমাণ। AD ও BC সমান্তরাল এবং AC উহাদের সহিত মিলিত হইয়াছে ;

$\therefore$ $\angle DAC$ = একান্তর $\angle ACB$.

এখন, ABC, ADC ত্রিভুজ দুইটির

BC = AD, AC সাধারণ বাহু, এবং অন্তর্ভূত $\angle ACB$ = অন্তর্ভূত $\angle DAC$.

$\therefore$ ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম। $\therefore$ $\angle BAC = \angle ACD$.

কিন্তু ইহারা একান্তর কোণ, $\therefore$ AB ও DC সমান্তরাল।

অতএব ABCD একটি সামান্তরিক।

দ্রষ্টব্য। উক্ত উপপাদ্যের সাধারণ নির্বচন এই ভাবেও প্রকাশ করা যায় :—

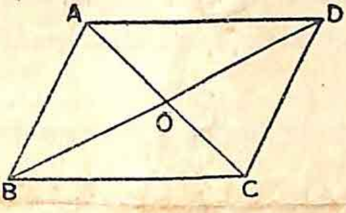
যে দুইটি সরলরেখা অপর দুইটি সমান এবং সমান্তরাল সরলরেখার একই পার্শ্বস্থ দুই দুইটি প্রান্তবিন্দু সংযুক্ত করে, তাহারা পরস্পর সমান ও সমান্তরাল।

[The straight lines which join the extremities of two equal and parallel straight lines towards the same parts are themselves equal and parallel.]

উপপাদ্য 22

চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করিলে, উহা একটি সামান্তরিক হইবে।

[If the diagonals of a quadrilateral bisect each other, the figure is a parallelogram.]



মনে কর ABCD চতুর্ভুজের AC, BD কর্ণদ্বয় O-বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হইয়াছে, অর্থাৎ $OA = OC$ এবং $OB = OD$.

প্রমাণ করিতে হইবে যে ABCD একটি সামান্তরিক।

প্রমাণ। AOD এবং BOC ত্রিভুজদ্বয়ে,

$OA = OC$, $OD = OB$

অন্তর্ভূত $\angle AOD$ = অন্তর্ভূত $\angle BOC$ (বিপ্রতীপ কোণ বলিয়া)

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

$\therefore$ $\angle ADO = \angle OBC$, অর্থাৎ $\angle ADB = \angle DBC$

ইহারা একান্তর কোণ ; অতএব $AD \parallel BC$

এইরূপে প্রমাণ করা যায় যে $AB \parallel CD$.

সুতরাং ABCD একটি সামান্তরিক।

অনুশীলনী 2

1. কোন চতুর্ভুজের বাহু চারিটি পরস্পর সমান হইলে, উহার কর্ণদ্বয় পরস্পরকে লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত করে। If the sides of a quadrilateral are equal, then its diagonals bisect one another at right angles.

2. কোন সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পর সমান হইলে, প্রমাণ কর যে উহা একটি আয়তক্ষেত্র। If the diagonals of a parallelogram are equal, it is a rectangle.

3. একই ভূমির বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত দুইটি সমবাহু ত্রিভুজ একটি সামান্তরিক উৎপন্ন করে। (C. U. 1916)

4. আয়তক্ষেত্রের সন্নিহিত বাহুর মধ্যবিন্দুসমূহ যোগ করিলে উৎপন্ন চতুর্ভুজটি রম্বস হইবে। The quadrilateral formed by joining the middle points of the adjacent sides of a rectangle is a rhombus.

5. ABCD সামান্তরিকের AC কর্ণ যদি ∠Aকে সমদ্বিখণ্ডিত করে, তাহা হইলে উহা ∠C-কেও সমদ্বিখণ্ডিত করিবে এবং সামান্তরিকটি একটি রম্বস হইবে। (C. U. 1926)

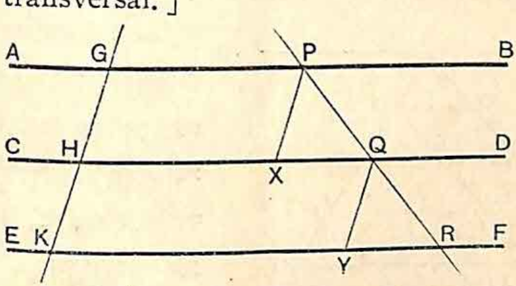
6. দুইটি সরলরেখা পরস্পরকে লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত করিলে ইহারা কোন রম্বস বা বর্গক্ষেত্রের কর্ণ হইবে। If two straight lines bisect one another at right angles, they are the diagonals of a rhombus or of a square.

7. কোন চতুর্ভুজের এক জোড়া বিপরীত বাহু ও এক জোড়া বিপরীত কোণ সমান হইলে, চতুর্ভুজটি সামান্তরিক হইবে। If a pair of opposite sides and a pair of opposite angles of a quadrilateral are equal, the figure is a parallelogram

উপপাদ্য 23

তিন বা ততোধিক সমান্তরাল সরলরেখা দ্বারা ছিন্ন কোন ছেদকের খণ্ডগুলি পরস্পর সমান হইলে, উক্ত সমান্তরাল সরলরেখাগুলি দ্বারা ছিন্ন অপর যে কোন ছেদকের অনুরূপ খণ্ডগুলিও পরস্পর সমান হইবে।

[If three or more parallel straight lines make equal intercepts on any transversal, then they make equal intercepts on any other transversal.]



মনে কর AB, CD, EF তিনটি সমান্তরাল সরলরেখা GK ছেদককে GH এবং HK দুইটি সমান খণ্ডে এবং অপর একটি ছেদককে PQ এবং QR এই দুইটি খণ্ডে বিভক্ত করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, PQ = QR.

অঙ্কন। P এবং Q বিন্দু দিয়া GK-র সমান্তরাল PX এবং QY দুইটি সরলরেখা টান। মনে কর PX, CD-কে X-বিন্দুতে এবং QY, EF-কে Y-বিন্দুতে ছেদ করিল।

প্রমাণ। CD ∥ EF, এবং PQR উহাদের সহিত মিলিত হইয়াছে,

$\therefore$ ∠PQX = অনুরূপ ∠QRY.

আবার PX ∥ QY (প্রত্যেকে GK-র সমান্তরাল বলিয়া) এবং PQR উহাদের সহিত মিলিত হইয়াছে ; $\therefore$ ∠XPQ = অনুরূপ ∠YQR.

অঙ্কন অনুসারে, GHXP এবং HKYQ উভয় ক্ষেত্রই সামান্তরিক ;

$\therefore$ GH = PX এবং HK = QY,

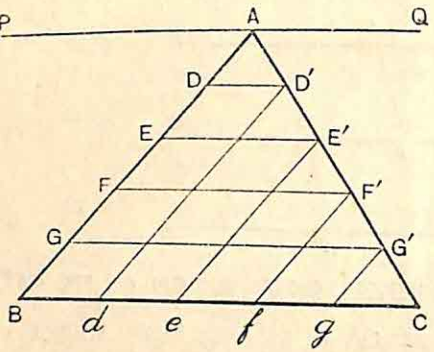
কিন্তু GH = HK (কল্পনা) $\therefore$ PX = QY.

এখন, ∠PQX = ∠QRY, ∠XPQ = ∠YQR এবং PX = QY

$\therefore$ PXQ এবং QYR ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম। $\therefore$ PQ = QR.

অনুসিদ্ধান্ত। কোন ত্রিভুজের এক বাহুকে কতিপয় সমান অংশে বিভক্ত করিয়া প্রত্যেক বিভাগ-বিন্দু দিয়া যদি ভূমির সমান্তরাল সরলরেখা টানা যায়, তবে এই সমান্তরাল সরলরেখা সমূহ অপর বাহুকে একই সংখ্যক পরস্পর সমান অংশে বিভক্ত করিবে।

[If a side of a triangle is divided into any number of equal parts, and from the points of division straight lines are drawn parallel to the base, then these parallels divide the remaining side into the same number of equal parts.]



ABC ত্রিভুজের AB বাহু D, E, F, G-বিন্দুতে পাঁচটি সমান অংশে বিভক্ত হইয়াছে এবং উক্ত বিন্দুগুলি দিয়া BC-র সমান্তরাল সরলরেখা সমূহ AC-কে যথাক্রমে D′, E′, F′, এবং G′ বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে $AD' = D'E' = E'F' = F'G' = G'C$.

A-বিন্দু দিয়া BC-র সমান্তরাল PAQ সরলরেখা টান।

প্রমাণ। এক্ষণে PQ, DD′, EE′, FF′, GG′, BC সরলরেখাগুলি পরস্পর সমান্তরাল এবং যেহেতু AD, DE, EF, FG, GB পরস্পর সমান,

∴ AD′, D′E′, E′F′, F′G′, G′C পরস্পর সমান।

দ্রষ্টব্য। উপরের চিত্রে D′, E′, F′, G′ বিন্দুগুলি দিয়া অঙ্কিত AB-র সমান্তরাল সরলরেখাসমূহ BC-কে যথাক্রকে d, e, f, g বিন্দুসমূহে ছেদ করিলে, BC উক্ত বিন্দুসমূহে সমান পাঁচ অংশে বিভক্ত হইবে এবং প্রত্যেক ভাগ DD′ এর সমান হইবে। অধিকন্ত $EE' = 2DD'$, $FF' = 3DD'$, $GG' = 4DD'$ এবং $BC = 5DD'$

∴ $DD' = \frac{1}{5}BC$, $EE' = \frac{2}{5}BC$, $FF' = \frac{3}{5}BC$, $GG' = \frac{4}{5}BC$.

AB সরলরেখাকে যদি n-সংখ্যক সমান অংশে বিভক্ত করা যায় এবং বিভাগ-বিন্দুসমূহ হইতে BC-র সমান্তরাল রেখাসমূহ টানা যায়, তাহা হইলে—

$$DD' = \frac{1}{n}BC, \quad EE' = \frac{2}{n}BC, \quad FF' = \frac{3}{n}BC,$$ ইত্যাদি।

কর্ণ-মাপনী (Diagonal Scale)—AB একটি সরলরেখা টানিয়া A-বিন্দু হইতে 1 ইঞ্চি অন্তর অন্তর O, 1, 2, ··· বিন্দুগুলি চিহ্নিত কর। OA সরলরেখা 1 ইঞ্চি দীর্ঘ হইল। OA-কে, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, চিহ্নিত বিন্দুতে সমান 10 ভাগে ভাগ কর। তাহা হইলে প্রত্যেক ভাগ ·1 ইঞ্চি হইল। AB-র সমান্তরাল করিয়া দশটি সরলরেখা টান যাহারা পরস্পর সমান ব্যবধানে অবস্থিত থাকে। A, 0, 1, 2 বিন্দুগুলি হইতে AB-র উপর লম্ব টান, এই লম্বগুলি যেন দশম সমান্তরাল সরলরেখাকে যথাক্রমে P, Q, R, S বিন্দুতে ছেদ করিল।



PQ-কে সমান দশভাগে ভাগ কর। O-বিন্দু QP-র প্রথম ছেদবিন্দু L-এর সহিত, 1-বিন্দু QP-র দ্বিতীয় ছেদবিন্দুর সহিত, 2-বিন্দু QP-র তৃতীয় ছেদবিন্দুর সহিত, ইত্যাদি ক্রমে 1, 2, 3,··· 9 বিন্দুগুলি QP-র ছেদবিন্দুগুলির সহিত সংযুক্ত করিয়া যাও। এখন OLQ ত্রিভুজের OL এবং OQ বাহুদ্বয়, LQ-র সমান্তরাল সরলরেখাগুলি দ্বারা দশটি সমান অংশে বিভক্ত হইয়াছে এবং LQ = ·1 ইঃ।

∴ OL এবং OQ দ্বারা ছিন্ন অনুভূমিক

11-রেখার অংশ = LQএর $\frac{1}{10}$ = ·1 ইঃ এর $\frac{1}{10}$ = ·01 ইঃ,

22-রেখার অংশ = LQএর $\frac{2}{10}$ = ·1 ইঃ এর $\frac{2}{10}$ = ·02 ইঃ,

33-রেখার অংশ = LQএর $\frac{3}{10}$ = ·1 ইঃ এর $\frac{3}{10}$ = ·03 ইঃ, ইত্যাদি।

আবার ছোট ছোট সামান্তরিক সমূহের যে বাহুগুলি AO-র সমান্তরাল উহাদের প্রত্যেকটি ·1 ইঃ দীর্ঘ।

কর্ণ-মাপনীর ব্যবহার। মনে কর 2·7 ইঞ্চি, 2·73 ইঞ্চি এবং 1·39 ইঞ্চি পরিমিত দৈর্ঘ্য নির্ণয় করিতে হইবে।

কাঁটা কম্পাসের একটি কাঁটা 2-বিন্দুর উপর এবং অপর কাঁটা OA সরলরেখার র্গত ৭-বিন্দু পর্যন্ত বিস্তৃত করিলে 2·7 ইঃ দৈর্ঘ্য পাওয়া যাইবে। এখন 2S এবং -সরলরেখা দুইটির ছেদবিন্দুতে কাঁটা কম্পাসের একটি কাঁটা লইয়া অপর কাঁটা ৪৪ এবং -সরলরেখা দুইটির ছেদবিন্দু পর্যন্ত বিস্তৃত করিলে 2·73 ইঃ দৈর্ঘ্য পাওয়া যাইবে।

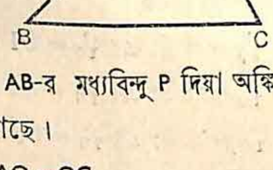
আবার কাঁটা কম্পাসের কাঁটা 1R এবং ৭৭-সরলরেখা দুইটির ছেদবিন্দুর উপর লইয়া র কাঁটা ৭৭ ও ৪-সরলরেখা দুইটির ছেদবিন্দু পর্যন্ত বিস্তৃত করিলে এই দুইটি বিন্দুর ন্তর্গত দৈর্ঘ্য 1·39 ইঃ হইবে।

চিত্রে (. .) দ্বারা 2·73 ইঃ এবং (**) দ্বারা 1·39 ইঃ দৈর্ঘ্য দেখান হইয়াছে।

উপপাদ্য 24

কোন ত্রিভুজের এক বাহুর মধ্যবিন্দু দিয়া অপর এক বাহুর সমান্তরাল করিয়া অঙ্কিত রলরেখা ত্রিভুজের তৃতীয় বাহুকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

[The straight line drawn through the middle point of a side of a triangle, parallel to another side, bisects the remaining side.]



ABC একটি ত্রিভুজ। AB-র মধ্যবিন্দু P দিয়া অঙ্কিত BC-র সমান্তরাল সরলরেখা AC-কে Q-বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে, $AQ = QC$.

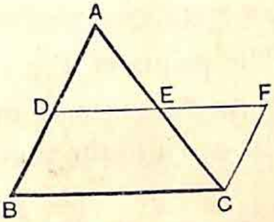
অঙ্কন। A-দিয়া PQ বা BC-র সমান্তরাল XY সরলরেখা টান।

প্রমাণ। এক্ষণে, XY, PQ, BC তিনটি সমান্তরাল সরলরেখা, AB ছেদককে AP এবং PB দুইটি সমান অংশে ছেদ করিয়াছে। $\therefore$ AC ছেদকের $AQ = QC$.

উপপাদ্য 25

ত্রিভুজের যে কোন দুইটি বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল ও অর্ধ।

[The straight line which joins the middle points of two sides of a triangle is parallel to the third side and is half of it.]



ABC ত্রিভুজের AB ও AC বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু D ও E সংযুক্ত করা হইয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে DE ও BC সমান্তরাল এবং $DE = \frac{1}{2}BC$.

অঙ্কন। DE-কে F-বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত কর যেন EF = DE হয়। CF সংযুক্ত কর।

প্রমাণ। ADE, CEF ত্রিভুজ দুইটির

$AE = EC$, $DE = EF$, $\angle AED =$ বিপ্রতীপ $\angle CEF$

∴ ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম।

∴ $AD = CF$ এবং $\angle DAE = \angle ECF$;

কিন্তু ইহারা একান্তর কোণ।

∴ AD ও CF সমান্তরাল অর্থাৎ DB ও CF সমান্তরাল।

আবার $CF = AD = DB$;

∴ DB ও CF সমান এবং সমান্তরাল।

অতএব DF এবং BC সমান এবং সমান্তরাল ;

কিন্তু $DE = \frac{1}{2}DF$ (অঙ্কন)

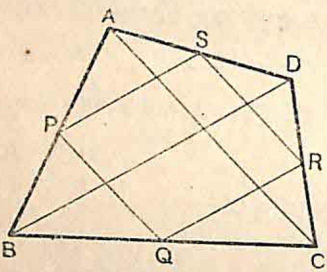
∴ $DE = \frac{1}{2}BC$.

অনুশীলনী 3

1. কোন ত্রিভুজের বাহু তিনটির মধ্যবিন্দু যোগ করিলে ত্রিভুজটি চারিটি সর্বসম ত্রিভুজে বিভক্ত হইবে। If the middle points of the sides of a triangle be joined in order, the triangle is divided into four congruent triangles.

2. চতুর্ভুজের সন্নিহিত বাহুগুলির মধ্যবিন্দুসমূহ যোগ করিলে উৎপন্ন ক্ষেত্রটি একটি সামান্তরিক হইবে এবং এই সামান্তরিকের পরিসীমা চতুর্ভুজটির কর্ণদ্বয়ের সমষ্টির সমান হইবে। If the middle points of the adjacent sides of a quadrilateral are joined, the figure thus formed is a parallelogram of which the perimeter is equal to the sum of the diagonals of the quadrilateral.

ABCD চতুর্ভুজের AB, BC, CD, DA বাহুগুলির মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P, Q, R, S. PQ, QR, RS, SP, AC, BD যোগ করা হইয়াছে।



প্রমাণ করিতে হইবে PQRS একটি সামান্তরিক এবং PQ + QR + RS + SP = AC + BD.

প্রমাণ। P এবং S, AB এবং AD-র মধ্যবিন্দু। ∴ PS, BD-র সমান্তরাল এবং অর্ধ। এইরূপে QR, BD-র সমান্তরাল এবং অর্ধ।

∴ PS এবং QR সমান এবং সমান্তরাল।

∴ PQRS একটি সামান্তরিক।

আবার $PS = \frac{1}{2}BD$; $QR = \frac{1}{2}BD$, ∴ $PS + QR = BD$.

∴ তদ্রূপ $PQ + RS = AC$. ∴ $PQ + QR + RS + SP = AC + BD$.

3. কোন চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলির মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখাদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। The straight lines, which join the middle points of the opposite sides of a quadrilateral, bisect one another.

4. কোন ত্রিভুজের যে কোন বাহুর মধ্যবিন্দু দিয়া ভূমির সমান্তরাল সরলরেখা শীর্ষ হইতে ভূমির উপর অঙ্কিত যে কোন সরলরেখাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। The straight

line drawn from the middle point of a side of a triangle and parallel to the base bisects any straight line drawn from the vertex to the base.

5. ত্রিভুজের কোন শীর্ষ হইতে বিপরীত বাহু পর্যন্ত অঙ্কিত যে কোন সরলরেখা অপর দুই বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত হইবে। Any straight line drawn from the vertex of a triangle to the base is bisected by the straight line joining the middle points of the other two sides of the triangle.

6. ট্রাপিজিয়মের তির্যক্ বাহু দুইটির মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা সমান্তরাল বাহু দুইটির সমান্তরাল ও উহাদের সমষ্টির অর্ধ এবং কর্ণদ্বয়ের অন্তর্গত উক্ত সরলরেখার অংশ সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের অন্তরের অর্ধ। The straight line joining the middle points of the oblique sides of a trapezium is parallel to the parallel sides and is equal to half the sum of the parallel sides, the intercept of the straight line between the diagonals being half their difference.

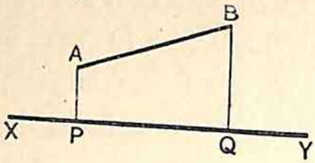
ABCD ট্রাপিজিয়মের AB ও CD তির্যক্ বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু P এবং Q. AD = 4·3 সে. মি. এবং BC = 7·7 সে. মি. হইলে, PQ-র দৈর্ঘ্য কত নির্ণয় কর এবং মাপিয়া উত্তরের সত্যতা নির্ণয় কর।

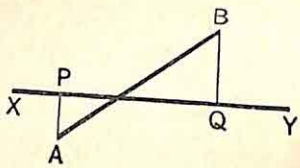
7. ABCD একটি সামান্তরিক এবং XY উহার বহিঃস্থ একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা। সামান্তরিকের কৌণিক বিন্দু চারিটি হইতে XY-র উপর AP, BQ, CR, DS সরলরেখা সমূহ লম্ব হইলে, প্রমাণ কর AP + CR = BQ + DS.

8. কোন সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমিস্থিত যে কোন বিন্দু হইতে বাহুদ্বয়ের উপর অঙ্কিত লম্বদ্বয়ের সমষ্টি ভূমির যে কোন প্রান্তবিন্দু হইতে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বের সমান। The sum of the perpendiculars darwn from any point in the base of an isosceles triangle to the equal sides is equal to the perpendicular drawn from any extremity of the base to the opposite side.

9. সমবাহু ত্রিভুজের মধ্যস্থিত যে কোন বিন্দু হইতে বাহু তিনটির উপর অঙ্কিত লম্ব তিনটির সমষ্টি ত্রিভুজের যে কোন কৌণিক বিন্দু হইতে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বের সমান। The sum of the perpendiculars drawn from any point within an equilateral triangle to three sides is equal to the perpendicular drawn from any one of the angular points to the opposite side.

সংজ্ঞা। কোন সীমাবদ্ধ সরলরেখার উভয় প্রান্ত হইতে অপর একটি সরলরেখার উপর লম্ব অঙ্কিত হইলে, লম্বদ্বয় দ্বারা দ্বিতীয় সরলরেখার ছিন্ন অংশকে দ্বিতীয় সরলরেখার উপর প্রথম সরলরেখার **লম্ব-অভিক্ষেপ** (Orthogonal Projection) বলা হয়।





AB সরলরেখার A ও B-বিন্দু হইতে XY-র উপর AP এবং BQ লম্ব অঙ্কিত করা হইয়াছে। উভয় চিত্রেই XY-র উপর AB-র লম্ব-অভিক্ষেপ PQ.

10. প্রমাণ কর যে কোন সরলরেখার উপর সমান এবং সমান্তরাল সরলরেখা সমূহের লম্ব-অভিক্ষেপগুলি পরস্পর সমান।

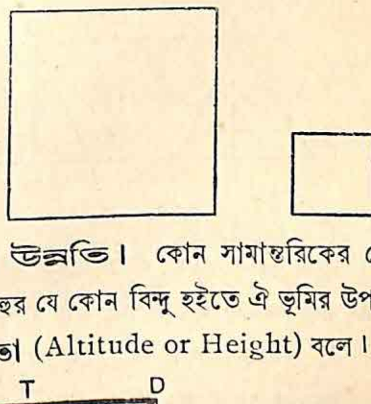
দ্বিতীয় অধ্যায়

ঋজুরেখ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

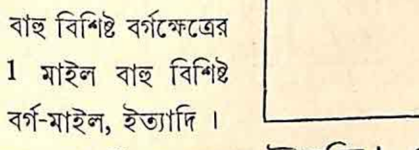
1. সামতলিক ক্ষেত্রের সীমারেখা দ্বারা পরিবেষ্টিত স্থান পরিমাণকে উহার ক্ষেত্রফল বা কালি (Area) বলে।

2. **ক্ষেত্রফলের একক।** কোন রাশির পরিমাণ নির্ণয় করিতে হইলে তজ্জাতীয় এককের প্রয়োজন। অর্থ বিষয়ক পরিমাণ নির্ণয় করিতে অর্থই হইবে একক, ওজন বিষয়ক পরিমাণ নির্ণয় করিতে ওজনই হইবে একক, দৈর্ঘ্য বিষয়ক পরিমাণ নির্ণয় করিতে দৈর্ঘ্যই হইবে একক। সেইরূপ ক্ষেত্রফল বিষয়ক পরিমাণ নির্ণয় করিতে ক্ষেত্রফলই উহার একক।

যে কোন দৈর্ঘ্যকে একক ধরিলে উহার উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলকে এক বর্গ-একক বলে। যে বর্গক্ষেত্রের বাহু এক ইঞ্চি তাহার ক্ষেত্রফলকে এক বর্গ-ইঞ্চি বলে। যে বর্গক্ষেত্রের বাহু এক সেন্টিমিটার তাহার ক্ষেত্রফলকে এক বর্গ-সেন্টিমিটার বলে। এইরূপে 1 গজ বাহু বিশিষ্ট বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 1 বর্গ-গজ, 1 মাইল বাহু বিশিষ্ট বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 1 বর্গ-মাইল, ইত্যাদি।

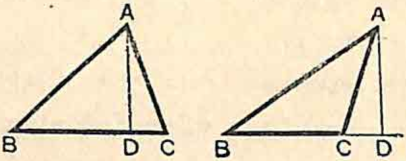


3. **সামান্তরিক ও ত্রিভুজের উন্নতি।** কোন সামান্তরিকের যে কোন বাহুকে ভূমি ধরা হইলে উহার বিপরীত বাহুর যে কোন বিন্দু হইতে ঐ ভূমির উপর পাতিত লম্বকে ঐ সামান্তরিকের **উন্নতি** বা **উচ্চতা** (Altitude or Height) বলে।



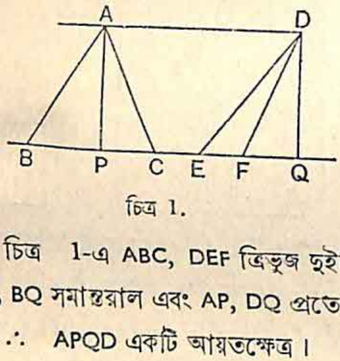
উপরের চিত্রে BC বা AD-কে ভূমি ধরিলে, AP, LM, RS, TC, DQ ইহাদের প্রত্যেকটিই ABCD সামান্তরিকের উন্নতি। AB বা CD-কে ভূমি ধরিলে, AB ও CD-র লম্ব-দূরত্বই হইবে ABCD সামান্তরিকের উন্নতি।

ত্রিভুজের যে কোন বাহুকে ভূমি ধরা হইলে উহার বিপরীত শীর্ষ হইতে ঐ ভূমির উপর পাতিত লম্বকে ঐ ত্রিভুজের **উন্নতি বা উচ্চতা** (Altitude or Height) বলে। নীচের উভয় চিত্রেই BC-কে ভূমি ধরিলে AD, ABC ত্রিভুজের উন্নতি।

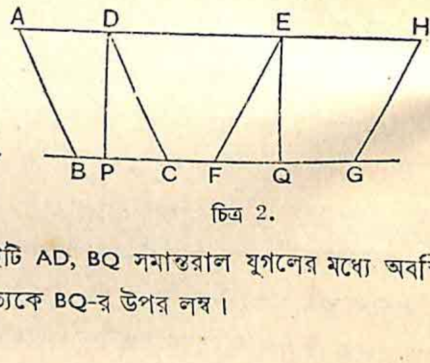


ত্রিভুজের তিনটি বাহুর যে কোন বাহুকেই ভূমি ধরা যাইতে পারে; সুতরাং ত্রিভুজের তিন বাহুর অনুরূপ তিনটি উন্নতি হইতে পারে।

4. দুই বা ততোধিক ত্রিভুজ বা সামান্তরিক একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত হইলে উহাদের উন্নতি পরস্পর সমান হইবে।



চিত্র 1.



চিত্র 2.

চিত্র 1-এ ABC, DEF ত্রিভুজ দুইটি AD, BQ সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত। AD, BQ সমান্তরাল এবং AP, DQ প্রত্যেকে BQ-র উপর লম্ব।

∴ APQD একটি আয়তক্ষেত্র।

অতএব AP = DQ অর্থাৎ ABC ও DEF ত্রিভুজ দুইটির উন্নতি সমান।

চিত্র 2-এ ABCD, EFGH সামান্তরিক দুইটি AH এবং BG সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত। AH, BG সমান্তরাল এবং DP, EQ প্রত্যেকে BG-র উপর লম্ব।

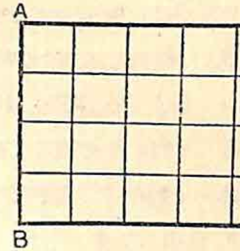
∴ DPQE একটি আয়তক্ষেত্র।

∴ DP = EQ অর্থাৎ ABCD ও EFGH সামান্তরিক দুইটির উন্নতি সমান।

তদ্রূপ, একই সরলরেখার একই দিকে অবস্থিত সমান উন্নতি-বিশিষ্ট ত্রিভুজ বা সামান্তরিকসমূহ একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত হইবে।

5. আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল (Area of a rectangle)।

মনে কর ABCD একটি আয়তক্ষেত্র যাহার দৈর্ঘ্য BC = 5 সে. মি. এবং প্রস্থ AB



সে. মি.। BC-কে সমান 5 ভাগে এবং AB-কে সমান 4 ভাগে বিভক্ত করিলে প্রত্যেক ভাগ এক সে. মি. দীর্ঘ হইবে। এখন, প্রত্যেক বাহুর বিভাগ-বিন্দু সমূহ হইতে অপর বাহুর সমান্তরাল করিয়া সরলরেখাসমূহ টানা হইলে, সমস্ত আয়তক্ষেত্রটি কতিপয় বর্গক্ষেত্রে বিভক্ত হইবে এবং এইরূপ প্রত্যেক বর্গক্ষেত্রের বাহু 1 সে. মি. দীর্ঘ হইবে, স্থতরাং প্রত্যেকটির ক্ষেত্রফল হইবে 1 বর্গ-সে.
এখন আয়তক্ষেত্রটির প্রত্যেক সারিতে 5টি করিয়া 4 সারিতে মোট 5 × 4 বা 2
বর্গক্ষেত্র আছে। কিন্তু প্রতি বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = 1 বর্গ-সে. মি.।

∴ ABCD আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = 5 × 4 বর্গ-সে. মি. = 20 বর্গ-সে. মি.।

এইরূপে প্রমাণ করা যায় যে কোন আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ যথাক্রমে a এব
একক হইলে, উহার ক্ষেত্রফল = $a \times b$ বর্গ একক = ab বর্গ একক।

বর্গক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ সমান; স্থতরাং কোন বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য a হই
উহার ক্ষেত্রফল = $a \times a$ বর্গ একক = a^2 বর্গ একক;

অতএব স্মরণ রাখিবে—

আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ। বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = (বাহু)^2

আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য = ক্ষেত্রফল ÷ প্রস্থ। বর্গক্ষেত্রের বাহু = $\sqrt{\text{ক্ষেত্রফল}}$।

আয়তক্ষেত্রের প্রস্থ = ক্ষেত্রফল ÷ দৈর্ঘ্য।

AB-র উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রকে সংক্ষেপে 'AB^2' এইরূপে লেখা হয়।

ABCD আয়তকে 'BC ও AB-র অন্তর্গত আয়ত' বা 'আয়ত BC, AB' অথবা 'অ
AC' লেখা হয় এবং উহার ক্ষেত্রফলকে 'BC.AB' বা 'AB.BC' এইরূপে লেখা যায়।

অনুশীলনী 4

1. ছক কাগজে নিম্নলিখিত আয়তক্ষেত্রসমূহ অঙ্কিত করিয়া ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর-

(1) দৈর্ঘ্য = 3″, প্রস্থ = 2″. (2) দৈর্ঘ্য = 4″, প্রস্থ = 3″.

(3) দৈর্ঘ্য = 2·4″, প্রস্থ = 1·2″. (4) দৈর্ঘ্য = 5 সে. মি., প্রস্থ = 4 সে.

(5) দৈর্ঘ্য = 5·2 সে. মি., প্রস্থ = 3·8 সে. মি.।

2. ছক কাগজে চিত্র অঙ্কন করিয়া দেখাও যে কোন সরলরেখার উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র উহার অর্ধেকের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের চতুর্গুণ।

3. আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর যাহার বাহুদ্বয়—

(1) 18 মিটার, 16 মিটার। (2) 32 মিটার, 20 মিটার। (3) 30মি., 25 মি.।

4. কোন বর্গক্ষেত্রের বাহু 15 মিটার; উহার ক্ষেত্রফল কত?

5. কোন আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 380 বর্গ-মিটার; উহার প্রস্থ 19 মিটার হইলে, দৈর্ঘ্য কত?

6. আয়তাকার কোন বাগানের ক্ষেত্রফল 2880 বর্গ-গজ এবং দৈর্ঘ্য 72 গজ; প্রস্থ কত?

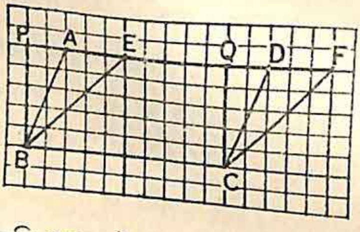
7. 48400 বর্গ-মিটার ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট এক বর্গাকৃতি মাঠের বাহুর দৈর্ঘ্য কত?

উপপাদ্য 26

যে সকল সামান্তরিক একই ভূমির উপর এবং একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত (সুতরাং একই উন্নতি বিশিষ্ট) তাহাদের ক্ষেত্রফল সমান।

[Parallelograms on the same base and between the same parallels (hence of the same altitude) are equal in area.]

ছক কাগজের সাহায্যে প্রমাণ



ছক কাগজে একই ভূমি BC-র উপর এবং একই সমান্তরাল যুগল AF, BC-র মধ্যে অবস্থিত ABCD, EBCF দুইটি সামান্তরিক। B ও C হইতে AD-র উপর (আবশ্যক মত র্ধিত AD-র উপর) BP ও CQ লম্ব টান। তাহা হইলে PBCQ একটি আয়তক্ষেত্র

হইল। BPA, CQD সমকোণী ত্রিভুজ দুইটির ক্ষেত্রফল সমান। (প্রত্যেকটির ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times 2 \times 5 = 5$ বর্গ-একক বলিয়া)

BPE, CQF সমকোণী ত্রিভুজ দুইটির ক্ষেত্রফল সমান (প্রত্যেকটির ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times 5 \times 5 = 12\frac{1}{2}$ বর্গ-একক)।

এখন, সামান্তরিক ABCD = ক্ষেত্র ABCQ + △CQD = ক্ষেত্র ABCQ + △BPA
= আয়ত PBCQ

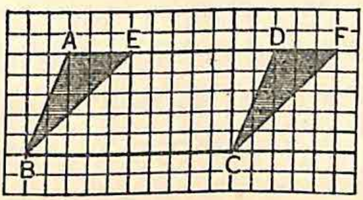
এবং সামান্তরিক EBCF = ক্ষেত্র EBCQ + △CQF = ক্ষেত্র EBCQ + △BPE
= আয়ত PBCQ.

∴ সামান্তরিক ABCD ও সামান্তরিক EBCF-এর ক্ষেত্রফল সমান।

অতএব একই ভূমির উপর ও একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত সামান্তরিক সমূহের ক্ষেত্রফল সমান।

দ্রষ্টব্য। গণনা করিয়া দেখা যাইবে ABCD ও EBCF সামান্তরিক দুইটিতে সমান সংখ্যক ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্র আছে। অর্ধ ও অর্ধ অপেক্ষা বৃহত্তর অংশকে পুরা এক ধরিয়া এবং অর্ধ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর অংশকে বাদ দিয়া মোটামুটি দেখা যাইবে যে প্রত্যেক সামান্তরিকে একই সংখ্যক বর্গক্ষেত্র আছে। এস্থলে ক্ষুদ্রতম বর্গের সংখ্যা হইবে 50। আয়ত PBCQ-এর ক্ষেত্রফল অতি সহজেই গণনা করিয়া দেখা যায় 50 বর্গ একক।

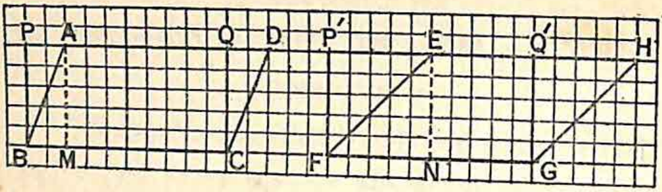
নিম্নের চিত্রের AEB, DFC ত্রিভুজ দুইটির যে কোন একটিকে ছুরি বা কাঁচি দ্বারা কাটিয়া অপরটির উপর স্থাপন করিলে দেখা যাইবে উহারা সর্বসম। ∴ উভয় ত্রিভুজের



সহিত EBCD-ক্ষেত্র যোগ করিলে সহজেই বুঝা যাইবে যে সামান্তরিক ABCD ও EBCF-এর ক্ষেত্রফল সমান।

দ্রষ্টব্য। উপরের চিত্রে সমগ্র ABCF ক্ষেত্র হইতে DFC ও AEB সমান সমান ত্রিভুজ দুইটি যথাক্রমে বাদ দিলে অবশিষ্ট ABCD ও EBCF সামান্তরিক দুইটির ক্ষেত্রফল অবশ্যই সমান হইবে।

নিম্নের চিত্রে ABCD, EFGH সামান্তরিক দুইটির ভূমি BC ও FG সমান এবং উহাদের উন্নতি AM ও EN সমান।



এস্থলে ABCD স'মান্তরিক PBCQ আয়তক্ষেত্রের সমান এবং EFGH সামান্তরিক P′FGQ′ আয়তক্ষেত্রের সমান। কিন্তু PBCQ ও P′FGQ′ আয়তক্ষেত্র দুইটি ... সমান (প্রত্যেকটির ক্ষেত্রফল 50 বর্গ-একক)।

∴ সামান্তরিক ABCD ও সামান্তরিক EFGH-এর ক্ষেত্রফল সমান।

অতএব সমান ভূমি ও সমান উন্নতি বিশিষ্ট সামান্তরিক সমূহের ক্ষেত্রফল সমা...

এস্থলে সামান্তরিক দুইটির ভূমি ও উন্নতি যথাক্রমে 10 একক ও 5 ... ne উহাদের ক্ষেত্রফল = 50 বর্গ-একক।

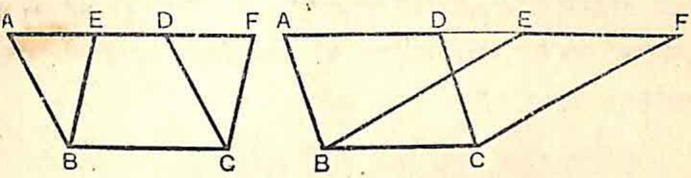
ইহা হইতে দেখা যায়—**সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল = ভূমি × উন্নতি**

ঊপর (আ

উপপাদ্য 26-এর ঔপপত্তিক প্রমাণ

[যে সকল সামান্তরিক একই ভূমির উপর এবং একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত তাহাদের ক্ষেত্রফল সমান।]

মনে কর ABCD, EBCF সামান্তরিক দুইটি একই ভূমি BC-র উপর এবং একই সমান্তরাল যুগল AF, BC-র মধ্যে অবস্থিত।



প্রমাণ করিতে হইবে ABCD ও EBCF সামান্তরিক দুইটির ক্ষেত্রফল সমান।

প্রমাণ। AB ∥ DC, ∴ ∠EAB = অনুরূপ ∠FDC

আবার EB ∥ FC, ∴ ∠AEB = অনুরূপ ∠DFC

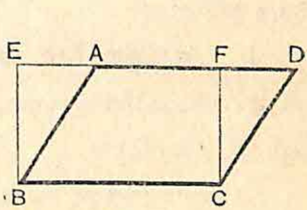
এখন, AEB, DFC ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম, ∵ ∠AEB = ∠DFC, ∠EAB = ∠FDC

এবং AB = DC (সামান্তরিকের বিপরীত বাহু বলিয়া)

∴ ক্ষেত্র ABCF − △DFC = ক্ষেত্র ABCF − △AEB

অর্থাৎ সামান্তরিক ABCD = সামান্তরিক EBCF.

অসিদ্ধান্ত 1. সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল উহার ভূমি ও উন্নতির গুণফলের সমান। area of a parallelogram is equal to the product of the d the altitude.]



মনে কর ABCD একটি সামান্তরিক। BC সরলরেখার উপর BE এবং CF লম্ব টান এবং মনে কর BE এবং CF, বর্ধিত DA-কে ও AD-কে যথাক্রমে E এবং F বিন্দুতে ছেদ করে। তাহা হইলে EBCF একটি আয়তক্ষে হইল এখন BC-কে ABCD সামান্তরিকের ভূমি ধরা হইলে BE উহার উন্নতি। রিক ABCD = আয়তক্ষেত্র EBCF = BC.EB.

অর্থাৎ সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল = সামান্তরিকের ভূমি × উন্নতি।

অনুসিদ্ধান্ত 2. সমান সমান ভূমির উপর এবং একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত (সুতরাং সমান উন্নতি বিশিষ্ট) সামান্তরিক সমূহের ক্ষেত্রফল সমান।

[Parallelograms on equal bases and between the same parallels (hence of equal altitudes) are equal in area.]

একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত সামান্তরিকগুলির উন্নতি সমান, এবং যেহেতু সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল ভূমি ও উন্নতির গুণফলের সমান, সুতরাং সমান সমান ভূমি এবং একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত বা সমান উন্নতি বিশিষ্ট সামান্তরিকসমূহের ক্ষেত্রফল সমান।

অনুশীলনী 5

1. সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর—

(1) ভূমি = 8″, উন্নতি = 6″

(2) ভূমি = 10 সে. মি., উন্নতি = 7·5 সে. মি.

(3) ভূমি = 12·75″, উন্নতি = 8″

(4) ভূমি = 20·6 সে. মি., উন্নতি = 15·25 সে. মি.

2. কোন সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল 259 বর্গ-সে. মি. ও ভূমি 18·5 সে. মি. ; উহার উচ্চতা কত ?

3. কোন সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল 2700 বর্গ সে. মি. ও উচ্চতা 36 সে. মি. ; উহার ভূমি কত ?

4. একই ভূমির উপর অবস্থিত সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট সামান্তরিক সমূহের উন্নতি সমান। Parallelograms of equal area and on the same base have equal altitudes.

5. সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট সামান্তরিকসমূহ একই ভূমির একই পার্শ্বে অবস্থিত হইলে উহারা একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত। Parallelograms of equal area standing on the same side of a common base are between the same parallels.

6. সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি আয়তক্ষেত্র এবং একটি সামান্তরিক্ সাধারণ ভূমির একই পার্শ্বে অবস্থিত। প্রমাণ কর যে, সামান্তরিকের পরিসীমা আয়তক্ষেত্রের পরিসীমা অপেক্ষা বৃহত্তর। A rectangle and a parallelogram of equal area stand on the same side of a common base. Prove that the perimeter of the parallelogram is greater than the perimeter of the rectangle.

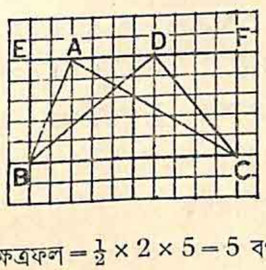
উপপাদ্য 27

যে সকল ত্রিভুজ (i) একই ভূমির উপর অথবা (ii) সমান ভূমির উপর এবং একই সমান্তরালযুগলের মধ্যে অবস্থিত তাহাদের ক্ষেত্রফল সমান।

[Triangles (i) on the same base or (ii) on equal bases and between the same parallels are equal in area.]

ছক কাগজের সাহায্যে প্রমাণ

(i) ছক কাগজে অঙ্কিত ABC, DBC ত্রিভুজ দুইটি একই ভূমি BC-র উপর এবং একই সমান্তরালযুগল AD, BC-র মধ্যে অবস্থিত। B ও C হইতে AD-র উপর (আবশ্যক হইলে বর্ধিত AD-র উপর) BE, CF লম্ব টানা হইয়াছে। EBCF একটি আয়তক্ষেত্র হইল।



EAB সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times 2 \times 5 = 5$ বর্গ-একক ;

FAC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times 8 \times 5 = 20$ বর্গ-একক ;

EDB ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times 6 \times 5 = 15$ বর্গ-একক ;

FDC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times 4 \times 5 = 10$ বর্গ-একক।

আয়ত EBCF $= 10 \times 5 = 50$ বর্গ-একক।

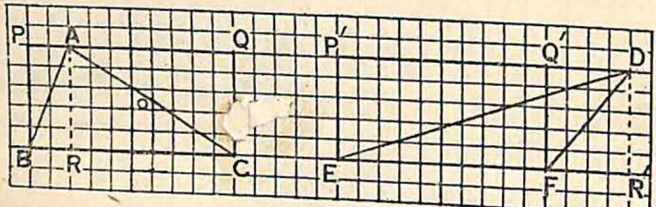
এখন, △ABC = আয়ত EBCF − △EAB − △FAC = (50 − 5 − 20) বর্গ-একক
= 25 বর্গ-একক।

এবং △DBC = আয়ত EBCF − △EDB − △FDC = (50 − 15 − 10) বর্গ-একক
= 25 বর্গ-একক।

∴ △ABC ও △DBC-র ক্ষেত্রফল সমান।

অতএব একই ভূমির উপর এবং একই সমান্তরালযুগলের মধ্যে অবস্থিত ত্রিভুজ সমূহের ক্ষেত্রফল সমান।

(ii) নীচের চিত্রে ABC, DEF ত্রিভুজ দুইটির ভূমি BC ও EF সমান এবং উহারা BCEF ও PQP′D সমান্তরালের মধ্যে অবস্থিত। B ও C হইতে PQ-এর উপর BP ও CQ লম্ব টান। তাহা হইলে PBCQ একটি আয়তক্ষেত্র হইল। D বিন্দু দিয়া EF-এর সমান্তরাল DP′ সরলরেখা টান। E ও F হইতে DP′-এর উপর EP′, FQ′ লম্ব টান। তাহা হইলে P′EFQ′ একটি আয়তক্ষেত্র হইল।



এখন $\triangle ABC = \triangle ABR + \triangle ACR = \frac{1}{2}BR.\ AR + \frac{1}{2}RC.\ AR.$

$= \frac{1}{2}.\ 2.\ 5 + \frac{1}{2}.\ 8.\ 5 = (\ 5 + 20\ )$ বর্গ একক $= 25$ বর্গ একক।

এবং $\triangle DEF = \triangle DER' - \triangle DFR' = \frac{1}{2}.\ ER'.\ DR' - \frac{1}{2}FR'.\ DR'$

$= \frac{1}{2}.\ 14.\ 5 - \frac{1}{2}.\ 4.\ 5 = (\ 35 - 10\ )$ বর্গ একক

$= 25$ বর্গ একক

∴ △ABC ও △DEF-এর ক্ষেত্রফল সমান।

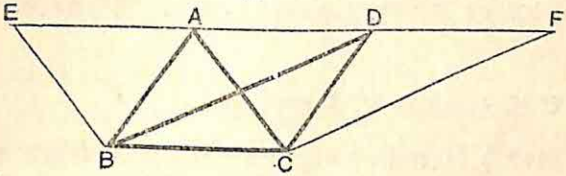
অতএব সমান ভূমির উপরও একই সমান্তরালযুগলের মধ্যে অবস্থিত ত্রিভুজ সমূহের ক্ষেত্রফল সমান।

দ্রষ্টব্য। ত্রিভুজগুলির মধ্যস্থিত ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের সংখ্যা গণনা করিয়াও উহাদের ক্ষেত্রফলের সমতা মোটামুটি স্থির করা যায়।

উপপাদ্য 27 (i) এর ঔপপত্তিক প্রমাণ

[যে সকল ত্রিভুজ একই ভূমির উপর এবং একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত তাহাদের ক্ষেত্রফল সমান।]

মনে কর ABC, DBC ত্রিভুজ দুইটি একই ভূমি BC-র উপর এবং একই সমান্তরাল যুগল AD, BC-র মধ্যে অবস্থিত।



প্রমাণ করিতে হইবে ABC, DBC ত্রিভুজ দুইটির ক্ষেত্রফল সমান।

অঙ্কন। B-বিন্দু দিয়া CA-র সমান্তরাল একটি সরলরেখা টান যাহা বর্ধিত DA-কে E-বিন্দুতে ছেদ করে। C-বিন্দু দিয়া BD-র সমান্তরাল একটি সরলরেখা টান যাহা বর্ধিত AD-কে F-বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ। EBCA এবং DBCF দুইটি সামান্তরিক এবং উহারা একই ভূমি BC-র উপর এবং একই সমান্তরাল যুগল BC, EF-এর মধ্যে অবস্থিত।

∴ সামান্তরিক EBCA = সামান্তরিক DBCF

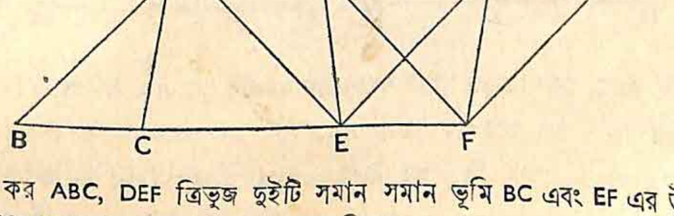
কিন্তু AB, EBCA সামান্তরিকের কর্ণ, ∴ △ABC = সামান্তরিক EBCA-এর অর্ধ।

DC, DBCF সামান্তরিকের কর্ণ, ∴ △DBC = সামান্তরিক DBCF-এর অর্ধ।

∴ △ABC = △DBC.

উপপাদ্য 27 (ii) এর ঔপপত্তিক প্রমাণ

[যে সকল ত্রিভুজ সমান সমান ভূমির উপর এবং একই সমান্তরালযুগলের মধ্যে অবস্থিত, তাহাদের ক্ষেত্রফল সমান।]



মনে কর ABC, DEF ত্রিভুজ দুইটি সমান সমান ভূমি BC এবং EF এর উপর, এবং BCEF ও XADY সমান্তরালযুগলের মধ্যে অবস্থিত।

প্রমাণ করিতে হইবে ABC ও DEF ত্রিভুজদ্বয়ের ক্ষেত্রফল সমান।

অঙ্কন। ABC ত্রিভুজকে DEF ত্রিভুজের উপর এমনভাবে স্থাপন কর যেন ভূমি উহার সমান EF ভূমির উপর সমাপতিত হয় এবং EF-এর যে দিকে D আ A-বিন্দু সেই দিকে পতিত হয়। A-বিন্দু অবশ্যই XY সরলরেখার উপর প হইবে। মনে কর XY-এর G বিন্দুতে A পতিত হইল। তাহা হইলে, GEF ABC- নূতন অবস্থান হইল।

EFDP এবং EFQG সামান্তরিক দুইটি সম্পূর্ণ কর।

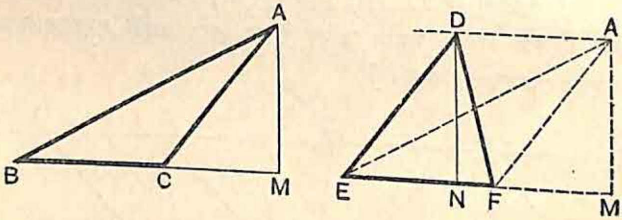
প্রমাণ। একই ভূমি এবং একই সমান্তরালযুগলের মধ্যে অবস্থিত বলিয়া EFDF EFQG সামান্তরিক দুইটির ক্ষেত্রফল সমান। আবার কর্ণ সামান্তরিককে সমদ্বিখণ্ডিত ক

স্থতরাং $\triangle DEF = \frac{1}{2} EFDP$ এবং $\triangle GEF = \frac{1}{2} EFQG$.

$\therefore \triangle DEF = \triangle GEF$, অর্থাৎ $\triangle ABC = \triangle DEF$.

অনুসিদ্ধান্ত। যে সকল ত্রিভুজ সমান সমান ভূমির উপর এবং সমান উন্নতিবি তাহাদের ক্ষেত্রফল সমান।

[Triangles on equal bases and of equal altitudes are eq in area.]



মনে কর ABC, DEF ত্রিভুজ দুইটি সমান সমান ভূমি BC এবং EF-এর উপর অব এবং উহাদের উন্নতি AM, DN পরস্পর সমান।

ABC ত্রিভুজকে DEF ত্রিভুজের উপর এমনভাবে স্থাপন কর যেন BC ভূমি উ সমান EF ভূমির উপর সমাপতিত হয় এবং A ও D শীর্ষদ্বয় EF ভূমির একই দিকে থা

তাহা হইলে AEF ত্রিভুজ ABC ত্রিভুজের নূতন অবস্থান হইল। এখন যেহেতু AM, DN উন্নতিদ্বয় পরস্পর সমান, সুতরাং ত্রিভুজ দুইটি একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত।

এক্ষণে, AEF ও DEF ত্রিভুজ দুইটি একই ভূমি এবং একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত বলিয়া উহাদের ক্ষেত্রফল সমান।

সুতরাং ABC, DEF ত্রিভুজ দুইটির ক্ষেত্রফল সমান।

অনুশীলনী 6

1. ত্রিভুজের যে কোন মধ্যমা ত্রিভুজটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

[A triangle is bisected by any of its medians.]

2. ABC ত্রিভুজের ভূমি BC, P এবং Q বিন্দুতে ত্রিখণ্ডিত হইলে ABP, APQ, AQC ত্রিভুজ তিনটির ক্ষেত্রফল পরস্পর সমান।

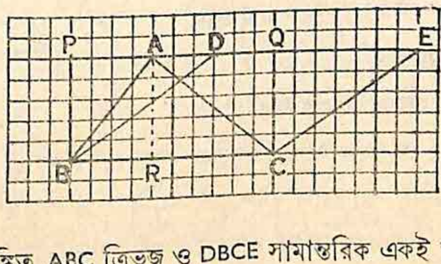
3. ABC ত্রিভুজের AX মধ্যমায় P যে কোন বিন্দু। প্রমাণ কর ABP, ACP ত্রিভুজ দুইটির ক্ষেত্রফল পরস্পর সমান।

উপপাদ্য 28

একটি ত্রিভুজ এবং একটি সামান্তরিক একই ভূমি এবং একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত হইলে, ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল সামান্তরিকের ক্ষেত্রফলের অর্ধ হইবে।

[If a triangle and a parallelogram stand on the same base and are between the same parallels, the area of the triangle is half that of the parallelogram.]

ছক কাগজের সাহায্যে প্রমাণ



ছক কাগজে অঙ্কিত ABC ত্রিভুজ ও DBCE সামান্তরিক একই ভূমি BC-র উপর এবং একই সমান্তরাল যুগল AE, BC-র মধ্যে অবস্থিত। B ও C হইতে AE-র উপর (প্রয়োজন

লে বর্ধিত AE-র উপর) BP ও CQ লম্ব টান। তাহা হইলে PBCQ একটি আয়তক্ষেত্র হইল। A হইতে BC-র উপর AR লম্ব টান।

তাহা হইলে APBR, AQCR প্রত্যেকে আয়তক্ষেত্র হইল।

এখন, $\triangle ABR = \frac{1}{2}$ আয়ত APBR ; $\triangle ARC = \frac{1}{2}$আয়ত AQCR.

$\therefore\ \triangle ABC = \triangle ABR + \triangle ACR = \frac{1}{2}$ আয়ত APBR $+ \frac{1}{2}$ আয়ত AQCR

$= \frac{1}{2}$ আয়ত PBCQ.

সমকোণী ত্রিভুজ PDB ও QEC এর ক্ষেত্রফল সমান

(প্রত্যেকের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}.\ 7.\ 5 = 17\frac{1}{2}$ বর্গ একক বলিয়া)।

$\therefore$ সামান্তরিক DBCE = ক্ষেত্র DBCQ + $\triangle$ QEC = ক্ষেত্র DBCQ + $\triangle$PDB.

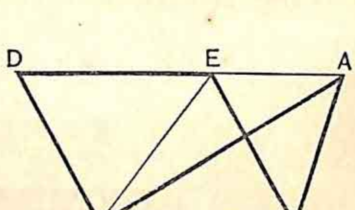
= আয়ত PBCQ

$\therefore\ \triangle ABC =$ সামান্তরিক DBCE এর অর্ধ।

অতএব একটি ত্রিভুজ ও একটি সামান্তরিক একই ভূমির উপর এবং একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত হইলে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল সামান্তরিকের ক্ষেত্রফলের অর্ধ।

উপপাদ্য 28-এর ঔপপত্তিক প্রমাণ

মনে কর ABC ত্রিভুজ এবং DBCE সামান্তরিক একই ভূমি BC-র উপর এবং একই সমান্তরাল যুগল DA, BC-র মধ্যে অবস্থিত।



প্রমাণ করিতে হইবে যে ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল DBCE সামান্তরিকের ক্ষেত্রফলের অর্ধ।

অঙ্কন। BE যুক্ত কর।

প্রমাণ। DBCE একটি সামান্তরিক ; সুতরাং BE কর্ণ উহাকে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে।

$\therefore$ EBC ত্রিভুজ, DBCE সামান্তরিকের অর্ধ।

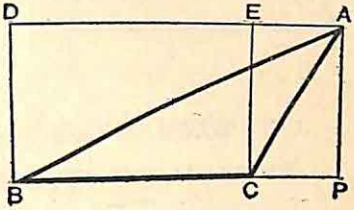
কিন্তু EBC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের সমান, কারণ উহারা একই ভূমি BC-র উপর এবং একই সমান্তরাল যুগল DA, BC-র মধ্যে অবস্থিত।

$\therefore$ ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল, DBCE সামান্তরিকের ক্ষেত্রফলের অর্ধ।

অনুসিদ্ধান্ত। কোন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল উহার ভূমি ও উন্নতির অন্তর্গত আয়ত-ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের অর্ধ।

[The area of a triangle is half the area of the rectangle on the same base and having the same altitude.]

মনে কর ABC একটি ত্রিভুজ, BC উহার ভূমি এবং AP উহার উন্নতি ; A-বিন্দু দিয়া BC-র সমান্তরাল AD সরলরেখা টান। B এবং C বিন্দু দিয়া BC-র উপর BD এবং CE লম্ব টান এবং মনে কর উহারা AD-কে যথাক্রমে D এবং E বিন্দুতে ছেদ করিল। তাহা হইলে DBCE একটি সামান্তরিক হইল।



∴ $\triangle ABC = \frac{1}{2}DBCE$ সামান্তরিক।

কিন্তু DBCE সামান্তরিকটি একটি আয়তক্ষেত্র,

∴ $\triangle ABC = \frac{1}{2}DBCE$ আয়তক্ষেত্র $= \frac{1}{2}BC.\ DB$

$= \frac{1}{2}BC.\ AP =$ BC ও AP-র অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের অর্ধ।

6. ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল।

পূর্ব অনুসিদ্ধান্তের চিত্রে, $\triangle ABC = \frac{1}{2}BC.\ AP = \frac{1}{2} \times$ ভূমি × উন্নতি।

সুতরাং **ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}$ × ভূমি × উন্নতি।**

ত্রিভুজের উন্নতি = (ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল × 2) ÷ ভূমি = $\frac{2\triangle}{\text{ভূমি}}$

ত্রিভুজের ভূমি = (ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল × 2) ÷ উন্নতি = $\frac{2\triangle}{\text{উন্নতি}}$

উদাহরণ 1. ত্রিভুজের ভূমি 10 মিটার এবং উন্নতি 8 মিটার ; ক্ষেত্রফল কত ?

নির্ণেয় ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2} \times 10 \times 8$ বর্গ-মিটার = 40 বর্গ-মিটার।

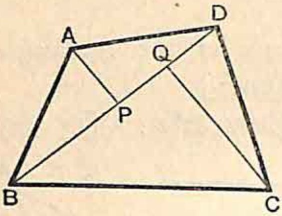
উদাহরণ 2. কোন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল 200 বর্গ-মিটার, ইহার ভূমি 12·5 মিটার হইলে, উহার উন্নতি কত ?

নির্ণেয় উন্নতি = (200 × 2 ÷ 12·5) মিটার = 32 মিটার।

উদাহরণ 3. কোন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল 198·4 বর্গ সে. মি. ; ইহার উন্নতি 12·8 সে. মি. হইলে, উহার ভূমি কত ?

নির্ণেয় ভূমি = (198·4 × 2 ÷ 12·8) সে. মি. = 31 সে. মি.।

7. চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল। মনে কর ABCD একটি চতুর্ভুজ। BD যুক্ত কর এবং ইহার উপর A এবং C-বিন্দু হইতে যথাক্রমে AP এবং CQ লম্ব টান।



[এস্থলে AP এবং CQ-কে BD-র উপর প্রশাখা (Offset) বলে।]

এখন, ABCD চতুর্ভুজ $=\triangle ABD+\triangle CBD$

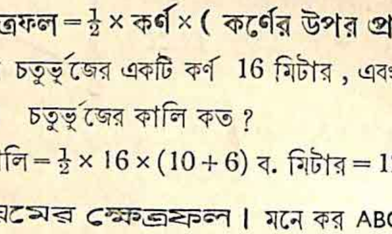
$=\frac{1}{2}BD.\ AP+\frac{1}{2}BD.\ CQ=\frac{1}{2}BD\ (AP+CQ)$.

∴ চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}$ × কর্ণ × (কর্ণের উপর প্রশাখাদ্বয়ের সমষ্টি)।

উদাহরণ। কোন চতুর্ভুজের একটি কর্ণ 16 মিটার, এবং উহার উপর প্রশাখাদ্বয় 10 মিটার ও 6 মিটার। চতুর্ভুজের কালি কত ?

চতুর্ভুজের কালি = $\frac{1}{2}\times 16\times(10+6)$ ব. মিটার = 128 বর্গ-মিটার।

8. ট্রাপিজিয়মের ক্ষেত্রফল। মনে কর ABCD ট্রাপিজিয়মের AD ও BC বাহুদ্বয় সমান্তরাল। AC যুক্ত কর। A-বিন্দু হইতে BC-র উপর AP লম্ব টান এবং



C-বিন্দু হইতে AD-র উপর CQ লম্ব টান। তাহা হইলে AP = CQ.

এখন, ABCD ট্রাপিজিয়ম $=\triangle ABC+\triangle CAD=\frac{1}{2}BC.AP+\frac{1}{2}AD.CQ$

$=\frac{1}{2}BC.\ AP+\frac{1}{2}AD.\ AP,\ \because AP=CQ$

$=\frac{1}{2}(BC+AD)\times AP$

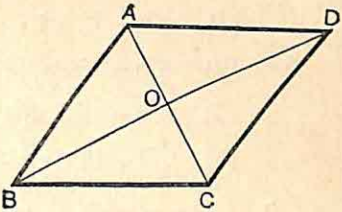
∴ ট্রাপিজিয়মের ক্ষেত্রফল

= সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমষ্টির অর্ধ × সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের দূরত্ব।

উদাহরণ। কোন ট্রাপিজিয়মের সমান্তরাল বাহুদ্বয় 10 মিটার ও 15 মিটার এবং সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের দূরত্ব 8 মিটার হইলে, ট্রাপিজিয়মের ক্ষেত্রফল কত ?

ট্রাপিজিয়মের ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}(10+15)\times 8$ বর্গ-মিটার = 100 বর্গ-মিটার।

9. রম্বসের ক্ষেত্রফল। মনে কর ABCD একটি রম্বস এবং উহার কর্ণদ্বয় AC, BD পরস্পর O-বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। যেহেতু রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পর লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত হয়, সুতরাং AO এবং CO, BD-র উপর লম্ব।



$\therefore$ ABCD রম্বস $= \triangle ABD + \triangle CBD$

$= \frac{1}{2}BD.\ AO + \frac{1}{2}BD.\ CO$

$= \frac{1}{2}BD\ (AO + CO)$

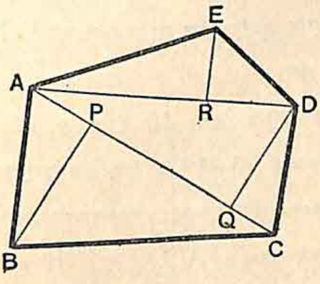
$= \frac{1}{2}BD.\ AC.$

$\therefore$ **রম্বসের ক্ষেত্রফল = কর্ণদ্বয়ের গুণফলের অর্ধ।**

উদাহরণ। কোন রম্বসের কর্ণদ্বয় 10 মিটার ও 12 মিটার হইলে উহার ক্ষেত্রফল কত ?

রম্বসের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times 10 \times 12$ ব. মিটার $= 60$ বর্গ-মিটার।

10. বহুভুজের ক্ষেত্রফল। কর্ণ দ্বারা বহুভুজকে কতিপয় ত্রিভুজে বিভক্ত করিলে ত্রিভুজ সমূহের ক্ষেত্রফলের সমষ্টি বহুভুজের ক্ষেত্রফলের সমান হয়।



মনে কর ABCDE একটি পঞ্চভুজ। AC, AD কর্ণদ্বারা বহুভুজটিকে তিনটি ত্রিভুজে বিভক্ত করা হইয়াছে। B হইতে AC-র উপর P লম্ব, D হইতে AC-র উপর DQ লম্ব এবং E হইতে AD-র উপর ER লম্ব টানা হইয়াছে।

এখন, ABCDE বহুভুজ $= \triangle ABC + \triangle ADC + \triangle AED$

$= \frac{1}{2}AC.BP + \frac{1}{2}AC.DQ + \frac{1}{2}AD.ER$

অনুশীলনী 7

1. নিম্নলিখিত ত্রিভুজগুলির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর—

(1) ভূমি = 12 ফুট, উন্নতি = 8 ফুট

(2) ভূমি = 15 সে. মি., উন্নতি = 10 সে. মি.

(3) ভূমি = 16·5 ইঞ্চি, উন্নতি = 8 ইঞ্চি

(4) ভূমি = 12·6 সে. মি., উন্নতি = 10·2 সে. মি.

2. কোন সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ভিন্ন অপর বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য 6 ফুট এবং 4·5 ফুট হইলে উহার ক্ষেত্রফল কত ?

3. ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল 160 ব. ই., ভূমি 1 ফুট 8 ইঞ্চি ; ইহার উন্নতি কত ?

4. কোন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল 270 বর্গ-ফুট, উন্নতি 13·5 ফুট ; ভূমি কত ?

5. কোন ত্রিভুজের ভূমি 12·5 সে. মি., অপর এক বাহু 14 সে. মি. এবং ক্ষেত্রফল 37·5 বর্গ সে. মি. ; ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

6. কোন চতুর্ভুজের একটি কর্ণের দৈর্ঘ্য 14 ইঞ্চি এবং বিপরীত কৌণিক বিন্দু হইতে উহার উপর পাতিত লম্বের দৈর্ঘ্য 6 ইঞ্চি ও 10 ইঞ্চি ; চতুর্ভুজটির কালি কত ?

7. কোন ট্রাপিজিয়মের সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমষ্টি 17 ইঞ্চি এবং উহার উন্নতি 6 ইঞ্চি ; উহার ক্ষেত্রফল কত ?

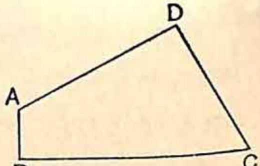
8. কোন রম্বসের কর্ণদ্বয়ের দৈর্ঘ্য 16 ইঞ্চি ও 12 ইঞ্চি ; ক্ষেত্রফল কত ?

9. কোন বর্গক্ষেত্রের কর্ণ 6 ইঞ্চি হইলে, উহার ক্ষেত্রফল কত ?

বর্গক্ষেত্রের কর্ণদ্বয় পরস্পর সমান এবং পরস্পরকে লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

∴ বর্গ-ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $(\frac{1}{2} \times 6 \times 6)$ বর্গ-ইঞ্চি = 18 বর্গ-ইঞ্চি।

10. ABCD চতুর্ভুজের ∠B এবং ∠D সমকোণ এবং AB = 2 ইঞ্চি, BC = 9 ইঞ্চি, CD = 6 ইঞ্চি, DA = 7 ইঞ্চি। চতুর্ভুজটির ক্ষেত্রফল কত ?

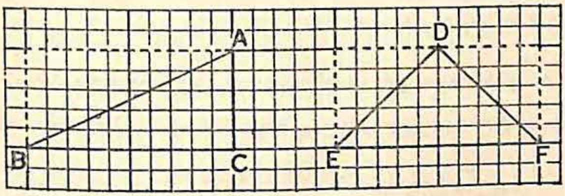


উপপাদ্য 29

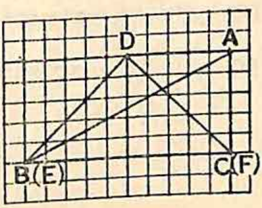
সমান সমান ত্রিভুজ একই ভূমির উপর এবং উহার একই পার্শ্বে অবস্থিত হইলে, উহারা একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত।

[Equal triangles on the same base and on the same side of it are between the same parallels.]

ছক কাগজের সাহায্যে প্রমাণ

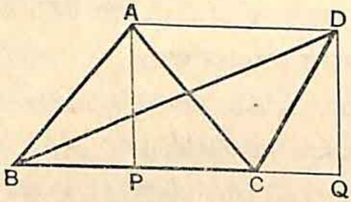


ছক কাগজে ABC, DEF দুইটি ত্রিভুজ সমান ভূমি BC ও EF এর উপর অবস্থিত। গণনা করিয়া বা হিসাব করিয়া দেখ ইহাদের ক্ষেত্রফল সমান (প্রত্যেকের ক্ষেত্রফল 25 বর্গ একক)। এখন DEF ত্রিভুজটিকে ABC ত্রিভুজের উপর এইরূপে স্থাপন কর যেন EF বাহু উহার সমান BC বাহুর সহিত মিলিয়া যায় এবং D বিন্দু BC-র যেদিকে A বিন্দু আছে



সেই দিকেই পড়ে। তাহা হইলে DEF ত্রিভুজ DBC ত্রিভুজে পরিণত হইল। এখন ABC ও DBC সমান ত্রিভুজ দুইটি একই ভূমি BC-র একই পার্শ্বে অবস্থিত হইল। AD যুক্ত করিয়া দেখ AD, BC-এর সমান্তরাল।

উপপাদ্য 29-এর ঔপপত্তিক প্রমাণ



মনে কর ABC, DBC দুইটি সমান ত্রিভুজ একই ভূমি BC-র একই পার্শ্বে অবস্থিত। প্রমাণ করিতে হইবে যে, AD এবং BC সমান্তরাল।

অঙ্কন। A ও D হইতে BC ও বর্ধিত BC-র উপর যথাক্রমে AP ও DQ লম্ব টান। তাহা হইলে AP ও DQ যথাক্রমে ABC ও DBC ত্রিভুজ দুইটির উন্নতি হইল।

প্রমাণ। $\triangle ABC = \frac{1}{2}BC.AP$

$\triangle DBC = \frac{1}{2}BC.DQ$

কিন্তু $\triangle ABC = \triangle DBC$

$\therefore \quad \frac{1}{2}BC.AP = \frac{1}{2}BC.DQ$

$\therefore \quad AP = DQ$

কিন্তু AP ও DQ সমান্তরাল, কারণ উহারা প্রত্যেকে BC-র উপর লম্ব।

∴ AP ও DQ সমান এবং সমান্তরাল।

∴ AD ও PQ অর্থাৎ AD ও BC সমান্তরাল।

অনুসিদ্ধান্ত। সমান সমান ত্রিভুজ একই অথবা সমান ভূমির উপর অবস্থিত হইলে, তাহারা সমান উন্নতি বিশিষ্ট হয়।

[Equal triangles on the same base or on equal bases are of equal altitudes.]

অনুশীলনী 8

1. সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় উহাকে চারিটি সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট ত্রিভুজে বিভক্ত করে। A parallelogram is divided by its diagonals into four triangles of equal area. (C. U. 1915)

2. ত্রিভুজের যে কোন দুইটি বাহুর মধ্যবিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখা তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল। The straight line joining the middle points of two sides of a triangle is parallel to the third side. (C. U. 1934)

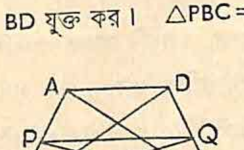
ইঙ্গিত। মনে কর P ও Q, ABC ত্রিভুজের AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু। PQ, PC, BQ যুক্ত কর। $\triangle PBC = \frac{1}{2}\triangle ABC$, যেহেতু P, AB-র মধ্যবিন্দু

এবং $\triangle QBC = \frac{1}{2}\triangle ABC$, যেহেতু Q, AC-র মধ্যবিন্দু;

$\therefore$ $\triangle PBC = \triangle QBC$, এবং যেহেতু উহারা একই ভূমির উপর এবং উহার একই পার্শ্বে অবস্থিত, সুতরাং উহারা একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত। $\therefore$ PQ ∥ BC.

3. কোন ট্রাপিজিয়মের তির্যক্ বাহু দুইটির মধ্যবিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখা উহার সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের প্রত্যেকটির সমান্তরাল। The straight line which joins the middle points of the oblique sides of a trapezium is parallel to the parallel sides. (C. U. 1936)

ইঙ্গিত। মনে কর, P ও Q ABCD ট্রাপিজিয়মের AB, DC তির্যক্ বাহু দুইটির মধ্যবিন্দু। PQ, PC, BQ, AC, BD যুক্ত কর। $\triangle PBC = \frac{1}{2}\triangle ABC$, যেহেতু P, AB-র



মধ্যবিন্দু এবং $\triangle QBC = \frac{1}{2}\triangle DBC$, যেহেতু Q, DC-র মধ্যবিন্দু; কিন্তু $\triangle ABC = \triangle DBC$; (একই ভূমির উপর এবং একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত বলিয়া)।

$\therefore$ $\triangle PBC = \triangle QBC$, এবং যেহেতু উহারা একই ভূমির উপর উহার একই পার্শ্বে অবস্থিত, সুতরাং উহারা একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত। $\therefore$ PQ ∥ BC.

4. ABC ত্রিভুজের AB এবং AC বাহুর মধ্যবিন্দু P এবং Q. PC এবং QB সরলরেখা দুইটি O-বিন্দুতে ছেদ করিলে, প্রমাণ কর যে BOC ত্রিভুজ = APOQ চতুর্ভুজ।

5. একই ভূমির উপর অবস্থিত সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট ত্রিভুজ সমূহের শীর্ষের সঞ্চারপথ নির্ণয় কর। Find the locus of the vertices of triangles on the same base and of equal area.

6. কোন চতুর্ভুজ যদি উহার প্রত্যেক কর্ণদ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত হয়, তবে উহা একটি সামান্তরিক। If a quadrilateral is bisected by each of its diagonals, it must be a parallelogram.

7. P, ABC ত্রিভুজের অন্তর্গত একটি বিন্দু। যদি PAB এবং PAC ত্রিভুজ দুইটির ক্ষেত্রফল সমান হয়, প্রমাণ কর যে AP বর্ধিত হইলে BC-কে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে।

8. কোন চতুর্ভুজ একটি কর্ণদ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত হইলে, এই কর্ণ অপর কর্ণকেও সমদ্বিখণ্ডিত করিবে।

9. যে সামান্তরিকের ভূমি ও ক্ষেত্রফল নির্দিষ্ট, তাহার কর্ণদ্বয়ের ছেদ-বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর। Find the locus of the point of intersection of the diagonals of a parallelogram on a fixed base and of constant area.

10. ABCD সামান্তরিকের AC কর্ণের উপর O যে কোন বিন্দু। OB, OD যোগ করিয়া প্রমাণ কর যে BAO এবং DAO ত্রিভুজ দুইটির ক্ষেত্রফল সমান।

(C. U. 1942)

11. যে কোন চতুর্ভুজের চারিটি বাহুর মধ্যবিন্দু পর পর যুক্ত হইলে যে ক্ষেত্র উৎপন্ন হয় তাহা একটি সামান্তরিক এবং এই সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফলের অর্ধ। If the middle points of the sides of any quadrilateral are joined in order, the figure thus formed is a parallelogram, and its area is half the area of the quadrilateral.

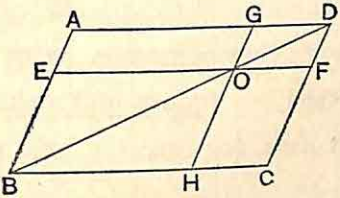
12. ত্রিভুজের ভূমির সমান্তরাল এবং অপর দুই বাহু দ্বারা ছিন্ন যে কোন সরলরেখা ভূমির সমদ্বিখণ্ডক মধ্যমা দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত হইবে। In any triangle any straight line parallel to the base and terminated by the other two sides is bisected by the median which bisects the base.

13. দুইটি সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট ত্রিভুজ একই ভূমির বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত হইলে, উহাদের শীর্ষ দুইটির সংযোজক সরলরেখা ভূমি বা বর্ধিত ভূমি দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

If two triangles of equal area stand on the same base but on opposite sides of it, prove that the straight line joining their vertices is bisected by the base, or the base produced.

14. ABC ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র G; প্রমাণ কর GBC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের এক তৃতীয়াংশ।

সংজ্ঞা। সামান্তরিকের কোন কর্ণের অন্তর্গত যে কোন বিন্দু দিয়া উহার সন্নিহিত দুই বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা টানিলে সামান্তরিকটি যে চারিটি সামান্তরিকে বিভক্ত হয়, তাহাদের মধ্যে যে দুইটির কর্ণ, মূল সামান্তরিকের কর্ণের সহিত এক, তাহাদিগকে



ঐ কর্ণের পার্শ্ববর্তী সামান্তরিক (Parallelograms about the diagonal) এবং অবশিষ্ট দুইটির প্রত্যেকটিকে প্রথম দুইটির পূরক (Complements) বলে।

উপরের চিত্রে EH ও GF, AC সামান্তরিকের BD কর্ণের পার্শ্ববর্তী সামান্তরিক এবং AO, CO উহাদের পূরক।

15. কোন সামান্তরিকের একটি কর্ণের পার্শ্ববর্তী সামান্তরিক দুইটির পূরকদ্বয় পরস্পর সমান। The complements of the parallelograms about a diagonal are equal in area.

সংজ্ঞার চিত্রে BD কর্ণ ABCD সামান্তরিককে, BO কর্ণ EH সামান্তরিককে এবং OD কর্ণ GF সামান্তরিককে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে।

$\therefore \triangle ABD = \triangle CBD$; $\triangle EBO = \triangle HBO$; এবং $\triangle GOD = \triangle FOD$.

$\therefore \triangle ABD - \triangle EBO - \triangle GOD = \triangle CBD - \triangle HBO - \triangle FOD$.

অর্থাৎ সামান্তরিক AEOG = সামান্তরিক CFOH.

16. দুইটি ত্রিভুজের মধ্যে যদি একটির দুই বাহু যথাক্রমে অপরটির দুই বাহুর সমান হয় এবং উহাদের অন্তর্ভূত কোণদ্বয় পরস্পর সম্পূরক হয়, তাহা হইলে ত্রিভুজ দুইটির ক্ষেত্রফল পরস্পর সমান হইবে। If two triangles have two sides of one respectively equal to two sides of the other, and the angles included by these sides supplementary, the triangles are equal in area.

17. ABCD একটি সামান্তরিক এবং O ইহার অন্তর্বর্তী যে কোন একটি বিন্দু। প্রমাণ কর যে AOB, COD ত্রিভুজদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের সমষ্টি ABCD সামান্তরিকের ক্ষেত্রফলের অর্ধ। ABCD is any parallelogram and O is any point within it. Show that the sum of the areas of the triangles AOB, COD is equal to half the area of the parallelogram. (C. U. 1930)

18. একই ভূমির উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র ও রম্বসের মধ্যে কোনটির ক্ষেত্রফল বেশী? উত্তরের কারণ দেখাও। A square and a rhombus stand on the same base. Which has the greater area? Give reasons for your answer. (C. U. 1940)

19. ABC ত্রিভুজের AB-র অন্তর্গত যে কোন D-বিন্দু দিয়া BC-র সমান ও সমান্তরাল DEF সরলরেখা টানা হইল, যাহা AC-কে E-বিন্দুতে ছেদ করে; প্রমাণ কর AEF ও BDE ত্রিভুজ দুইটির ক্ষেত্রফল সমান।

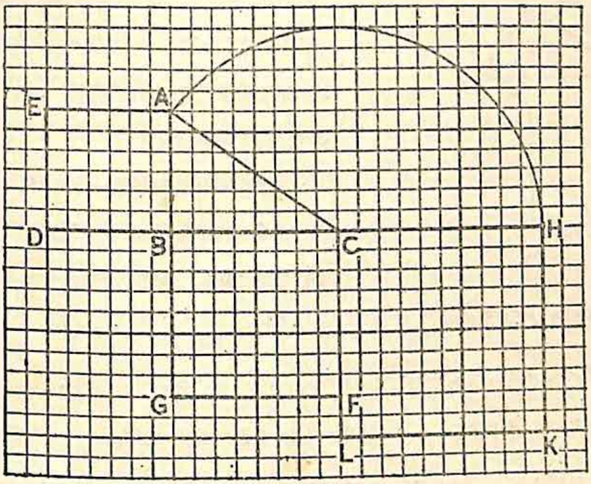
20. ABCD ট্রাপিজিয়মের AD ও BC সমান্তরাল। AB-র মধ্যবিন্দু E-র সহিত C ও D যুক্ত করিয়া প্রমাণ কর যে EDC ত্রিভুজ ABCD ট্রাপিজিয়মের অর্ধ।

উপপাদ্য 30

সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র উহার অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র দুইটির সমষ্টির সমান।

[In a right-angled triangle the square described on the hypotenuse is equal to the sum of the squares described on the other two sides.]

ছক কাগজের সাহায্যে প্রমাণ



ছক কাগজে ABC সমকোণী ত্রিভুজের B কোণ সমকোণ, AB-র দৈর্ঘ্য 6 একক, BC-র দৈর্ঘ্য 8 একক। AB-র উপর ABDE বর্গক্ষেত্র এবং BC-র উপর BCFG বর্গক্ষেত্র আঁকা হইল। BC-কে বর্ধিত করিয়া বর্ধিতাংশ হইতে AC অতিভুজের সমান CH অংশ কাটিয়া লওয়া হইল। CH-এর উপর CHKL বর্গক্ষেত্র আঁকা হইল। তাহা হইলে CH-এর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র AC-র উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের সমান। গণনা করিয়া দেখ ABDE বর্গক্ষেত্রে ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের সংখ্যা 36, সুতরাং উহার ক্ষেত্রফল 36 বর্গ একক। BCFG বর্গক্ষেত্রে ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের সংখ্যা 64, সুতরাং উহার ক্ষেত্রফল 64 বর্গ একক, এবং CHKL বর্গক্ষেত্রে ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের সংখ্যা 100, সুতরাং উহার ক্ষেত্রফল 100 বর্গ একক।

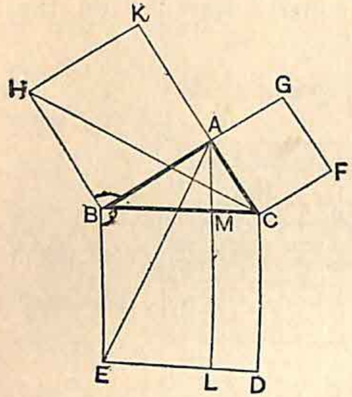
$\therefore \quad AB^2 + BC^2 = 36 + 64 = 100 = 10^2 = CH^2 = AC^2$

অতএব সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র উহার অপর বাহুদ্বয়ের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টির সমান।

উপপাদ্য 30-এর ঔপপত্তিক প্রমাণ

মনে কর ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ যাহার ∠BAC সমকোণ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে BC-র উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র, AB ও AC-র উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টির সমান।



অঙ্কন। BC, AC এবং AB-র উপর যথাক্রমে BCDE, ACFG এবং ABHK বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর। A-বিন্দু দিয়া BE বা CD-র সমান্তরাল একটি সরলরেখা টান যাহা BC-কে M এবং ED-কে L-বিন্দুতে ছেদ করে। AE এবং CH যুক্ত কর।

প্রমাণ। ∠BAC + ∠BAK = 2 সমকোণ ;

∴ AC এবং AK একই সরলরেখায় অবস্থিত। এইরূপে BA এবং AG একই সরলরেখায় অবস্থিত। আবার ∠CBE = 1 সমকোণ = ∠ABH

∴ ∠CBE + ∠ABC = ∠ABH + ∠ABC, অর্থাৎ ∠ABC = ∠HBC.

এখন, △ABE ≡ △HBC ∵ AB = HB, EB = BC, ∠ABE = ∠HBC.

কিন্তু, আয়ত BELM = 2△ABE, কারণ, উহারা একই ভূমি BE-র উপর এবং একই সমান্তরাল যুগল BE, AL-এর মধ্যে অবস্থিত।

বর্গক্ষেত্র ABHK = 2△HBC, কারণ উহারা একই ভূমি HB-র উপর এবং একই সমান্তরাল যুগল HB, KC-র মধ্যে অবস্থিত।

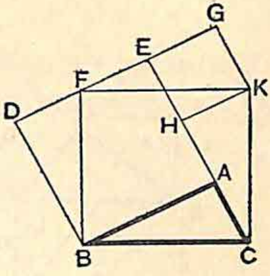
∴ আয়ত BELM = বর্গক্ষেত্র ABHK.

তদ্রূপ, আয়ত CDLM = বর্গক্ষেত্র ACFG, (AD এবং BF সংযুক্ত করিয়া)।

∴ আয়ত BELM + আয়ত CDLM = বর্গক্ষেত্র ABHK + বর্গক্ষেত্র ACFG.

অর্থাৎ BC-র উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র, AB ও AC-র উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টির সমান।

দ্বিতীয় প্রমাণ। ABC সমকোণী ত্রিভুজে $\angle BAC$ সমকোণ।



অঙ্কন। AB-র উপর C-র বিপরীত দিকে ABDE বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর। তাহা হইলে AE ও AC একই সরলরেখায় অবস্থিত হইবে। DE হইতে AC-র সমান DF অংশ এবং বর্ধিত DE হইতে AC-র সমান EG অংশ কাট। EC হইতে AC-র সমান EH অংশ কাটিয়া লও এবং GEHK বর্গক্ষেত্র সম্পূর্ণ কর।

KC, KF, BF সংযুক্ত কর।

প্রমাণ। $FG = DE = DB = AB = AE = HC$ এবং $GK = DF = AC = HK$

$\angle G = \angle D = \angle A = \angle H$ (সমকোণ বলিয়া)

$\therefore$ GFK, BDF, BAC, CHK ত্রিভুজ চারিটি সর্বসম।

$\therefore$ $FK = FB = BC = CK$ এবং $\angle G = \angle D = 1$ সমকোণ;

$\therefore$ $\angle GKF + \angle GFK = 1$ সমকোণ $= \angle DFB + \angle DBF$.

কিন্তু $\angle GKF = \angle DFB$ এবং $\angle GFK = \angle DBF$ ($\because \triangle GFK \equiv \triangle BDF$)

$\therefore$ $GFK + \angle DFB = 1$ সমকোণ; অতএব $\angle BFK = 1$ সমকোণ।

সুতরাং FBCK একটি বর্গক্ষেত্র এবং ইহা BC-র উপর অবস্থিত।

$\therefore$ $BC^2 =$ FBCK ক্ষেত্র $=$ BAHKF ক্ষেত্র $+ \triangle BAC + \triangle CHK$

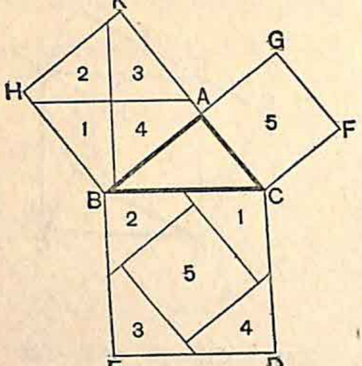
$=$ BAHKF ক্ষেত্র $+ \triangle GFK + \triangle BDF =$ AEDB ক্ষেত্র $+$ HKGE ক্ষেত্র

$= AB^2 + AC^2$ (অঙ্কন অনুসারে HKGE ক্ষেত্র $= EG^2 = AC^2$)।

---

* এই প্রতিজ্ঞাটি গ্রীস দেশীয় বিখ্যাত পণ্ডিত পীথাগোরাস কর্তৃক আবিষ্কৃত হইয়াছিল বলিয়া ইহা পীথাগোরাসের প্রতিজ্ঞা (Theorem of Pythagoras) নামে পরিচিত। পীথাগোরাস খ্রীষ্টপূর্ব ৬০০ অব্দে বর্তমান ছিলেন। কিন্তু ভারতবর্ষে এই প্রতিজ্ঞাটি বহু প্রাচীনকাল হইতে সুপরিচিত ছিল। বেদের শুল্ব সূত্রে এই প্রকার দুইটি উপপাদ্যের উল্লেখ আছে।

পরীক্ষামূলক প্রমাণ (Experimental Proof)—



ABC সমকোণী ত্রিভুজের ∠BAC সমকোণ। BC, AB, AC-র উপর BCDE, ABHK, ACFG বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত করা হইয়াছে। মনে কর AB > AC.

ABHK বর্গক্ষেত্রের কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু হইতে BC-র সমান্তরাল এবং BC-র উপর লম্বভাবে দুইটি সরলরেখা টানিয়া বর্গক্ষেত্রটিকে 1, 2, 3, 4 চিহ্নিত চারিটি সর্বসম চতুর্ভুজে বিভক্ত করা হইয়াছে। BC ও ED-র মধ্যবিন্দু দিয়া AC-র সমান্তরাল এবং BE ও CD-র মধ্যবিন্দু দিয়া AB-র সমান্তরাল সরলরেখা সমূহ টানিয়া BCDE বর্গক্ষেত্রকে 1, 2, 3, 4, 5 চিহ্নিত চতুর্ভুজ সমূহে বিভক্ত করা হইয়াছে। ইহাদের মধ্যে 1, 2, 3, 4 চিহ্নিত চতুর্ভুজ চারিটি ABHK বর্গক্ষেত্রের অন্তর্গত 1, 2, 3, 4 চিহ্নিত চতুর্ভুজের সমান। আবার মাপিয়া দেখ, BCDE বর্গক্ষেত্রের 5 চিহ্নিত চতুর্ভুজ ACFG বর্গক্ষেত্রের সমান। ইহা হইতে প্রমাণিত হইল BCDE বর্গক্ষেত্র, ABHK এবং ACFG বর্গক্ষেত্র দুইটির সমষ্টির সমান।

উক্ত প্রতিজ্ঞার সিদ্ধান্তটি সংক্ষেপে এইরূপে প্রকাশ করা যায়,—

ABC সমকোণী ত্রিভুজের BC অতিভুজ হইলে, $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

সমকোণী ত্রিভুজের যে কোন দুই বাহুর দৈর্ঘ্য নির্দিষ্ট থাকিলে, তৃতীয় বাহুর দৈর্ঘ্য উক্ত সিদ্ধান্ত হইতে নির্ণয় করা যায় ; যথা :

1. **উদাহরণ।** ABC সমকোণী ত্রিভুজের AB এবং AC-র দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 4″ ও 3″, অতিভুজ BC-র দৈর্ঘ্য কত ?

$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25, \quad \therefore BC = \sqrt{25} = 5$ (ইঞ্চি).

2. **উদাহরণ।** ABC সমকোণী ত্রিভুজে অতিভুজ BC = 13 সে. মি. এবং AC = 5 সে. মি ; AB-র দৈর্ঘ্য কত ?

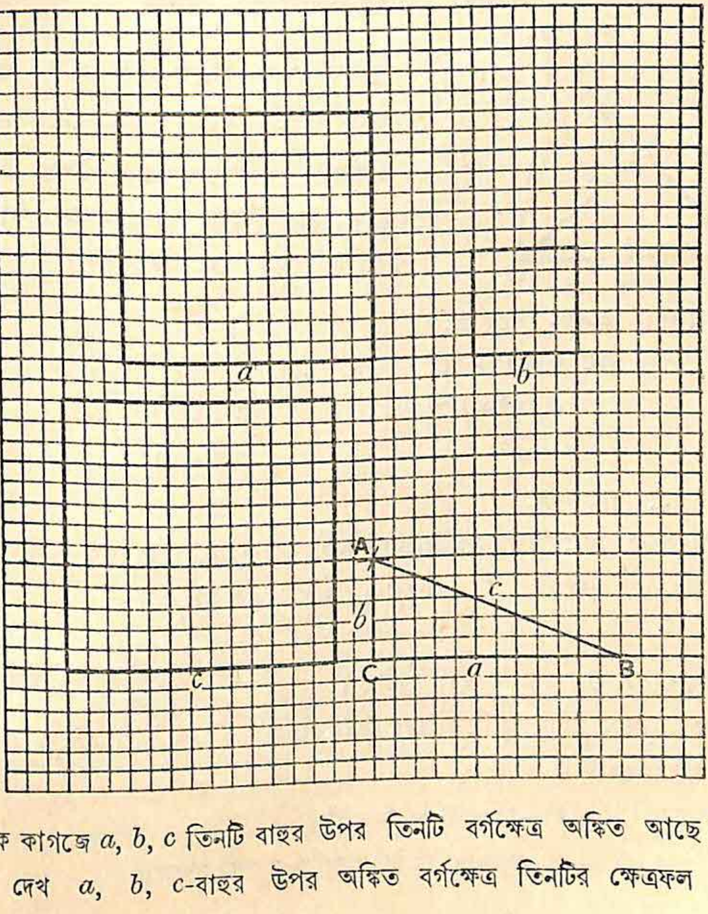
$BC^2 = AB^2 + AC^2, \quad \therefore AB^2 = BC^2 - AC^2 = 13^2 - 5^2$

$= 169 - 25 = 144, \quad \therefore AB = 12$ সে. মি.।

উপপাদ্য 31

কোন ত্রিভুজের এক বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র অপর বাহু দুইটির উপর **অঙ্কিত** বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টির সমান হইলে, শেষোক্ত বাহুদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ সমকোণ হইবে। [If the square described on one side of a triangle is equal **to** the sum of the squares described on the other two sides, **then** the angle contained by these two sides is a right angle.]

ছক কাগজের সাহায্যে প্রমাণ

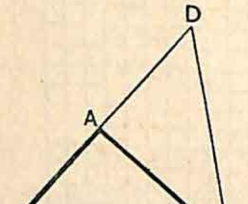


ছক কাগজে a, b, c তিনটি বাহুর উপর তিনটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত আছে। **গণনা** করিয়া দেখ a, b, c-বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র তিনটির ক্ষেত্রফল **যথাক্রমে**

144, 25, 169 বর্গ একক ; যেহেতু $144+25=169$, $\therefore$ a ও b বাহু দুই অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র দুইটির ক্ষেত্রফলের সমষ্টি c বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফ সমান। এখন a, b, c বাহু তিনটি দিয়া ABC ত্রিভুজ অঙ্কন কর যেন BC $AC=b$ এবং $AB=c$ হয়। মাপিয়া দেখ c বাহুর বিপরীত C কোণ সমকোণ।

অতএব কোন ত্রিভুজের এক বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র অপর দুই বাহুর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টির সমান হইলে, শেষোক্ত বাহু দুইটির অন্তর্গত সমকোণ হয়।

উপপাদ্য 31-এর ঔপপত্তিক প্রমাণ



মনে কর ABC ত্রিভুজে $BC^2=AB^2+AC^2$. প্রমাণ করিতে হইবে যে, BAC সমকোণ।

অঙ্কন। A-বিন্দুতে AC-র উপর একটি টান এবং ইহা হইতে AB-র সমান করিয়া অংশ কাটিয়া লও। DC সংযুক্ত কর।

প্রমাণ। $\angle DAC$ সমকোণ ;

$\therefore$ $DC^2=AD^2+AC^2$

$=AB^2+AC^2$ $\quad$ ($\because$ $AB=AD$)

$=BC^2$ $\quad$ (কল্পনা)

$\therefore$ $DC=BC$.

এখন, BAC, DAC ত্রিভুজ দুইটির $AB=AD$, $BC=DC$, এবং AC সাধারণ ব স্থতরাং ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। $\therefore$ $\angle BAC=\angle DAC=$ এক সমকোণ।

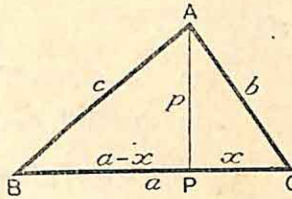
উপপাদ্য 31, উপপাদ্য 30-এর বিপরীত।

প্রশ্ন। কোন ত্রিভুজের তিন বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 3″, 4″, 5″ হইলে, প্রমাণ যে ত্রিভুজটি সমকোণী।

$\because$ $3^2+4^2=9+16=25=5^2$;

$\therefore$ 3″ ও 4″ দীর্ঘ বাহু দুইটির অন্তর্গত কোণটি সমকোণ।

বাহু তিনটির দৈর্ঘ্য হইতে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয়। মনে কর ABC ত্রিভুজের BC $= a$, CA $= b$, AB $= c$.



A হইতে BC-র উপর AP লম্ব টান। মনে কর AP $= p$, এবং CP $= x$.

তাহা হইলে BP = BC − CP $= a - x$.

APB এবং APC সমকোণ,

$\therefore\ c^2 - (a-x)^2 = p^2 = b^2 - x^2$

অতএব, $c^2 - (a-x)^2 = b^2 - x^2$ বা $c^2 - a^2 + 2ax - x^2 = b^2 - x^2$

বা $2ax = a^2 + b^2 - c^2$. $\therefore\ x = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2a}$

$$\therefore p^2 = b^2 - x^2 = b^2 - \frac{(a^2+b^2-c^2)^2}{4a^2} = \frac{4a^2b^2 - (a^2+b^2-c^2)^2}{4a^2}$$

$$= \frac{(2ab+a^2+b^2-c^2)(2ab-a^2-b^2+c^2)}{4a^2}$$

$$= \frac{\{(a+b)^2-c^2\}\{c^2-(a-b)^2\}}{4a^2}$$

$$= \frac{(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)}{4a^2}.$$

এখন যদি $(a+b+c)$ এর পরিবর্তে $2s$ ধরা হয়, তাহা হইলে

$$p^2 = \frac{2s(2s-2c)(2s-2b)(2s-2a)}{4a^2} = \frac{4s(s-c)(s-b)(s-a)}{a^2}$$

$$\therefore p = \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{a}$$

$$\therefore \triangle ABC = \tfrac{1}{2}.a.p = \tfrac{1}{2}.a.\frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{a}$$

$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

দ্রষ্টব্য। যেহেতু $2s = a+b+c =$ ত্রিভুজের পরিসীমা (Perimeter),

$\therefore\ s = \frac{1}{2}(a+b+c) =$ অর্ধ পরীসীমা (Semi-perimeter).

উদাহরণ। কোন ত্রিভুজের বাহু তিনটির দৈর্ঘ্য 4″, 6″, 8″ ; ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল কত ? এস্থলে $s = \frac{1}{2}(4+6+8)'' = 9''$.

$\therefore$ ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $= \sqrt{9(9-4)(9-6)(9-8)} = \sqrt{9.\ 5.\ 3.\ 1}$.

$= \sqrt{135}$ বর্গ ইঞ্চি $= 11{\cdot}6$ বর্গ ইঞ্চি (প্রায়)।

অনুশীলনী 9.

1. ABC সমকোণী ত্রিভুজের A কোণ সমকোণ। অতিভুজের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর, যদি,

(1) $b=6''$, $c=8''$ (2) $b=3{\cdot}6''$, $c=4{\cdot}8''$

(3) $b=2{\cdot}4''$, $c=3{\cdot}2''$ (4) $b=12$ সে. মি., $c=5$ সে. মি.

2. ABC সমকোণী ত্রিভুজের A কোণ সমকোণ। তৃতীয় বাহু নির্ণয় কর, যদি,

(1) $a=35''$, $b=21''$

(2) $a=6{\cdot}5''$, $c=5{\cdot}2''$

(3) $a=7{\cdot}3$ সে. মি., $c=5{\cdot}5$. সে. মি.

(4) $a=6{\cdot}5$ সে. মি, $b=5{\cdot}6$ সে. মি.

3. প্রমাণ কর যে নিম্নোক্ত বাহুবিশিষ্ট প্রত্যেক ত্রিভুজ সমকোণী—

(1) 15 ফু., 20 ফু., 25 ফু.

(2) 60 ফু., 25 ফু., 65 ফু.

(3) 10·2 সে. মি, 13·6 সে. মি., 17 সে. মি.

(4) 16·8 সে. মি., 7 সে. মি., 18·2 সে. মি.

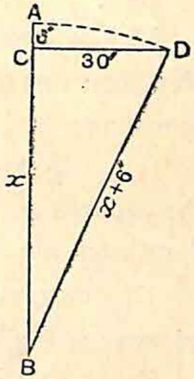
4. কোন আয়তক্ষেত্রের সন্নিহিত বাহুদ্বয় 24 ফুট ও 10 ফুট ; ইহার কর্ণের কত ?

5. A-গ্রাম হইতে B-গ্রাম 9 মাইল দক্ষিণে ; B-গ্রাম হইতে C-গ্রাম 12 মাইল পূর্ব। A-গ্রাম হইতে C-গ্রামের ন্যূনতম দূরত্ব কত ?

6. একই স্থান হইতে যাত্রা করিয়া একখানি জাহাজ ঘণ্টায় 18 মাইল বেগে উত্তর দিকে এবং অপর একখানি ঘণ্টায় 24 মাইল বেগে পশ্চিম দিকে চলিতেছে। 15 ঘণ্টা পরে উহাদের মধ্যে কত মাইল ব্যবধান হইবে ?

7. কোন জলাশয়ে একটি পদ্মফুল জল হইতে 6 ইঞ্চি উর্ধ্বে ছিল। কোন নৌকারোহী উহাকে ধরিয়া 30 ইঞ্চি অগ্রসর হইলে উহা জলের মধ্যে ডুবিয়া গেল। জলের গভীরতা কত ?

মনে কর AB পদ্মের ডাঁটার দৈর্ঘ্য, CB জলের গভীরতা এবং C হইতে 30 ইঞ্চি দূরে D-বিন্দুতে গিয়া পদ্মটি জলে ডুবিল।



CB-র দৈর্ঘ্য x ইঞ্চি ধরিলে,

AB হইবে $(x+6)$ ইঞ্চি,

এবং $BD=AB=(x+6)$ ইঞ্চি।

যেহেতু, ∠DCB সমকোণ, $\therefore\ BD^2=BC^2+CD^2$

অর্থাৎ, $(x+6)^2=x^2+30^2$,

অথবা, $x^2+12x+36=x^2+900$

অথবা, $12x=864$

অথবা $x=72$, অর্থাৎ জলের গভীরতা $=72$ ইঞ্চি।

8. একখানি মইএর একপ্রান্ত মাটি হইতে 24 ফুট উচ্চে দেয়ালে এবং অপর প্রান্ত দেয়াল হইতে 18 ফুট দূরে মাটিতে সংলগ্ন আছে। মইএর দৈর্ঘ্য কত?

9. 13 ফুট দীর্ঘ একখানি মইএর এক প্রান্ত দেয়ালে সংলগ্ন আছে এবং অপর প্রান্ত দেয়াল হইতে 5 ফুট দূরে আছে; মইএর উচ্চ প্রান্ত কত ঊর্ধ্বে দেয়ালে সংলগ্ন আছে?

10. নিম্নলিখিত বাহু বিশিষ্ট ত্রিভুজগুলির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর :—

(1) 3 ফুট, 4 ফুট, 5 ফুট। (2) 5 সে. মি., 12 সে. মি., 13 সে. মি.

(3) 5 সে. মি., 6 সে. মি., 7 সে. মি. (4) 25 গজ, 35 গজ, 20 গজ।

11. কোন রম্বসের কর্ণদ্বয়ের দৈর্ঘ্য 10 ইঞ্চি ও 24 ইঞ্চি। উহার বাহুর দৈর্ঘ্য কত?

12. কোন সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি 5 ফুট এবং এক বাহু 6·5 ফুট; উহার উচ্চতা কত?

13. কোন সমবাহু ত্রিভুজের পরিসীমা 30 ফুট। উহার উন্নতি এবং ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

14. প্রমাণ কর, কোন বর্গক্ষেত্রের কর্ণের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র প্রদত্ত বর্গক্ষেত্রের দ্বিগুণ।

15. কোন আয়তক্ষেত্রের কর্ণদ্বয়ের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র দুইটির সমষ্টি বাহুগুলির উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের সমষ্টির সমান। The sum of the squares on the

diagonals of a rectangle is equal to the sum of the squares on its sides.

16. কোন সমকোণী ত্রিভুজের সূক্ষ্মকোণ হইতে অঙ্কিত মধ্যমা দুইটির উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টির চারিগুণ, উহার অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের পাঁচ গুণের সমান।

In a right-angled triangle prove that four times the sum of the squares on the medians from the acute angles, is equal to five times the square on the hypotenuse.

17. কোন সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষ হইতে ভূমির উপর পাতিত লম্বের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের চারিগুণ, উহার যে কোন বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের তিন গুণের সমান।
Prove that in an equilateral triangle four times the square on the perpendicular drawn from a vertex to the opposite side is equal to three times the square on any side. (C. U. 1933)

18. যে কোন P বিন্দুর সহিত ABCD আয়তক্ষেত্রের শীর্ষবিন্দু সমূহ যুক্ত করা হইল; প্রমাণ কর $PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$. (C. U. 1921)

19. ABC ত্রিভুজের মধ্যস্থিত যে কোন O-বিন্দু হইতে BC, CA, AB বাহুগুলির উপর যথাক্রমে OP, OQ, OR লম্ব টানা হইলে, প্রমাণ কর যে $AR^2 + BP^2 + CQ^2 = AQ^2 + CP^2 + BR^2$. (C. U. 1904)

23. সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রকে এমন দুই অংশে বিভক্ত কর যেন উক্ত অংশদ্বয় যথাক্রমে ত্রিভুজের অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের সমান হয়।

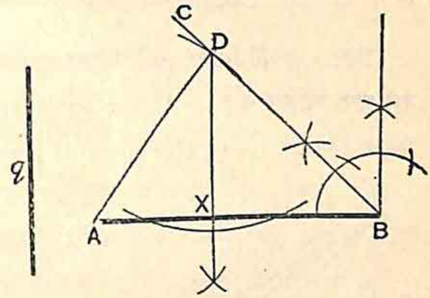
21. দুইটি নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের সমষ্টির সমান একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর। Draw a square equal in area to the sum of two given squares.

22. দুইটি নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের অন্তরের সমান একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর। Draw a square equal in area to the difference of two given squares.

23. কোন নির্দিষ্ট সরলরেখাকে এমন দুই অংশে বিভক্ত কর যেন একটি অংশের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র অপর অংশের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের (1) দ্বিগুণ ও (2) তিনগুণ হয়। Divide a straight line into two parts so that the square on one part may be (1) double and (2) triple the square on the other part. (C. U. '46, '49, B.S.E.' 57)

24. কোন নির্দিষ্ট সরলরেখাকে এমন দুই অংশে বিভক্ত কর যেন অংশ দুইটির উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টি কোন নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের সমান হয়।

Divide a straight line into two parts such that the sum of their squares may be equal to a given square.

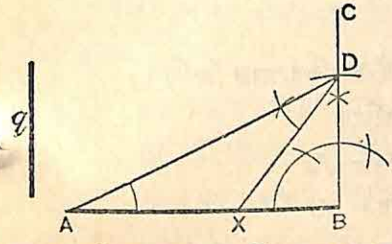


মনে কর AB নির্দিষ্ট সরলরেখা এবং q নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের বাহু। B-বিন্দুতে অর্ধ সমকোণের সমান ∠ABC অঙ্কিত কর। A-কে কেন্দ্র করিয়া q-ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কিত কর যাহা BC-কে D-বিন্দুতে ছেদ করে। D-বিন্দু হইতে AB-র উপর DX লম্ব টান। এখন, X নির্ণেয় বিন্দু হইল। AD যুক্ত কর।

∠XBD = অর্ধ সমকোণ, ∠DXB = এক সমকোণ, ∴ ∠XDB = অর্ধ সমকোণ;
∴ ∠XBD = ∠XDB, ∴ XD = XB.

$$\therefore \quad AX^2 + XB^2 = AX^2 + XD^2 = AD^2 = q^2.$$

25. কোন নির্দিষ্ট সরলরেখাকে এমন দুই অংশে বিভক্ত কর যেন অংশ দুইটির উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের অন্তর কোন নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের সমান হয়। Divide a straight line into two parts such that the difference of their squares may be equal to a given square.



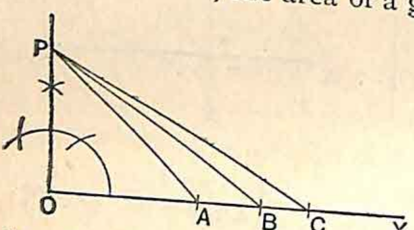
মনে কর AB নির্দিষ্ট সরলরেখা এবং q নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের বাহু। B-বিন্দুতে AB-র উপর BC লম্ব টান এবং BC হইতে q-এর সমান করিয়া BD অংশ কাটিয়া লও। AD যুক্ত কর। AD-র D-বিন্দুতে ∠BAD এর সমান করিয়া ∠ADX অঙ্কিত কর এবং মনে কর DX, AB-কে X-বিন্দুতে ছেদ করে। এখন X, নির্ণেয় বিন্দু হইল। ∠XAD = ∠XDA, ∴ AX = XD.

অতএব $AX^2 - XB^2 = XD^2 - XB^2 = DB^2 = q^2$.

26. ABC ত্রিভুজের ∠A সমকোণ। A হইতে BC-র উপর অঙ্কিত লম্বের দৈ
p হইলে, প্রমাণ কর যে, (1) $ap=bc$, (2) $\frac{1}{p^2}=\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$

27. ABC সমবাহু ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য a হইলে, প্রমাণ কর যে উহার উন্ন
$=\frac{\sqrt{3}}{2}a$ এবং ক্ষেত্রফল $=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

28. একটি নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের দ্বিগুণ, তিন গুণ, চারি গুণ ··· করি
বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর। Draw squares equal in area to twice, thric
four times ......, the area of a given square.



মনে কর, OP, OA নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রে
দুইটি সন্নিহিত বাহু। AP যুক্ত কর।

এখন $PA^2=OP^2+OA^2=2OP^2=$ নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের দ্বিগুণ।

OA-কে X-বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত কর এবং উহা হইতে PA-র সমান করিয়া OB কাটিয়া লও। PB যুক্ত কর।

এখন, $PB^2=OP^2+OB^2=OP^2+AP^2=OP^2+2OP^2=3OP^2=$ নির্দিষ্ট বর্গ-ক্ষেত্রের তিন গুণ।

এইরূপে, OX হইতে PB-র সমান করিয়া OC অংশ কাটিয়া PC যুক্ত করিলে, $PC^2=4\ OP^2$ হইবে, ইত্যাদি।

জ্যামিতিক প্রণালীতে $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$ ইত্যাদির মান নির্ণয়।

উপরের চিত্রে OP বা OA-কে দৈর্ঘ্যের একক ধরিলে

$PA^2=OP^2+OA^2=1^2+1^2=2$ $\quad\therefore\ PA=\sqrt{2}$

$PB^2=3OP^2=3.1^2=3$ $\quad\therefore\ PB=\sqrt{3}$

$PC^2=4OP^2=4.1^2=4$ $\quad\therefore\ PC=\sqrt{4}$; ইত্যাদি···

এখন, PA, PB, PC ইত্যাদির দৈর্ঘ্য-পরিমাণ দ্বারা $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$ ···ইত্যাদির মান সূচিত হইবে।

তৃতীয় অধ্যায়

সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা

রেখা, কোণ, ত্রিভুজ ও চতুর্ভুজ

(পুনরালোচনার জন্য)

1. পূর্বেই বলা হইয়াছে যে সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা অঙ্কন-মূলক। কিন্তু অঙ্কন-মূলক হইলেও সম্পাদ্য বিষয়টি শুদ্ধ হইল কিনা তাহা পরীক্ষা করিয়া দেখা প্রয়োজন। সুতরাং অঙ্কনের বিশুদ্ধতা পরীক্ষার জন্য প্রমাণের আবশ্যক। উপপাদ্য প্রতিজ্ঞায় যুক্তিদ্বারা সমর্থিত হইলেই প্রস্তাবিত বিষয়টি স্বীকার করিয়া লওয়া হয়, কিন্তু সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞায় অঙ্কনই মুখ্য অংশ বলিয়া কেবল যুক্তির উপর নির্ভর না করিয়া প্রকৃত মাপদ্বারাও অঙ্কনের বিশুদ্ধতা পরীক্ষা করা আবশ্যক।

সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞার প্রধানতঃ দুইটি অংশ—ইহার প্রথম অংশে অঙ্কন-প্রণালী বর্ণিত হয় এবং দ্বিতীয় অংশে থাকে প্রমাণ।

প্রমাণের সুবিধার জন্য মূল অঙ্কন ব্যতীত অন্যান্য রেখাদির অঙ্কনের প্রয়োজন হইতে পারে। মূল অঙ্কন হইতে পৃথক্ করিবার জন্য সেই রেখাগুলিকে সাধারণতঃ বিন্দুশ্রেণী (Dotted line) দ্বারা নির্দেশ করা হইয়াছে।

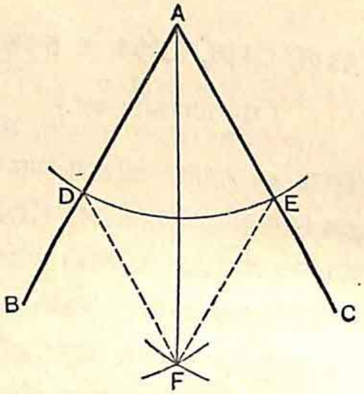
অঙ্কনক্রিয়ার জন্য একটি যন্ত্রবাক্সের প্রয়োজন। ইহাতে সাধারণতঃ নিম্নলিখিত যন্ত্রগুলি থাকে :—

1. একখানি মাপনী বা রুলার (Scale or Flat Ruler)।
2. দুইখানি ত্রিকোণী বা সেট্‌স্কোয়ার (Set-squares)।
3. একটি কাঁটা কম্পাস (Dividers)।
4. একটি পেন্সিল কম্পাস (A pair of Pencil Compasses)।
5. একখানি চাঁদা বা কোণচক্র (Semi-circular Protractor)। এতদ্ব্যতীত একখানি রবার, দুইটি পেন্সিল ও একখানি ছুরি রাখাও প্রয়োজন।

রেখা ও কোণ

সম্পাদ্য 1

একটি নির্দিষ্ট কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে।
(To bisect a given angle.)



BAC একটি নির্দিষ্ট কোণ।
ইহাকে সমান দুই অংশে বিভক্ত করিতে হইবে।

অঙ্কন। A-কে কেন্দ্র করিয়া এবং যে কোন ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কিত কর যেন ইহা AB ও AC-কে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করে।

D ও E-কে কেন্দ্র করিয়া এবং DE-ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি চাপ অঙ্কিত কর। মনে কর এই চাপ দুইটি পরস্পর F-বিন্দুতে ছেদ করিল। AF সংযুক্ত কর।

এক্ষণে, AF হইল BAC কোণের সমদ্বিখণ্ডক।

প্রমাণ। DF, EF সংযুক্ত কর।

ADF এবং AEF ত্রিভুজ দুইটিতে

AD = AE (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলিয়া)

DF = EF (সমান বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলিয়া)

AF সাধারণ বাহু।

$\therefore \triangle ADF \equiv \triangle AEF$

অতএব $\angle DAF = \angle EAF$

অর্থাৎ $\angle BAC$, AF দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত হইয়াছে।

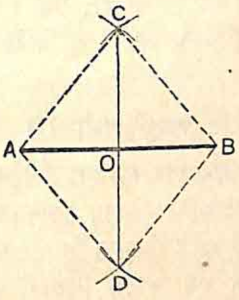
দ্রষ্টব্য। DE-কেই ব্যাসার্ধ লইতে হইবে এমন কোন নিয়ম নাই। এমন ব্যাসার্ধ লইতে হইবে যাহাতে চাপ দুইটি পরস্পর ছেদ করে। DE-র অর্ধেকের বেশী ব্যাসার্ধ লইয়া চাপ অঙ্কিত করিলে উহারা পরস্পর ছেদ করিবে।

মন্তব্য। প্রমাণদ্বারা কেবল অঙ্কন প্রণালীর যৌক্তিকতা বা বিশুদ্ধতাই প্রতিপন্ন হয়। প্রকৃত অঙ্কনের বিশুদ্ধতা নির্ণয়ের জন্য যথোপযুক্ত যন্ত্রের সাহায্যে পরিমাপ করা আবশ্যক। উল্লিখিত স্থলে চাঁদা দ্বারা মাপিয়া দেখ, BAF, CAF কোণদ্বয় সমান কিনা।

সম্পাদ্য 2

একটি নির্দিষ্ট সীমাবদ্ধ সরলরেখাকে সমদ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে।

[To bisect a given finite straight line.]



AB একটি নির্দিষ্ট সীমাবদ্ধ সরলরেখা।

ইহাকে সমদ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। A-বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া এবং AB-র অর্ধ অপেক্ষা বড় যে কোন ব্যাসার্ধ লইয়া AB সরলরেখার উভয়পার্শ্বে দুইটি চাপ অঙ্কিত কর।

আবার B-বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া এবং পূর্ব ব্যাসার্ধ লইয়া AB সরলরেখার উভয় পার্শ্বে এমন দুইটি চাপ অঙ্কিত কর যেন উহারা পূর্ব অঙ্কিত চাপ দুইটিকে যথাক্রমে C ও D বিন্দুতে ছেদ করে।

CD যুক্ত কর; ইহা যেন AB-কে O-বিন্দুতে ছেদ করিল।

এক্ষণে, AB সরলরেখা O-বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হইল।

প্রমাণ। AC, AD, BC, BD যুক্ত কর।

ACD এবং BCD ত্রিভুজে,

$\left.\begin{array}{l} AC = BC \\ AD = BD \end{array}\right\}$ সমান বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলিয়া

CD উভয়ের সাধারণ বাহু।

$\therefore \triangle ACD \equiv \triangle BCD$, অতএব $\angle ACD = \angle BCD$ অর্থাৎ $\angle ACO = \angle BCO$

আবার ACO এবং BCO ত্রিভুজে,

$AC = BC$, CO সাধারণ, এবং $\angle ACO = \angle BCO$

অতএব $\triangle ACO \equiv \triangle BCO$, $\therefore OA = OB$.

অর্থাৎ AB সরলরেখা O-বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হইয়াছে।

দ্রষ্টব্য। AOC, BOC, ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হওয়ার ফলে $\angle AOC = \angle BOC$। এই দুইটি সন্নিহিত কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ বলিয়া প্রত্যেকটিই সমকোণ, অর্থাৎ CO সরলরেখা AB সরলরেখার উপর লম্ব। সুতরাং উক্ত সম্পাদ্যের অঙ্কন-প্রণালী অবলম্বনে কোন নির্দিষ্ট সরলরেখার মধ্যবিন্দুতে লম্ব (বা নির্দিষ্ট সরলরেখার লম্বদ্বিখণ্ডক) অঙ্কন করা যায়।

অনুশীলনী 10

1. চাঁদার সাহায্যে একটি সমকোণ আঁকিয়া উহাকে সমদ্বিখণ্ডিত কর।

2. যে কোন ত্রিভুজ অঙ্কিত করিয়া উহার কোণত্রয়কে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়া দেখাও যে কোণত্রয়ের সমদ্বিখণ্ডক তিনটি একই বিন্দুতে মিলিত হয়।

3. একটি কোণকে এমন দুই ভাগে বিভক্ত কর যেন এক ভাগ অপর ভাগের তিনগুণ হয়।

4. একটি সূক্ষ্মকোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক ও বহির্দ্বিখণ্ডক অঙ্কিত কর; চাঁদা দ্বারা দ্বিখণ্ডকদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণের পরিমাণ নির্ণয় কর।

5. একটি 5″ ইঞ্চি সরলরেখাকে 4 ও 8 সমান ভাগে বিভক্ত কর।

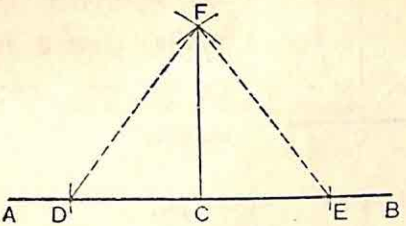
6. একটি সরলরেখাকে এমন দুই ভাগে বিভক্ত কর যেন এক ভাগ অপর ভাগের তিন গুণ হয়।

7. একটি ত্রিভুজের তিন বাহুর তিনটি লম্বদ্বিখণ্ডক অঙ্কিত কর। উহারা এক বিন্দুতে মিলিত হয় কিনা দেখ।

8. একটি ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষবিন্দু হইতে তিনটি মধ্যমা অঙ্কিত কর। মধ্যমাতিনটি এক বিন্দুতে মিলিত হয় কিনা দেখ।

সম্পাদ্য 3

কোন নির্দিষ্ট সরলরেখার উপরিস্থিত কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে উহার উপর একটি লম্ব টানিতে হইবে। [To draw a straight line perpendicular to a given straight line from a given point in it.]



AB একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা এবং C উহার উপরিস্থিত একটি নির্দিষ্ট বিন্দু।

C-বিন্দুতে AB-র উপর একটি লম্ব টানিতে হইবে।

অঙ্কন। C-বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া এবং যে কোন ব্যাসার্ধ লইয়া এমন দুইটি চাপ অঙ্কিত কর যাহারা AB-কে D ও E বিন্দুতে ছেদ করে।

D ও E বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া এবং প্রত্যেক ক্ষেত্রে DE-র অর্ধ অপেক্ষা বড় যে কোন ব্যাসার্ধ লইয়া AB সরলরেখার একই পার্শ্বে এমন দুইটি চাপ অঙ্কিত কর যাহারা F-বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করে।

CF যুক্ত কর। তাহা হইলে CF, AB-র উপর লম্ব হইল।

প্রমাণ। DF, EF যুক্ত কর। DCF, ECF ত্রিভুজে,

$DC = EC$, $DF = EF$, CF সাধারণ বাহু ;

অতএব $\triangle DCF \equiv \triangle ECF$,

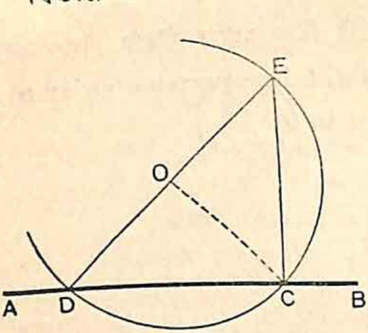
$\therefore \quad \angle DCF = \angle ECF$

এবং এই দুইটি সন্নিহিত কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ বলিয়া প্রত্যেকেই সমকোণ।

অর্থাৎ CF, AB-র উপর C-বিন্দুতে লম্ব।

দ্রষ্টব্য। C-বিন্দুটি AB সরলরেখার এক প্রান্তে অবস্থিত হইলে AB সরলরেখাকে C-র দিকে বর্ধিত করিয়া লইবে।

দ্বিতীয় প্রণালী। AB সরলরেখার বহির্দেশে যে কোন বিন্দু O লও। O-কে কেন্দ্র করিয়া এবং OC-ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। মনে কর এই বৃত্ত AB-কে D-বিন্দুতে ছেদ করিল। DO যুক্ত কর এবং DO সরলরেখাকে বর্ধিত করিয়া বৃত্তের পরিধির সহিত E বিন্দুতে ছেদ করাও। CE যুক্ত কর। এক্ষণে, CE, AB-র উপর লম্ব হইল।

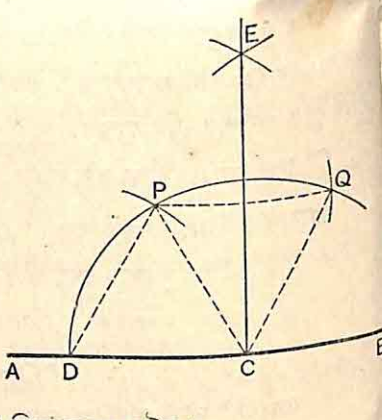


প্রমাণ। OC যুক্ত কর। OD = OC, ∴ ∠OCD = ∠ODC

আবার OE = OC, ∴ ∠OCE = ∠OEC

∴ ∠DCE = ∠OCD + ∠OCE = ∠EDC + ∠DEC = দুই সমকোণের অর্ধ = এক সমকোণ। ∴ CE, AB-র উপর C-বিন্দুতে লম্ব।

তৃতীয় প্রণালী। C-কে কেন্দ্র করিয়া যে কোন ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কিত কর যেন ইহা AB-কে D-বিন্দুতে ছেদ করে। D-কে কেন্দ্র করিয়া পূর্ব ব্যাসার্ধ লইয়া ঐ চাপকে P বিন্দুতে, এবং P-কে কেন্দ্র করিয়া পূর্ব ব্যাসার্ধ লইয়া ঐ চাপকে পুনরায় Q-বিন্দুতে ছেদ কর। P ও Q-বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া পূর্বোক্ত ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি চাপ অঙ্কিত কর যেন উহারা পরস্পর E বিন্দুতে ছেদ করে। CE যুক্ত কর।



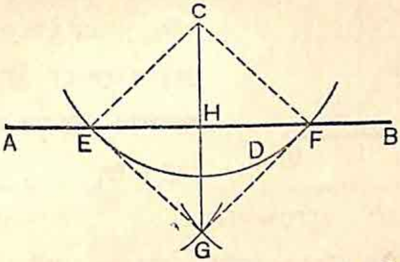
তাহা হইলে CE, AB-র উপর C-বিন্দুতে লম্ব হইল।

প্রমাণ। PD, PC, PQ, CQ যুক্ত কর। ∠DCP = ∠PCQ = $60°$ (সমবাহু ত্রিভুজের কোণ বলিয়া)। CE, PCQ কোণের সমদ্বিখণ্ডক। সুতরাং ∠PCE = $30°$

∴ ∠DCE = $60° + 30° = 90°$। অর্থাৎ CE, AB-র উপর লম্ব।

সম্পাদ্য 4

একটি সরলরেখার বহিঃস্থ কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে উহার উপর একটি লম্ব টানিতে হইবে। [To draw a straight line perpendicular to a given straight line from a given point outside it.]



AB একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা এবং C উহার বহিঃস্থ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু।

C হইতে AB-র উপর একটি লম্ব টানিতে হইবে।

অঙ্কন। AB-র যে পার্শ্বে C আছে তাহার বিপরীত পার্শ্বে D একটি বিন্দু লও। C-কে কেন্দ্র করিয়া এবং CD-ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কিত কর। ঐ চাপ যেন AB-কে E ও F বিন্দুতে ছেদ করিল।

এখন E ও F-কে কেন্দ্র করিয়া এবং প্রতি ক্ষেত্রে EF-এর অর্ধ অপেক্ষা বড় যে কোন ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি চাপ AB-র যে দিকে C আছে উহার বিপরীত দিকে এমনভাবে অঙ্কিত কর যেন উহারা G-বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করে।

CG যুক্ত কর। CG সরলরেখা যেন AB-কে H-বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

তাহা হইলে CH, AB-র উপর লম্ব হইল।

প্রমাণ। CE, CF, GE, GF যুক্ত কর।

CEG এবং CFG ত্রিভুজে, CE = CF, GE = GF, CG সাধারণ।

অতএব $\triangle$ CEG $\equiv$ $\triangle$ CFG. $\therefore$ $\angle$ECG = $\angle$FCG.

অর্থাৎ $\angle$ECH = $\angle$FCH

আবার, CEH এবং CFH ত্রিভুজে,

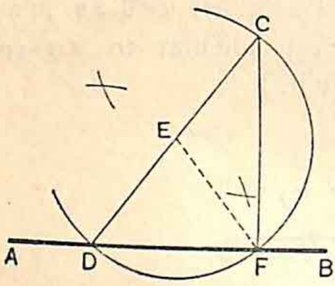
CE = CF, CH সাধারণ বাহু এবং $\angle$ECH = $\angle$FCH.

$\therefore$ $\triangle$CEH $\equiv$ $\triangle$CFH. $\therefore$ $\angle$CHE = $\angle$CHF.

এই দুইটি সন্নিহিত কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ বলিয়া প্রত্যেকেই সমকোণ।

অতএব CH, AB-র উপর লম্ব।

দ্বিতীয় প্রণালী। AB সরলরেখার উপর D একটি বিন্দু লও। DC যুক্ত কর। DC-কে E-বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত কর। E-কে কেন্দ্র করিয়া এবং EC-ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কিত কর। এই চাপ যেন AB-কে F-বিন্দুতে ছেদ করিল। CF যুক্ত কর।



তাহা হইলে CF, AB-র উপর লম্ব হইল।

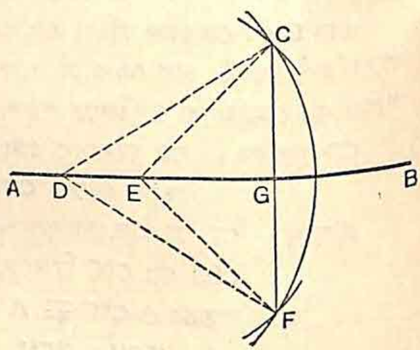
প্রমাণ। EF যুক্ত কর।

ED = EF, $\therefore$ ∠EFD = ∠EDF

আবার EC = EF, $\therefore$ ∠EFC = ∠ECF.

$\therefore$ ∠DFC = ∠EFD + ∠EFC = ∠CDF + ∠DCF = দুই সমকোণের অর্ধ = এক সমকোণ। অতএব, CF, AB-র উপর লম্ব।

তৃতীয় প্রণালী। AB-র উপর D ও E যে কোন দুইটি বিন্দু লও। D-কে কেন্দ্র করিয়া ও DC ব্যাসার্ধ লইয়া AB-র যে দিকে C আছে তাহার বিপরীত দিকে একটি চাপ অঙ্কিত কর। আবার E-কে কেন্দ্র করিয়া EC-ব্যাসার্ধ লইয়া আর একটি চাপ অঙ্কিত কর যেন উহা পূর্ব অঙ্কিত চাপকে F-বিন্দুতে ছেদ করে।



CF যুক্ত কর। CF যেন AB-কে G-বিন্দুতে ছেদ করিল। তাহা হইলে CG, AB-র উপর লম্ব হইল।

প্রমাণ। △DEC ≡ △DEF,

যেহেতু DC = DF, EC = EF, DE সাধারণ।

$\therefore$ ∠CDE = ∠FDE অর্থাৎ ∠CDG = ∠FDG

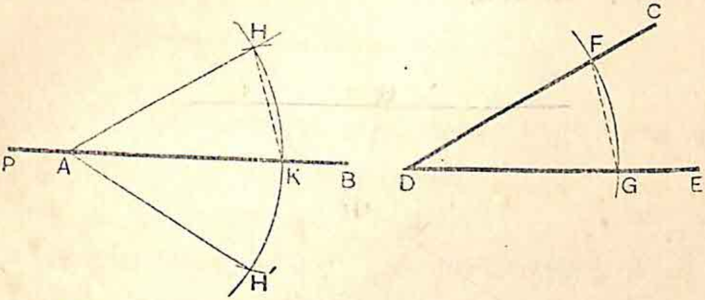
আবার, △CDG ≡ △FDG,

যেহেতু DC = DF, DG সাধারণ এবং ∠CDG = ∠FDG

$\therefore$ ∠CGD = ∠FGD = এক সমকোণ (সন্নিহিত কোণ দুইটির সমষ্টি দুই সমকোণ বলিয়া)। অতএব CG, AB-র উপর লম্ব।

সম্পাদ্য 5

একটি সরলরেখার কোন নির্দিষ্ট বিন্দুতে একটি নির্দিষ্ট কোণের সমান একটি কোণ অঙ্কন করিতে হইবে। [At a given point in a given straight line to make an angle equal to a given angle.]



PB একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা, A উহার উপরিস্থিত একটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং CDE একটি নির্দিষ্ট কোণ।

PB সরলরেখার A-বিন্দুতে CDE কোণের সমান একটি কোণ অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। D-কে কেন্দ্র করিয়া এবং যে কোন ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কিত কর যেন উহা DC-কে F-বিন্দুতে এবং DE-কে G-বিন্দুতে ছেদ করে।

A-কে কেন্দ্র করিয়া DG-ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কিত কর যেন উহা AB-কে K-বিন্দুতে ছেদ করে।

K-বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া FG ব্যাসার্ধ লইয়া আর একটি চাপ অঙ্কিত কর যেন উহা পূর্ব চাপটিকে H-বিন্দুতে ছেদ করে। AH যুক্ত কর।

তাহা হইলে, HAK অভীষ্ট কোণ হইল।

প্রমাণ। FG ও HK যুক্ত কর।

AKH এবং DGF ত্রিভুজে

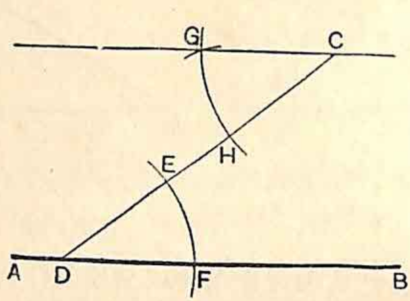
$AK = DG$, $AH = DF$, এবং $HK = FG$,

$\therefore$ $\triangle AKH \equiv \triangle DGF$, অতএব $\angle HAK = \angle FDG = \angle CDE$.

দ্রষ্টব্য। AB সরলরেখার যে কোন পার্শ্বেই অভীষ্ট কোণটি অঙ্কিত করা যায়। H′AK কোণও অভীষ্ট কোণ হইতে পারে।

সম্পাদ্য 6

কোন নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া কোন নির্দিষ্ট সরলরেখার সমান্তরাল একটি সরলরেখা টানিতে হইবে। [Through a given point to draw a straight line parallel to a given straight line.]



AB একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা এবং C উহার বহিঃস্থ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু।

C বিন্দু দিয়া AB-র সমান্তরাল একটি সরলরেখা টানিতে হইবে।

অঙ্কন। AB-র উপর যে কোন এক বিন্দু D লও এবং CD যুক্ত কর।

CD সরলরেখার C-বিন্দুতে CDB কোণের সমান এবং উহার একান্তর DCG কোণ অঙ্কিত কর।

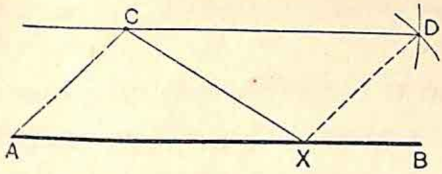
তাহা হইলে CG সরলরেখা AB-র সমান্তরাল হইল।

প্রমাণ। CD সরলরেখা AB ও CG-সরলরেখার সহিত মিলিত হইয়া CDB এবং DCG দুইটি পরস্পর সমান একান্তর কোণ উৎপন্ন করিয়াছে।

∴ AB ও CG সমান্তরাল।

দ্রষ্টব্য। অনুরূপ কোণের সাহায্যেও সমান্তরাল সরলরেখা টানা যাইতে পারে।

দ্বিতীয় প্রণালী। AB সরলরেখার উপর X একটি বিন্দু লও। C-কে কেন্দ্র করিয়া AX-ব্যাসার্ধ লইয়া এবং X-কে কেন্দ্র করিয়া AC ব্যাসার্ধ লইয়া AB-র যে পার্শ্বে



C আছে সেই পার্শ্বে দুইটি চাপ অঙ্কিত কর যেন উহারা D-বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করে। CD যুক্ত কর। এক্ষণে CD, AB-র সমান্তরাল হইল।

প্রমাণ। AC, CX, XD যুক্ত কর।

ACX এবং CXD ত্রিভুজে, AC = XD, AX = CD, CX সাধারণ,

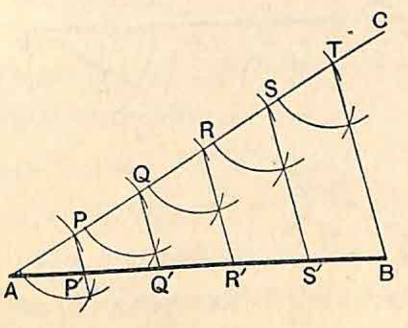
∴ ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম ; অতএব ∠AXC = ∠XCD.

ইহারা একান্তর কোণ বলিয়া AB ও CD সমান্তরাল।

সম্পাদ্য 7

একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে কতিপয় সমান অংশে বিভক্ত করিতে হইবে।

[To divide a given straight line into any number of equal parts.]



AB একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা।

ইহাকে কতিপয় সমান অংশে (মনে কর পাঁচ অংশে) বিভক্ত করিতে হইবে।

অঙ্কন। AB-র সহিত যে কোন কোণ করিয়া AC সরলরেখা টান।

AC হইতে যে কোন দৈর্ঘ্যের পাঁচটি সমান অংশ AP, PQ, QR, RS, ST পর পর কাটিয়া লও।

TB যুক্ত কর।

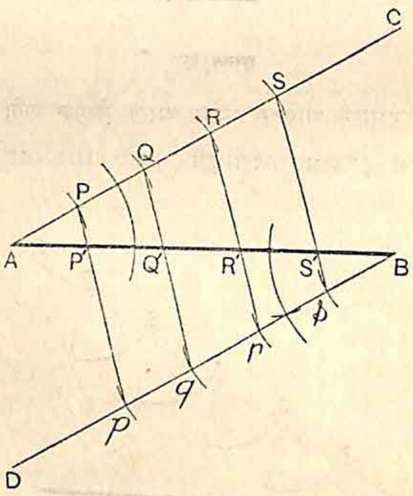
S, R, Q, P বিন্দু দিয়া TB-র সমান্তরাল করিয়া চারিটি সরলরেখা টান। মনে কর এই সরলরেখাগুলি BA-কে যথাক্রমে S′, R′, Q′, P′ বিন্দুতে ছেদ করিল।

তাহা হইলে AB সরলরেখা P′, Q′, R′, S′, বিন্দুসমূহে পাঁচটি সমান অংশে বিভক্ত হইল।

প্রমাণ। ABT ত্রিভুজে PP′, QQ′, RR′, SS′, TB সরলরেখাগুলি পরস্পর সমান্তরাল এবং যেহেতু AP = PQ = QR = RS = ST,

$\therefore$ AP′ = P′Q′ = Q′R′ = R′S′ = S′B.

দ্বিতীয় প্রণালী। AB সরলরেখার সহিত যে কোন কোণ করিয়া AC সরলরেখা টান। AC-র সমান্তরাল করিয়া BD সরলরেখা টান।



AC হইতে যে কোন দৈর্ঘ্যের চারিটি সমান অংশ AP, PQ, QR, RS কাটিয়া লও।

BD হইতে AC-র অংশগুলির সমান করিয়া Bs, sr, rq, qp চারিটি অংশ কাটিয়া লও।

Pp, Qq, Rr, Ss যুক্ত কর। মনে কর এই সরলরেখাগুলি AB-কে যথাক্রমে P′, Q′, R′, S′ বিন্দুতে ছেদ করিল।

তাহা হইলে AB সরলরেখা P′, Q′, R′, S′ বিন্দুসমূহে পাঁচটি সমান অংশে বিভক্ত হইল।

প্রমাণ। PQ ও pq সমান ও সমান্তরাল (অঙ্কন); $\therefore Pp \parallel Qq$.

সেইরূপ, $Qq \parallel Rr \parallel Ss$.

তাহা হইলে Pp, Qq, Rr এবং Ss পরস্পর সমান্তরাল।

এখন, যেহেতু $AP = PQ = QR = RS$, $\therefore AP' = P'Q' = Q'R' = R'S'$

আবার, যেহেতু $Bs = sr = rq = qp$, $\therefore BS' = S'R' = R'Q' = Q'P'$

$\therefore \quad AP' = P'Q' = Q'R' = R'S' = S'B.$

অনুশীলনী 11

1. 3·5″ একটি সরলরেখাকে পাঁচ সমান অংশে বিভক্ত কর এবং মাপিয়া প্রত্যেক অংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

2. 6·3 সেন্টিমিটার একটি সরলরেখাকে সাত সমান অংশে বিভক্ত কর এবং মাপিয়া প্রত্যেক অংশের পরিমাণ নির্ণয় কর।

3. একটি সরলরেখা হইতে 3″ ব্যবধানে উহার সমান্তরাল আর একটি সরলরেখা অঙ্কিত কর।

4. AB সরলরেখার উপর এমন একটি বিন্দু P বাহির কর যাহা AB-র একই পার্শ্বস্থ X, Y দুইটি বিন্দু হইতে সমদূরবর্তী।

5. AB সরলরেখার উপর এমন একটি বিন্দু C বাহির কর যাহা পরস্পরচ্ছেদী PQ, RS দুইটি সরলরেখা হইতে সমদূরবর্তী।

6. একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া একটি সরলরেখা টান, যাহার উপর অন্য দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে অঙ্কিত লম্বদ্বয় পরস্পর সমান হয়।

ত্রিভুজ

2. ত্রিভুজ অঙ্কনের ন্যূনতম প্রয়োজনীয় উপাত্ত—
প্রত্যেক ত্রিভুজের ছয়টি অঙ্গ—তিনটি বাহু, তিনটি কোণ। ইহাদের কতিপয় অঙ্গের পরিমাণ নির্দেশ করিয়া একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে বলা হয়। এখন অঙ্গের কথা বলিলে অঙ্গীর কথা স্বতঃই আমাদের মনে উদিত হয়, অর্থাৎ ঐ সমস্ত অঙ্গবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজের ছবি আমাদের কল্পনায় ভাসিয়া উঠে। ত্রিভুজের যে ছবিটি আমাদের কল্পনায় দেখা দেয়, আমাদের করণীয় ত্রিভুজটি হইবে সেই ছবিরই একটি প্রতিচ্ছবি। জ্যামিতির ভাষায় বলিতে গেলে করণীয় ত্রিভুজটি কল্পিত ত্রিভুজের সহিত সর্বতোভাবে সমান হওয়া আবশ্যক।

এখন দেখিতে হইবে দুইটি ত্রিভুজের কোন্ কোন্ অঙ্গের মধ্যে কিরূপ সম্বন্ধ থাকিলে উহারা সর্বতোভাবে সমান হয়। কোন কোন স্থলে প্রদত্ত অঙ্গ বা উপাত্ত (Data) দ্বারা প্রত্যক্ষভাবে দুইটি ত্রিভুজের সর্বসমতা প্রতিপন্ন করা নাও যাইতে পারে, সুতরাং করণীয় ত্রিভুজটি আপাততঃ দুরূহ বা অসম্ভব বলিয়া অনুমিত হইতে পারে, কিন্তু প্রদত্ত অঙ্গ হইতে যুক্তি দ্বারা এমন সব অঙ্গ নির্ণয় করা যাইতে পারে যাহা দ্বারা দুইটি ত্রিভুজের সর্বসমতা প্রতিপন্ন করা সহজসাধ্য।

দুইটি ত্রিভুজের সর্বসমতা বিষয়ক স্বীকৃত-সিদ্ধান্ত ও উপপাদ্য হইতে আমরা দেখিয়াছি যে—

(1) একের দুই বাহু ও অন্তর্ভূত কোণ অপরের দুই বাহু ও অন্তর্ভূত কোণের সমান হইলে, অথবা (2) একের তিন বাহু অপরের তিন বাহুর সমান হইলে, অথবা (3) একের দুই কোণ ও এক বাহু অপরের দুই কোণ ও অনুরূপ বাহুর সমান হইলে দুইটি ত্রিভুজ সর্বসম হয়।

সুতরাং, যদি উক্ত তিনটি অঙ্গ দেওয়া থাকে, অথবা নির্দিষ্ট অঙ্গ হইতে উক্ত প্রকার তিনটি অঙ্গ নির্ণয় করা সম্ভব হয়, তাহা হইলে প্রদত্ত অঙ্গ দ্বারা অভীষ্ট ত্রিভুজ অঙ্কন করা যায়। এতদপেক্ষা কম অঙ্গ দেওয়া থাকিলে কোন নির্দিষ্ট ত্রিভুজ অঙ্কন করা যায় না।

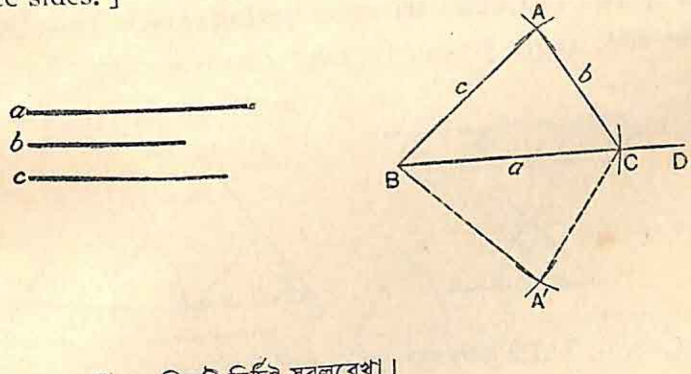
তিনটি কোণ দেওয়া থাকিলে অসংখ্য ত্রিভুজ অঙ্কিত হইতে পারে যাহারা পরস্পর সদৃশকোণী হইলেও পরস্পর সমান না হইতে পারে।

দুই বাহু ও উহাদের এক বাহুর বিপরীত কোণটি সূক্ষ্মকোণ হইলে দুইটি ত্রিভুজ অঙ্কিত হইতে পারে। ইহা ত্রিভুজ অঙ্কনের দ্ব্যর্থক ক্ষেত্র।

সংক্ষেপার্থে কেবল শীর্ষবিন্দুর পরিচায়ক অক্ষরটির দ্বারা সেই শীর্ষবিন্দুস্থ কোণটির নাম করা যাইতে পারে এবং ABC ত্রিভুজের ∠A, ∠B, ∠C-এর বিপরীত বাহুকে যথাক্রমে a, b ও c দ্বারা সূচিত করা যাইতে পারে।

সম্পাদ্য 8

তিন বাহুর দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে; উহাদের দ্বারা একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে। [To construct a triangle having given the lengths of the three sides.]



মনে কর a, b, c তিনটি নির্দিষ্ট সরলরেখা।

এমন একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে যাহার তিন বাহু a, b, c-র সমান।

অঙ্কন। BD একটি সরলরেখা লও।

উহা হইতে a-রেখার সমান করিয়া BC অংশ কাটিয়া লও। C-কে কেন্দ্র করিয়া b-ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কিত কর।

আবার B-কে কেন্দ্র করিয়া c-ব্যাসার্ধ লইয়া আর একটি চাপ অঙ্কিত কর।

মনে কর উক্ত চাপ দুইটি পরস্পর A-বিন্দুতে ছেদ করিল।

AB, AC যুক্ত কর।

তাহা হইলে, ABC অভীষ্ট ত্রিভুজ হইল।

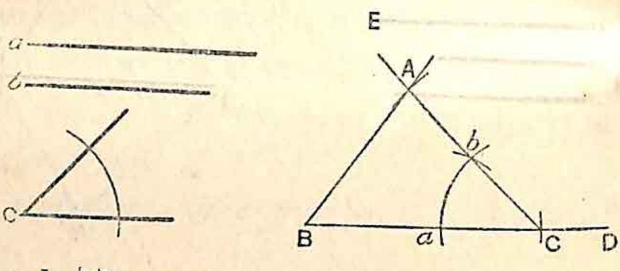
প্রমাণ। অঙ্কনানুযায়ী, ABC ত্রিভুজের BC $= a$, CA $= b$, AB $= c$.

দ্রষ্টব্য। (1) B ও C-কে কেন্দ্র করিয়া অঙ্কিত চাপ দুইটি BC সরলরেখার উভয় পার্শ্বেই ছেদ করিতে পারে। A′BCও অভীষ্ট ত্রিভুজ হইতে পারে।

(2) উপপাদ্য 15-এর সিদ্ধান্ত অনুসারে ত্রিভুজের দুই বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর। সুতরাং a, b, c-র যে কোন দুইটির সমষ্টি তৃতীয়টি অপেক্ষা বৃহত্তর না হইলে অঙ্কন অসম্ভব হইবে।

সম্পাদ্য 9

দুই বাহু এবং উহাদের অন্তর্ভূত কোণ দেওয়া আছে; ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে। [To construct a triangle having given two sides and the included angle.]



মনে কর, a, b দুইটি সরলরেখা এবং C একটি নির্দিষ্ট কোণ।

এমন একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে যাহার দুই বাহু যথাক্রমে a ও b-র সমান এবং উহাদের অন্তর্ভূত কোণটি C-কোণের সমান।

অঙ্কন। BD একটি সরলরেখা লও।

উহা হইতে a-র সমান BC অংশ কাটিয়া লও।

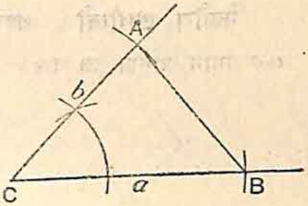
BC-সরলরেখার C-বিন্দুতে প্রদত্ত C-কোণের সমান করিয়া ∠BCE অঙ্কিত কর। CE হইতে b-র সমান করিয়া CA অংশ কাটিয়া লও।

AB যুক্ত কর।

এক্ষণে, ABC অভীষ্ট ত্রিভুজ হইল।

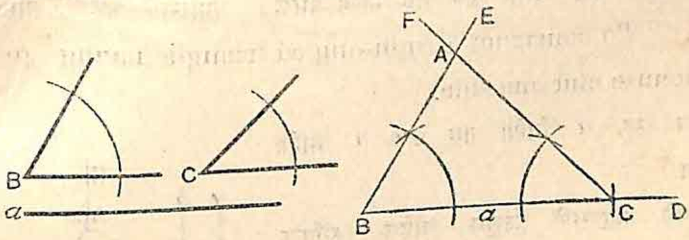
প্রমাণ। অঙ্কন অনুযায়ী, ABC ত্রিভুজে $BC = a$, $CA = b$, $\angle ACB =$ প্রদত্ত $\angle C$.

দ্বিতীয় প্রণালী। প্রদত্ত C-কোণের এক বাহু হইতে a-র সমান করিয়া CB অংশ, অপর বাহু হইতে b-র সমান করিয়া CA অংশ কাটিয়া লও। AB যুক্ত কর। তাহা হইলে ABC অভীষ্ট ত্রিভুজ হইবে। (প্রয়োজন হইলে C-কোণের উভয় বাহুই বর্ধিত করা যাইতে পারে।)



সম্পাদ্য 10

দুইটি কোণ এবং উহাদের সন্নিহিত সাধারণ বাহু নির্দিষ্ট আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে। [To construct a triangle having given two angles and the side adjacent to them.]



মনে কর, B, C, দুইটি কোণ এবং a একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা। এমন একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে যাহার একটি বাহু a-র সমান এবং তৎসন্নিহিত কোণদ্বয় যথাক্রমে $\angle B$ এবং $\angle C$-র সমান।

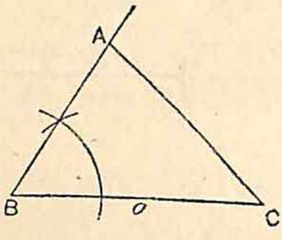
অঙ্কন। BD একটি সরলরেখা লও। উহা হইতে a-র সমান করিয়া BC অংশ কাটিয়া লও। B-বিন্দুতে প্রদত্ত B-কোণের সমান $\angle CBE$, এবং C-বিন্দুতে প্রদত্ত C-কোণের সমান $\angle BCF$ অঙ্কিত কর।

মনে কর, BE ও CF, A-বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিল।

তাহা হইলে, ABC অভীষ্ট ত্রিভুজ হইল।

প্রমাণ। অঙ্কন অনুসারে, ABC ত্রিভুজে ∠ABC = প্রদত্ত ∠B, ∠ACB = প্রদত্ত ∠C ; BC = a.

দ্বিতীয় প্রণালী। প্রদত্ত ∠C-র এক বাহু হইতে (প্রয়োজন হইলে বর্ধিত করিয়া) a-র সমান করিয়া CB লও।



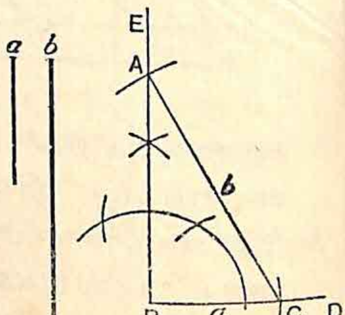
B-বিন্দুতে ∠B-র সমান ∠CBA অঙ্কিত কর। মনে কর BA, ∠C-র অপর বাহুকে A-বিন্দুতে ছেদ করিল। তাহা হইলে, ABC অভীষ্ট ত্রিভুজ হইল।

দ্রষ্টব্য। ∠B এবং ∠C-র সমষ্টি দুই সমকোণ অপেক্ষা ন্যূন হওয়া আবশ্যক।

সম্পাদ্য 11

অতিভুজ এবং অপর এক বাহু নির্দিষ্ট আছে। সমকোণী ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে। [To construct a right-angled triangle having given the hypotenuse and one side.]

মনে কর, a নির্দিষ্ট বাহু এবং b নির্দিষ্ট অতিভুজ।



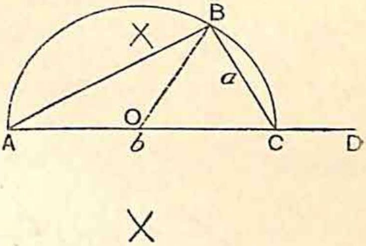
একটি সমকোণী ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। BD একটি সরলরেখা হইতে a-র সমান করিয়া BC অংশ কাটিয়া লও। B হইতে BC-র উপর BE লম্ব টান। C-কে কেন্দ্র করিয়া b-ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কিত কর যাহা BE সরলরেখাকে A-বিন্দুতে ছেদ করে। AC যুক্ত কর।

তাহা হইলে, ABC অভীষ্ট সমকোণী ত্রিভুজ হইল।

প্রমাণ। অঙ্কন অনুসারে, ∠B = সমকোণ, BC = a, অতিভুজ AC = b.

দ্বিতীয় প্রণালী। AD সরলরেখা হইতে b-র সমান করিয়া AC অংশ কাটিয়া লও। AC-কে O-বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত কর এবং O-কে কেন্দ্র করিয়া OA-ব্যাসার্ধ লইয়া AC-র উপর একটি অর্ধবৃত্ত অঙ্কিত কর।



C-কে কেন্দ্র করিয়া a-ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কিত কর যাহা অর্ধবৃত্তকে B-বিন্দুতে ছেদ করে। AB, BC যুক্ত কর। এক্ষণে, ABC অভীষ্ট সমকোণী ত্রিভুজ হইল।

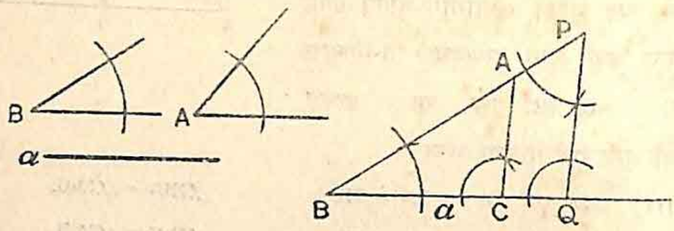
প্রমাণ। OB যুক্ত কর। $OA = OB$, $\therefore \angle OBA = \angle OAB$,

$OC = OB$ $\therefore \angle OBC = \angle OCB$

$\therefore$ সমগ্র $\angle ABC = \angle CAB + \angle ACB =$ এক সমকোণ, $BC = a$, অতিভুজ $AC = b$.

সম্পাদ্য 12

দুইটি কোণ এবং উহাদের একটি কোণের বিপরীত বাহু নির্দিষ্ট আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে। [To construct a triangle having given two angles and a side opposite to one of them.]



মনে কর B, A দুইটি নির্দিষ্ট কোণ এবং a একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা।

এমন একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে যাহার দুইটি কোণ B, A কোণের সমান এবং উহাদের যে কোন কোণের (ধর, ∠A-এর) সম্মুখীন বাহু a-সরলরেখার সমান হয়।

অঙ্কন। BPQ একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত কর যাহার $\angle PBQ = \angle B$ এবং $\angle BPQ = \angle A$.

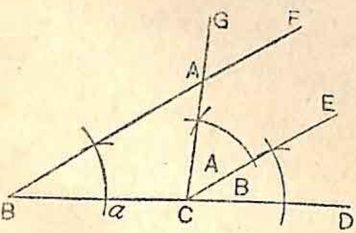
(1) যদি $BQ = a$ হয়, তাহা হইলে BPQ অভীষ্ট ত্রিভুজ হইবে।

(2) অন্যথায়, BQ হইতে (প্রয়োজন হইলে বর্ধিত করিয়া) a-র সমান করিয়া BC অংশ কাটিয়া লও।

QP-র সমান্তরাল করিয়া CA টান এবং মনে কর CA, BP বা বর্ধিত BP-কে A-বিন্দুতে ছেদ করে। তাহা হইলে, ABC অভীষ্ট ত্রিভুজ হইল।

প্রমাণ। $\because AC \parallel PQ$, $\therefore \angle BAC = \angle P =$ প্রদত্ত ∠A.

এবং $\angle ABC =$ প্রদত্ত ∠B, $BC = a$. (অঙ্কন)



দ্বিতীয় প্রণালী। BD একটি সরলরেখা লও ; উহা হইতে a-র সমান করিয়া BC অংশ কাটিয়া লও।

BD সরলরেখার একই দিকে B ও C-বিন্দুতে ∠B-র সমান DBF, DCE দুইটি কোণ অঙ্কিত কর।

CE সরলরেখার C-বিন্দুতে CE-র সহিত ∠A কোণের সমান ∠ECG অঙ্কিত কর।
মনে কর, BF, CG পরস্পর A-বিন্দুতে ছেদ করিল।

তাহা হইলে, ABC অভীষ্ট ত্রিভুজ হইল।

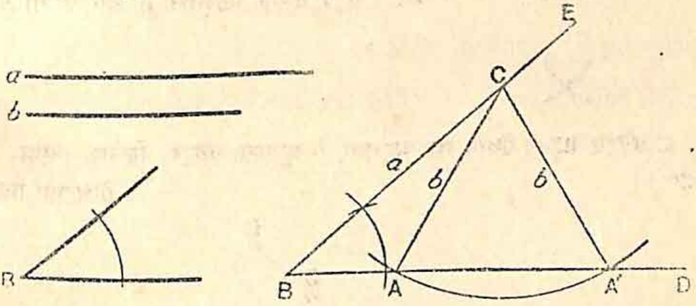
প্রমাণ। বহিঃ ∠DCE = বিপরীত অন্তঃ ∠DBF.

∴ BF ∥ CE. ∴ ∠CAB = একান্তর ∠ECA = প্রদত্ত ∠A.

অতএব, ABC ত্রিভুজে, ∠ABC = প্রদত্ত ∠B, ∠BAC = প্রদত্ত ∠A এবং ∠A-এর বিপরীত বাহু BC = a.

সম্পাদ্য 13

দুইটি বাহু এবং উহাদের এক বাহুর বিপরীত কোণ নির্দিষ্ট আছে; ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে। [To construct a triangle having given two sides and the angle opposite to one of them.]



মনে কর, a, b দুইটি নির্দিষ্ট সরলরেখা এবং B একটি নির্দিষ্ট কোণ।

এমন একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে যাহার একবাহু a-র সমান, একটি কোণ ∠B-র সমান এবং ∠B-এর বিপরীত বাহু b-র সমান।

অঙ্কন। BD একটি সরলরেখা লও এবং উহার B-বিন্দুতে ∠B-এর সমান ∠DBE অঙ্কিত কর।

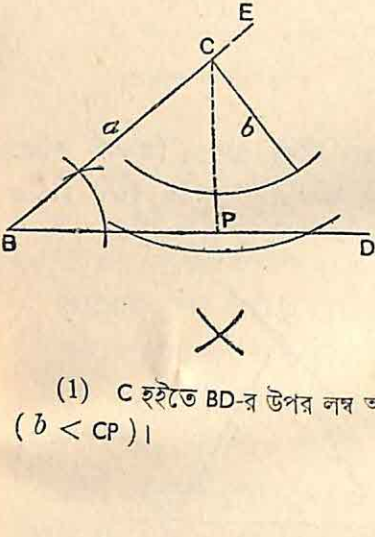
BE হইতে a-র সমান করিয়া BC অংশ কাটিয়া লও। C-কে কেন্দ্র করিয়া b-ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কিত কর। মনে কর, এই চাপ BD-কে A, A′ এই দুইটি বিন্দুতে ছেদ করিল। CA, CA′ যুক্ত কর।

তাহা হইলে ABC অথবা A′BC দুইটিই অভীষ্ট ত্রিভুজ হইল।

প্রমাণ। অঙ্কন অনুযায়ী উভয় ত্রিভুজে,

$BC = a$, CA (বা CA′) $= b$, ∠ABC (বা ∠A′BC) = প্রদত্ত ∠B

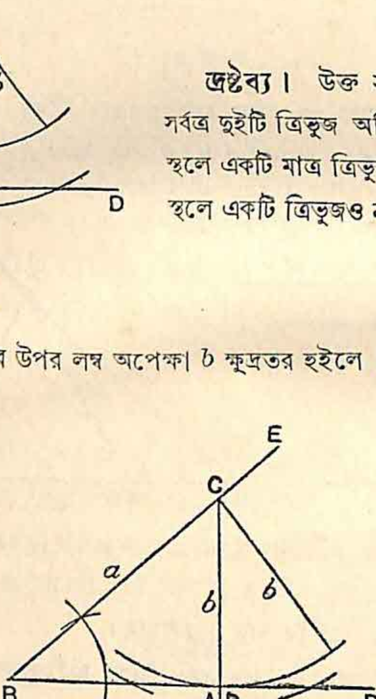
মন্তব্য। ABC, A′BC ত্রিভুজ দুইটি অসমান হইলেও উভয় স্থলেই প্রদত্ত শর্ত পালিত হইয়াছে। ইহা ত্রিভুজ অঙ্কনের একটি **দ্ব্যর্থক ক্ষেত্র** (Ambiguous case)। ∠B সমকোণ এবং a, b-র বৃহত্তরটি ∠B-এর সম্মুখীন বাহু হইলে একটি মাত্র ত্রিভুজ অঙ্কিত হইবে।



দ্রষ্টব্য। উক্ত সম্পাদ্যের উপাত্ত হইতে সর্বত্র দুইটি ত্রিভুজ অঙ্কিত হইবে না। কোন স্থলে একটি মাত্র ত্রিভুজ হইবে, আবার কোন স্থলে একটি ত্রিভুজও না হইতে পারে, যথা—

(1) C হইতে BD-র উপর লম্ব অপেক্ষা b ক্ষুদ্রতর হইলে ত্রিভুজ অঙ্কন অসম্ভব। ($b <$ CP)।

(উপরের চিত্র দেখ।)

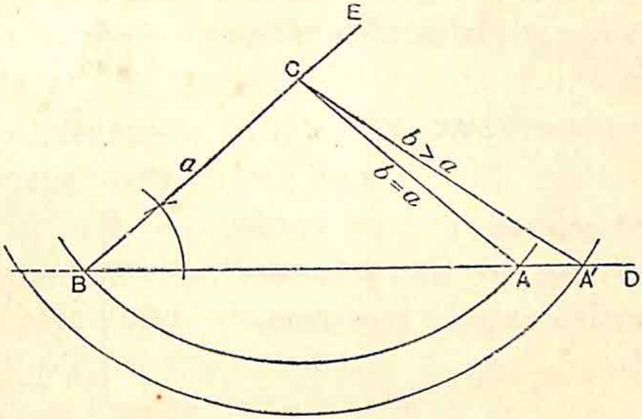


(2) C হইতে BD-র উপর লম্বের সমান b হইলে একটি মাত্র ত্রিভুজ সম্ভব। (b = CP)।

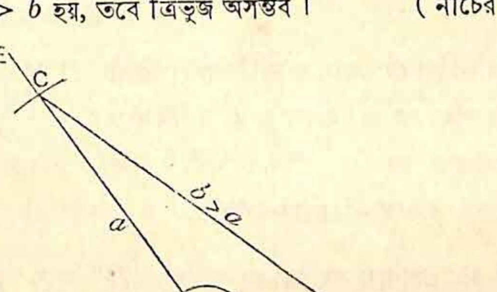
(উপরের চিত্র দেখ।)

(3) a, b সমান হইলে একটি মাত্র ত্রিভুজ সম্ভব, যদি ∠B সূক্ষ্মকোণ হয়। ($a=b$) (নীচের চিত্র দেখ।)

$b > a$ হইলেও একটি মাত্র ত্রিভুজ সম্ভব।



(4) ∠B স্থূলকোণ হইলে, যদি $b > a$ হয়, তবে একটি মাত্র ত্রিভুজ সম্ভব, কিন্তু যদি $a=b$ অথবা $a > b$ হয়, তবে ত্রিভুজ অসম্ভব। (নীচের চিত্র দেখ।)

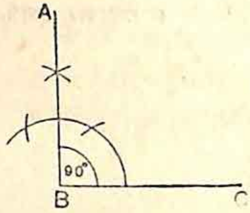


(5) $b < a$ কিন্তু > CP হইলে দুইটি ত্রিভুজ সম্ভব (দ্ব্যর্থক ক্ষেত্র)।
(মূল সম্পাদ্যের চিত্র এবং (1) দেখ।)

3. জ্যামিতিক প্রণালীতে বিবিধ কোণ অঙ্কন।

[$90°, 45°, 60°\ 30°, 15°, 135°, 120°, 150°, 165°$]

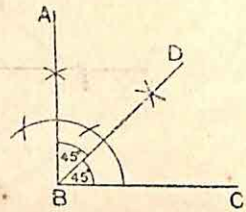
(1) $90°$ কোণ (বা সমকোণ) অঙ্কন।



BC একটি সরলরেখা লইয়া উহার উপর B-বিন্দুতে AB লম্ব অঙ্কিত কর।

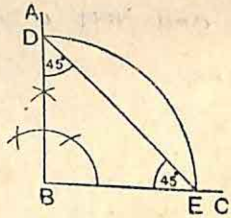
তাহা হইলে $\angle ABC = 90°$.

(2) $45°$ কোণ অঙ্কন।



একটি $90°$ কোণ ABC অঙ্কিত করিয়া উহাকে BD দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত কর। তাহা হইলে $\angle ABD = \angle DBC = 45°$.

দ্বিতীয় প্রণালী। একটি $90°$ কোণ ABC অঙ্কিত কর।



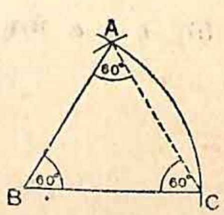
B-কে কেন্দ্র করিয়া যে কোন ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কিত কর যাহা AB ও BC-কে D ও E বিন্দুতে ছেদ করে। DE যুক্ত কর।

তাহা হইলে $\angle BDE = \angle BED = 45°$.

দ্রষ্টব্য। $45°$ কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করিলে $22\frac{1}{2}°$ কোণ পাওয়া যাইবে।

(3) $60°$ কোণ অঙ্কন।

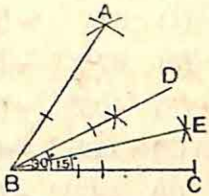
BC একটি সরলরেখা লও।



B ও C-কে কেন্দ্র করিয়া এবং BC-ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি চাপ অঙ্কিত কর যাহারা A-বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করে। AB ও AC যুক্ত কর।

তাহা হইলে $\angle A = \angle B = \angle C = 60°$.

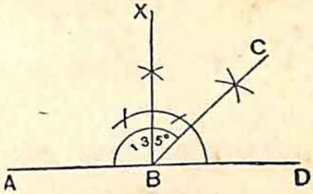
(4) 30° ও 15° কোণ অঙ্কন।



60° কোণকে সম-দ্বিখণ্ডিত করিলে 30° এবং 30° কোণকে সম-দ্বিখণ্ডিত করিলে 15° কোণ পাওয়া যাইবে। $\angle ABD = \angle DBC = 30°$; $\angle DBE = \angle EBC = 15°$.

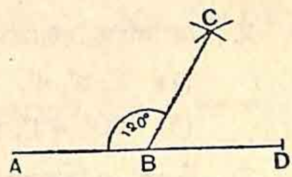
দ্রষ্টব্য। 15° কোণকে সম-দ্বিখণ্ডিত করিলে $7\frac{1}{2}°$ কোণ পাওয়া যাইবে।

(5) 135° কোণ অঙ্কন। $135° = 180° - 45°$ অথবা $90° + 45°$.



AD সরলরেখার অন্তর্গত যে কোন বিন্দু B হইতে, BX লম্ব অঙ্কিত কর। ∠XBD-কে BC সরলরেখা দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত কর। তাহা হইলে ∠ABC = সরল ∠ABD − ∠CBD, অথবা ∠ABX + ∠XBC = 180° − 45°, অথবা 90° + 45° = 135°.

(6) 120° কোণ অঙ্কন। $120° = 180° - 60°$.

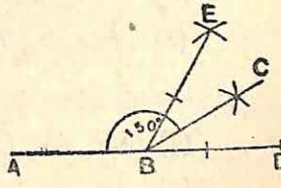


পূর্ববৎ ∠CBD = 60° অঙ্কিত কর।

DB-কে যে কোন বিন্দু A পর্যন্ত বর্ধিত কর।

তাহা হইলে, ∠ABC = সরল ∠ABD − ∠CBD
= 180° − 60° = 120°.

(7) 150° কোণ অঙ্কন। $150° = 180° - 30°$.

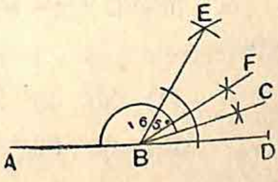


পূর্ববৎ ∠EBD = 60° অঙ্কিত কর।

∠EBD-কে BC দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত কর।

তাহা হইলে ∠ABC = সরল ∠ABD − ∠CBD
= 180° − 30° = 150°.

(8) 165° কোণ অঙ্কন। $165° = 180° - 15°$.



পূর্ববৎ ∠EBD = 60° অঙ্কিত কর।

∠EBD-কে BF দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত কর এবং ∠FBD-কে BC দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত কর। তাহা হইলে, ∠ABC = সরল ∠ABD − ∠CBD = 180° − 15° = 165°.

দ্রষ্টব্য। উক্ত অঙ্কন প্রণালীর সাহায্যে নিম্নলিখিত কোণগুলি অঙ্কন করা যায় :

(1) $37\frac{1}{2}^\circ = (30^\circ + 7\frac{1}{2}^\circ)$ (2) $52\frac{1}{2}^\circ = (30^\circ + 22\frac{1}{2}^\circ)$

(3) $67\frac{1}{2}^\circ = (60^\circ + 7\frac{1}{2}^\circ)$ (4) $82\frac{1}{2}^\circ = (60^\circ + 22\frac{1}{2}^\circ)$

(5) $105^\circ = (90^\circ + 15^\circ)$ (6) $97\frac{1}{2}^\circ = (90^\circ + 7\frac{1}{2}^\circ)$

(7) $112\frac{1}{2}^\circ = (90^\circ + 22\frac{1}{2}^\circ)$ (8) $127\frac{1}{2}^\circ = (120^\circ + 7\frac{1}{2}^\circ)$

(9) $142\frac{1}{2}^\circ = (120^\circ + 22\frac{1}{2}^\circ)$ (10) $157\frac{1}{2}^\circ = (150^\circ + 7\frac{1}{2}^\circ)$

(11) $172\frac{1}{2}^\circ = (150^\circ + 22\frac{1}{2}^\circ)$ (12) $187\frac{1}{2}^\circ = (165^\circ + 22\frac{1}{2}^\circ)$

অনুশীলনী 12

1. নিম্নলিখিত দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট বাহুগুলির উপর সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত কর :—
   2″, 4 সে. মি., 2·3″, 2·9″, 7·1 সে. মি., 6·5 সে. মি.

2. নিম্নলিখিত দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট বাহু লইয়া ত্রিভুজ অঙ্কিত কর :—
   (1) 2″, 3″, 4″. (2) 4″, 3″, 5″.
   (3) 2·3″, 4·1″, 5·2″ (4) 4 সে. মি., 3·8 সে. মি., 5·7 সে. মি.

3. ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর, যাহার দুই বাহু ও অন্তর্ভূত কোণের পরিমাণ :—
   (1) 2″, 3″, 45° (2) 2·3″, 3·1″, 90°.
   (3) 5 সে. মি., 7 সে. মি., 135°. (4) 4·8 সে. মি., 6·3 সে. মি., 60°.

4. ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর, যাহার দুই কোণ ও সন্নিহিত বাহুর পরিমাণ :—
   (1) 90°, 45°, 2″. (2) 60°, 30°, 2·2″.
   (3) 15°, $22\frac{1}{2}^\circ$, 7 সে. মি.

5. ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর, যাহার দুই কোণ ও প্রথমোক্ত কোণের বিপরীত বাহুর পরিমাণ :—
   (1) 30°, 45°, 3″ (2) 45°. 60°, 3·1″.
   (3) 60°, 30°, 5 সে. মি.

6. ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর, যাহার দুই বাহু এবং প্রথম বাহুর বিপরীত কোণের পরিমাণ :—

(1) 3″, 4″, 30°. (2) 2·1″, 3·3″, 60°.

(3) 5 সে. মি., 7 সে. মি., 45°.

7. সমকোণী ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর, যাহার অতিভুজ এবং অপর এক বাহুর পরিমাণ :—

(1) 5″, 3″. (2) 7·2 সে. মি., 4·3 সে. মি., (3) 4·7″, 2·9″.

8. ত্রিভুজের সাহায্যে 45°, 60° কোণ দুইটি অঙ্কিত কর।

9. দ্বিখণ্ডন প্রক্রিয়া দ্বারা ত্রিভুজ হইতে নিম্নলিখিত কোণগুলি অঙ্কিত কর :—

$30°$, $15°$, $22\frac{1}{2}°$, $52\frac{1}{2}°$.

10. যে কোন একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিয়া উহার সমান আর একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত কর।

11. কোন নির্দিষ্ট ভূমির উপর একটি সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত কর।

12. স্কেল ও কম্পাসের সাহায্যে একটি সমকোণকে সমান তিন অংশে ভাগ কর।

13. যে কোন একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত কর ; উহার সদৃশকোণী দুইটি ত্রিভুজ অঙ্কিত কর যাহার একটি ক্ষুদ্রতর আর একটি বৃহত্তর।

14. 2″ ভূমির উপর একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত কর, যাহার সমান সমান বাহুদ্বয়ের প্রত্যেকের দৈর্ঘ্য 3″.

15. ভূমি 3″, একবাহু 5″ ; সমদ্বিবাহু ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

16. ভূমি সংলগ্ন কোণদ্বয়ের সমষ্টি 135°, ভূমি 3″ ; সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত কর।

17. ভূমি 1·3″, অপর বাহুদ্বয়ের সমষ্টি 6·4″ ; সমদ্বিবাহু ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

18. অতিভুজ 4″ ও তৎসংলগ্ন একটি কোণ 30°, সমকোণী ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

19. অতিভুজ ও সমকোণ-বিন্দু হইতে উহার দূরত্ব দেওয়া আছে, সমকোণী ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

20. এমন একটি সমকোণী ত্রিভুজ অঙ্কিত কর যাহার সূক্ষ্মকোণ দুইটি 30° ও 60°.

21. ভূমি ও উন্নতি দেওয়া আছে ; সমদ্বিবাহু ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর। Draw an isosceles triangle having given the base and the altitude.

22. শিরঃকোণ এবং উন্নতি দেওয়া আছে, সমদ্বিবাহু ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর। Draw an isosceles triangle having given the vertical angle and the altitude.

23. শীর্ষবিন্দু হইতে ভূমির উপর লম্ব এবং অপর দুই বাহু দেওয়া আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর। Construct a triangle, having given two sides and the perpendicular from the vertex to the base.

24. ভূমিসংলগ্ন কোণদ্বয় এবং বিপরীত শীর্ষবিন্দু হইতে ভূমির উপর লম্ব দেওয়া আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর। Construct a triangle having given the angles at the base and the perpendicular from the vertex to the base.

(C. U. 1937)

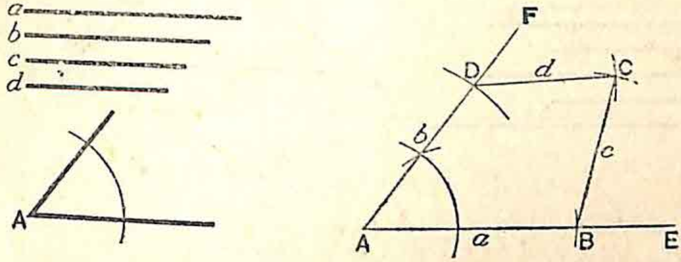
25. ভূমি এবং শিরঃকোণ দেওয়া আছে ; সমদ্বিবাহু ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর। Construct an isosceles triangle having given the base and the vertical angle.

26. একটি সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত কর যাহার পরিসীমা নির্দিষ্ট।

চতুর্ভুজ

সম্পাদ্য 14

চারিটি বাহুর দৈর্ঘ্য এবং একটি কোণ নির্দিষ্ট আছে ; চতুর্ভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে। [To construct a quadrilateral having given the lengths of four sides and one angle.]



মনে কর, a, b, c, d, চারিটি বাহুর দৈর্ঘ্য এবং a ও b বাহু দুইটির অন্তর্ভূত কোণ A।

চতুর্ভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। AE একটি সরলরেখা লও এবং উহা হইতে a-র সমান AB অংশ কাটিয়া লও।

AB সরলরেখার A-বিন্দুতে ∠A-র সমান করিয়া ∠BAF অঙ্কিত কর।

AF হইতে b-র সমান AD অংশ কাটিয়া লও।

B-কে কেন্দ্র করিয়া c-ব্যাসার্ধ লইয়া এবং D-কে কেন্দ্র করিয়া d-ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি চাপ অঙ্কিত কর যেন উহারা C-বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করে।

CB ও CD সংযুক্ত কর।

তাহা হইলে, ABCD অভীষ্ট চতুর্ভুজ হইল।

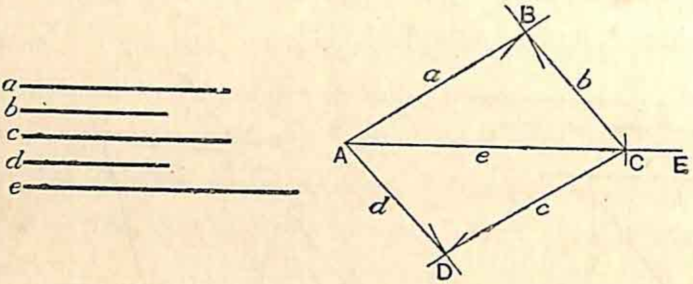
প্রমাণ। অঙ্কন অনুযায়ী AB $= a$, AD $= b$,

BC $= c$, DC $= d$,

a ও b-র অন্তর্ভূত কোণ = প্রদত্ত ∠A.

সম্পাদ্য 15

কোন চতুর্ভুজের চারিটি বাহু এবং একটি কর্ণ নির্দিষ্ট আছে; চতুর্ভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে। [To construct a quadrilateral, having given the lengths of the four sides and a diagonal.]



মনে কর, a, b, c, d, চারিটি বাহু এবং e একটি কর্ণ।

এমন একটি চতুর্ভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে যাহার বাহুগুলি a, b, c, d-র সমান এবং একটি কর্ণ e-র সমান।

অঙ্কন। AE একটি সরলরেখা লইয়া উহা হইতে e-র সমান AC অংশ কাটিয়া লও। A-কে কেন্দ্র করিয়া a-ব্যাসার্ধ লইয়া এবং C-কে কেন্দ্র করিয়া b-ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি চাপ অঙ্কিত কর যেন উহারা পরস্পর B-বিন্দুতে ছেদ করে।

আবার, C-কে কেন্দ্র করিয়া c-ব্যাসার্ধ লইয়া এবং A-কে কেন্দ্র করিয়া d-ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি চাপ অঙ্কিত কর, যেন উহারা, AC-র যে পার্শ্বে B আছে তাহার বিপরীত পার্শ্বে D-বিন্দুতে ছেদ করে।

AB, BC, CD, DA যুক্ত কর।

তাহা হইলে, ABCD অভীষ্ট চতুর্ভুজ হইল।

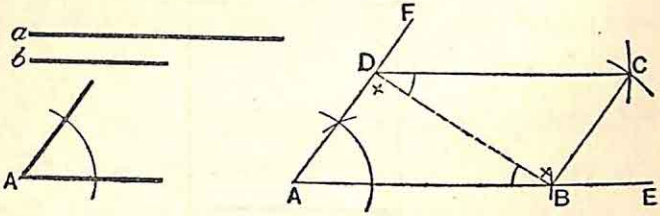
প্রমাণ। অঙ্কন অনুযায়ী, $AB = a$, $BC = b$,

$CD = c$, $DA = d$,

এবং কর্ণ $AC = e$.

সম্পাদ্য 16

কোন সামান্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহু এবং উহাদের অন্তর্ভূত কোণ নির্দিষ্ট আছে ; সামান্তরিকটি অঙ্কিত করিতে হইবে। [To construct a parallelogram, having given two adjacent sides and the angle included by them.]



মনে কর, a, b দুইটি নির্দিষ্ট সরলরেখা এবং A একটি নির্দিষ্ট কোণ।

এরূপ একটি সামান্তরিক অঙ্কিত করিতে হইবে যাহার দুইটি সন্নিহিত বাহু a ও b-র সমান এবং উহাদের অন্তর্ভুত কোণ, ∠A-র সমান।

অঙ্কন। AE একটি সরলরেখা লইয়া উহা হইতে a-র সমান করিয়া AB অংশ কাটিয়া লও।

AE রেখার A-বিন্দুতে ∠A-র সমান করিয়া ∠EAF অঙ্কিত কর।

AF হইতে b-র সমান করিয়া AD অংশ কাট।

D-কে কেন্দ্র করিয়া a-ব্যাসার্ধ লইয়া এবং B-কে কেন্দ্র করিয়া b-ব্যাসার্ধ লইয়া AB-র যে দিকে D আছে সেই দিকে দুইটি চাপ অঙ্কিত কর যেন উহারা C-বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করে।

BC, CD যুক্ত কর।

তাহা হইলে, ABCD অভীষ্ট সামান্তরিক হইল।

প্রমাণ। BD যুক্ত কর।

ABD ও BCD ত্রিভুজদ্বয়ে,

AB = DC, AD = BC, BD সাধারণ

∴ △ ABD ≡ △ BCD, ∴ ∠ABD = একান্তর ∠BDC, ∴ AB ∥ DC

এবং ∠ADB = একান্তর ∠DBC, ∴ AD ∥ BC.

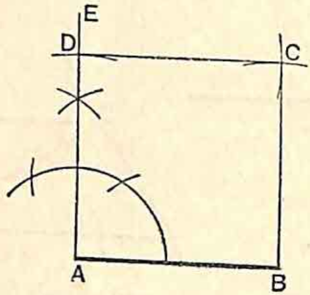
∴ ABCD একটি সামান্তরিক।

দ্রষ্টব্য। নির্দিষ্ট A-কোণটি সমকোণ হইলে ABCD একটি আয়তক্ষেত্র হইবে।

সম্পাদ্য 17

একটি নির্দিষ্ট বাহুর উপর একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To construct a square on a given side.]



AB একটি নির্দিষ্ট বাহু। ইহার উপর একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। AB সরলরেখার A-বিন্দুতে AE লম্ব টান।

AE হইতে AB-র সমান করিয়া AD অংশ কাটিয়া লও।

B ও D-কে কেন্দ্র করিয়া এবং AB-ব্যাসার্ধ লইয়া এমন দুইটি চাপ অঙ্কিত কর যেন উহারা পরস্পর C-বিন্দুতে ছেদ করে। BC, CD যুক্ত কর।

তাহা হইলে ABCD অভীষ্ট বর্গক্ষেত্র হইল।

প্রমাণ। BD যুক্ত করিয়া সম্পাদ্য 16-এর ন্যায় প্রমাণ করা যায় যে ABCD একটি সামান্তরিক যাহার বাহুগুলি পরস্পর সমান এবং একটি কোণ সমকোণ।

সুতরাং, ABCD একটি বর্গক্ষেত্র।

অনুশীলনী 13

1. 2·3″ দীর্ঘ বাহুর উপর একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর।
2. 5·5 সে. মি. দীর্ঘ বাহুর উপর একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর।
3. একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর যাহার পরিসীমা 4·8 ইঞ্চি।
4. 3″ কর্ণ-বিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর।

5. সামান্তরিকটি অঙ্কিত কর, যাহার সন্নিহিত বাহু ও অন্তর্ভূত কোণের পরিমাণ :—

(1) 3″, 1·2″, 30°. (2) 3·7″, 2·1″, 60°.

(3) 9 সে. মি., 4 সে. মি., 45°.

6. দুইটি কর্ণ ও এক বাহু দেওয়া আছে ; সামান্তরিকটি অঙ্কিত কর।

7. তিন বাহু ও দুই কর্ণ দেওয়া আছে, চতুর্ভুজটি অঙ্কিত কর।

8. তিন বাহু ও তাহাদের অন্তর্ভূত কোণ দুইটি দেওয়া আছে ; চতুর্ভুজটি অঙ্কিত কর।

9. AB, AD, ∠A, ∠B ও ∠D দেওয়া আছে ; ABCD চতুর্ভুজটি অঙ্কিত কর।

10. একটি বাহু ও একটি কোণ দেওয়া আছে ; রম্বসটি অঙ্কিত কর।

11. দুইটি সন্নিহিত বাহু দেওয়া আছে ; আয়তক্ষেত্রটি অঙ্কিত কর।

12. কর্ণ এবং এক বাহু দেওয়া আছে ; আয়তক্ষেত্রটি অঙ্কিত কর।

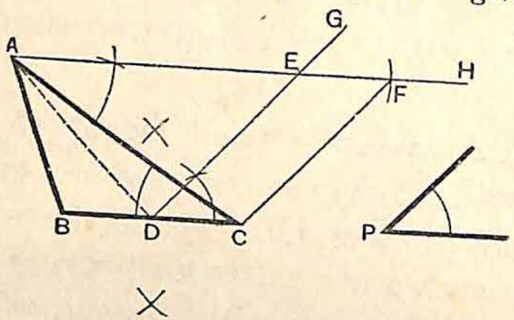
13. কোন নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর একটি রম্বস আঁক যাহার একটি কোণ 120°. মাপিয়া প্রমাণ কর যে রম্বসটির ক্ষুদ্রতর কর্ণ উহার বাহুর সমান।

14. AB সরলরেখার উপর একটি আয়তক্ষেত্র ABCD অঙ্কিত কর। ∠DAB কোণের সমদ্বিখণ্ডক AF টান যাহা DC কে F-বিন্দুতে ছেদ করে। FC-কে E পর্যন্ত বর্ধিত কর যেন FE, AB-র সমান হয়। EB যুক্ত কর। মাপিয়া প্রমাণ কর ABEF ক্ষেত্রের পরিসীমা, ABCD আয়তক্ষেত্রের পরিসীমা অপেক্ষা বৃহত্তর।

সম্পাদ্য 18

এমন একটি সামান্তরিক অঙ্কিত করিতে হইবে যাহার ক্ষেত্রফল একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের সমান এবং যাহার একটি কোণ কোন নির্দিষ্ট কোণের সমান।

[To construct a parallelogram equal in area to a given triangle and having one of its angles equal to a given angle.]



মনে কর ABC একটি ত্রিভুজ এবং P একটি নির্দিষ্ট কোণ।

এমন একটি সামান্তরিক অঙ্কিত করিতে হইবে যাহার ক্ষেত্রফল ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের সমান এবং একটি কোণ P-কোণের সমান।

অঙ্কন। BC-কে D-বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত কর। D-বিন্দুতে P-কোণের সমান করিয়া ∠CDG অঙ্কিত কর। A-বিন্দু দিয়া BC-র সমান্তরাল AH সরলরেখা টান যাহা DG-কে E-বিন্দুতে ছেদ করে। C-বিন্দু দিয়া DE-র সমান্তরাল CF অঙ্কিত কর (EH হইতে EF = DC কাট এবং CF যুক্ত কর।) যাহা AH-কে F-বিন্দুতে ছেদ করে।

এক্ষণে EDCF নির্ণেয় সামান্তরিক হইল।

প্রমাণ। AD যুক্ত কর। সামান্তরিক EDCF = 2△ADC, যেহেতু উহারা একই ভূমি DC-র উপর এবং একই সমান্তরাল যুগল DC, AF-এর মধ্যে অবস্থিত।

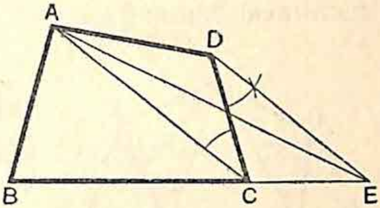
△ADC = △ADB, যেহেতু উভয়ই সমান ভূমির উপর অবস্থিত এবং একই উন্নতি বিশিষ্ট। ∴ △ABC = 2△ADC.

অতএব সামান্তরিক EDCF = △ABC এবং সামান্তরিকের ∠EDC = ∠P.

অনুসিদ্ধান্ত। একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি আয়তক্ষেত্র অঙ্কিত করিতে হইবে। [To construct a rectangle equal in area to a given triangle.]

সম্পাদ্য 19

কোন নির্দিষ্ট চতুর্ভুজের সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।
[To construct a triangle equal in area to a given quadrilateral.]



মনে কর ABCD একটি নির্দিষ্ট চতুর্ভুজ। উহার সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

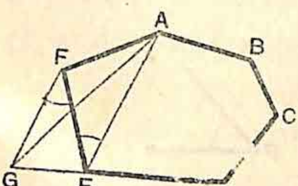
অঙ্কন। AC যুক্ত কর। D-বিন্দু দিয়া AC-র সমান্তরাল একটি সরলরেখা টান যাহা বর্ধিত BC-কে E-বিন্দুতে ছেদ করে। AE যুক্ত কর। এক্ষণে, ABE অভীষ্ট ত্রিভুজ হইল।

প্রমাণ। $\triangle EAC = \triangle DAC$, যেহেতু উহারা একই ভূমি AC-র উপর এবং একই সমান্তরাল যুগল AC, DE-র মধ্যে অবস্থিত।

$\therefore \quad \triangle ABE = \triangle ABC + \triangle ACE = \triangle ABC + \triangle ACD =$ চতুর্ভুজ ABCD.

অনুসিদ্ধান্ত। কোন নির্দিষ্ট ঋজুরেখ ক্ষেত্রের সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট এমন একটি ঋজুরেখ ক্ষেত্র অঙ্কিত করিতে হইবে যাহার বাহুসংখ্যা নির্দিষ্ট ঋজুরেখ ক্ষেত্রের বাহুসংখ্যা অপেক্ষা এক কম।

[To construct a rectilineal figure equal in area to a given rectilineal figure and having fewer sides by one than those of the given figure.]



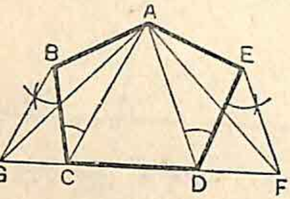
মনে কর ABCDEF ক্ষেত্রটির বাহু ছয়টি। ইহার সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি ঋজুরেখক্ষেত্র অঙ্কিত করিতে হইবে যাহার বাহু পাঁচটি।

অঙ্কন। AE যুক্ত কর। F-বিন্দু দিয়া AE-র সমান্তরাল একটি সরলরেখা টান যাহা বর্ধিত DE-কে G-বিন্দুতে ছেদ করে। AG যুক্ত কর। এখন ABCDG অভীষ্ট ঋজুরেখ ক্ষেত্র হইল।

প্রমাণ। $\triangle AGE = \triangle AFE$, $\therefore$ ABCDG ক্ষেত্র = ABCDE ক্ষেত্র + $\triangle AGE$ = ABCDE ক্ষেত্র + $\triangle AFE$ = ABCDEF ক্ষেত্র।

সম্পাদ্য 20

কোন নির্দিষ্ট ঋজুরেখ ক্ষেত্রের সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে। [To construct a triangle equal in area to a given rectilineal figure.]



পূর্বোক্ত অনুসিদ্ধান্ত অনুসারে পর পর অঙ্কন করিয়া নির্দিষ্ট ঋজুরেখ ক্ষেত্রের বাহুসংখ্যা কমাইতে কমাইতে উহাকে একটি ত্রিভুজে পরিণত কর।

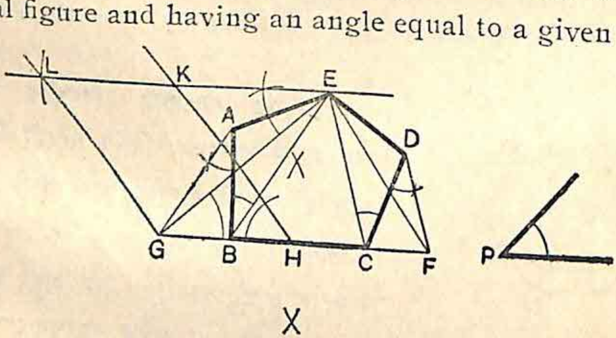
ABCDE একটি পাঁচ বাহু বিশিষ্ট ঋজুরেখ ক্ষেত্র। প্রথমে উহার একটি বাহু কমাইয়া উহাকে ABCF চতুর্ভুজে, অতঃপর আর একটি বাহু কমাইয়া AGF ত্রিভুজে পরিণত করা হইয়াছে।

(প্রমাণ সম্পাদ্য 19-এর অনুরূপ।)

সম্পাদ্য 21

এমন একটি সামান্তরিক অঙ্কিত করিতে হইবে যাহার ক্ষেত্রফল একটি নির্দিষ্ট ঋজুরেখ ক্ষেত্রের সমান এবং যাহার একটি কোণ কোন নির্দিষ্ট কোণের সমান।

[To construct a parallelogram equal in area to a given rectilineal figure and having an angle equal to a given angle.]



মনে কর ABCDE একটি নির্দিষ্ট ঋজুরেজ ক্ষেত্র এবং P একটি নির্দিষ্ট কোণ। এমন একটি সামান্তরিক অঙ্কিত করিতে হইবে যাহার ক্ষেত্রফল ABCDE ঋজুরেখ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান এবং যাহার একটি কোণ ∠P-এর সমান।

অঙ্কন। ABCDE ঋজুরেখ ক্ষেত্রের সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট EGF ত্রিভুজ অঙ্কিত কর। EGF ত্রিভুজের সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট GHKL সামান্তরিক অঙ্কিত কর যাহার GHK কোণ ∠P-এর সমান।

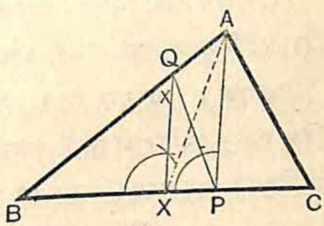
তাহা হইলে GHKL অভীষ্ট সামান্তরিক হইল।

প্রমাণ। অঙ্কন অনুসারে, ক্ষেত্র ABCDE = △EGF = সামান্তরিক GHKL.

অতিরিক্ত অঙ্কন

1. ত্রিভুজের যে কোন বাহুর অন্তর্গত একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া একটি সরলরেখা টানিয়া ত্রিভুজটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে।

[To bisect a triangle by a straight line drawn through a given point in one of its sides.]



মনে কর ABC নির্দিষ্ট ত্রিভুজের BC বাহুর অন্তর্গত P একটি নির্দিষ্ট বিন্দু।

P-বিন্দু দিয়া একটি সরলরেখা টানিয়া ABC ত্রিভুজকে সমদ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। AP যুক্ত কর। BC-কে X-বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত কর। X-বিন্দু দিয়া PA-র সমান্তরাল একটি সরলরেখা টান যাহা BA-কে Q-বিন্দুতে ছেদ করে। PQ যুক্ত কর। এখন PQ, ABC ত্রিভুজকে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে।

প্রমাণ। AX যুক্ত কর। একই ভূমি QX-এর উপর এবং একই সমান্তরাল যুগল QX, AP-র মধ্যে অবস্থিত বলিয়া

$$\triangle PQX = \triangle AQX$$

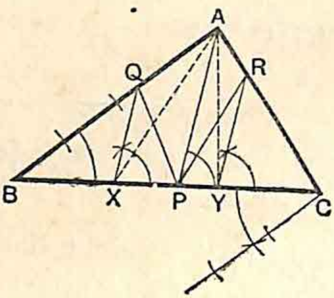
$$\therefore \triangle QBP = \triangle QBX + \triangle PQX$$
$$= \triangle QBX + \triangle AQX$$
$$= \triangle ABX$$
$$= \tfrac{1}{2}\triangle ABC \qquad [\text{ কারণ } BX = XC\ ]$$

অতএব PQ, ABC ত্রিভুজকে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে।

---

2. ত্রিভুজের যে কোন বাহুর অন্তর্গত কোন নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া দুইটি সরলরেখা টানিয়া ত্রিভুজটিকে ত্রিখণ্ডিত করিতে হইবে।

[To trisect a triangle by straight lines drawn through a given point in one of its sides.]



মনে কর ABC নির্দিষ্ট ত্রিভুজের BC বাহুর অন্তর্গত P একটি নির্দিষ্ট বিন্দু। P-বিন্দু দিয়া দুইটি সরলরেখা টানিয়া ABC ত্রিভুজকে ত্রিখণ্ডিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। AP যুক্ত কর। AB-কে X, Y বিন্দুতে ত্রিখণ্ডিত কর। X এবং Y বিন্দু দিয়া PA-র সমান্তরাল দুইটি সরলরেখা টান যাহারা AB ও AC-কে যথাক্রমে Q এবং R বিন্দুতে ছেদ করে। PQ, PR যুক্ত কর।

এখন, PQ, PR, ABC ত্রিভুজকে ত্রিখণ্ডিত করিল।

প্রমাণ। AX, AY যুক্ত কর।

একই ভূমি QX-এর উপর এবং একই সমান্তরাল যুগল QX, AP-র মধ্যে অবস্থিত বলিয়া

$$\triangle PQX = \triangle AQX.$$

$$\therefore \quad \triangle QBP = \triangle QBX + \triangle PQX$$
$$= \triangle QBX + \triangle AQX$$
$$= \triangle ABX$$
$$= \tfrac{1}{3}\triangle ABC \quad (\text{কারণ } BX = \tfrac{1}{3}BC)$$

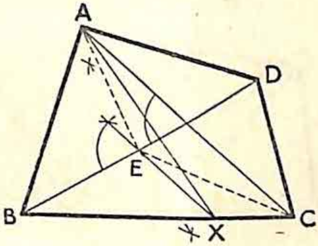
এইরূপে প্রমাণ করা যায় যে $\triangle RPC = \frac{1}{3}\triangle ABC$

$\therefore$ অবশিষ্ট চতুর্ভুজ $AQPR = \frac{1}{3}\triangle ABC$

অতএব PQ ও PR, ABC ত্রিভুজকে ত্রিখণ্ডিত করিল।

3. চতুর্ভুজের কোন কৌণিক বিন্দু দিয়া একটি সরলরেখা টানিয়া উহাকে সমদ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে।

[To bisect a quadrilateral by a straight line drawn through an angular point.]



মনে কর ABCD একটি চতুর্ভুজ। ইহার কোন নির্দিষ্ট শীর্ষবিন্দু (ধর A বিন্দু) দিয়া একটি সরলরেখা টানিয়া ইহাকে সমদ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। AC, BD যুক্ত কর। BD-র মধ্যবিন্দু E দিয়া AC-র সমান্তরাল সরলরেখা টান যাহা BC-কে X বিন্দুতে ছেদ করে। AX যুক্ত কর। এখন AX, ABCD চতুর্ভুজকে সমদ্বিখণ্ডিত করিল।

প্রমাণ। AE, EC যুক্ত কর ; $\triangle EAC = \triangle XAC$ [একই ভূমি AC এবং একই সমান্তরাল যুগল EX, AC-র মধ্যে অবস্থিত বলিয়া]।

$\therefore$ চতুর্ভুজ ADCX $= \triangle ADC + \triangle XAC$

$= \triangle ADC + \triangle EAC$

$=$ চতুর্ভুজ AECD

$= \triangle AED + \triangle CED$

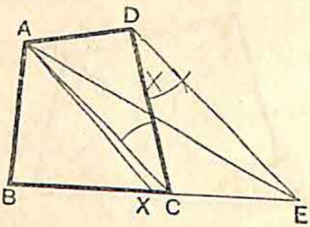
$= \frac{1}{2}\triangle ABD + \frac{1}{2}\triangle CBD$ [$\because$ E, BD-র মধ্যবিন্দু]

$= \frac{1}{2}(\triangle ABD + \triangle CBD)$

$= \frac{1}{2}$ চতুর্ভুজ ABCD.

দ্বিতীয় প্রণালী।

অঙ্কন। AC যুক্ত কর। মনে কর △ABC > △ADC। D বিন্দু দিয়া AC-এর সমান্তরাল DE টান যাহা বর্ধিত BC-কে E-বিন্দুতে ছেদ করে। BE-কে X-বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত কর। AX যুক্ত কর। এখন AX, ABCD চতুর্ভুজকে সমদ্বিখণ্ডিত করিল।



প্রমাণ। AE যুক্ত কর।

△DAC = △EAC [একই ভূমি AC-র উপর এবং একই সমান্তরাল যুগল AC, DE-র মধ্যে অবস্থিত বলিয়া]

∴ $\triangle ABX = \frac{1}{2}\triangle ABE$ [∵ X, BE-র মধ্যবিন্দু]

$= \frac{1}{2}(\triangle ABC + \triangle ACE)$

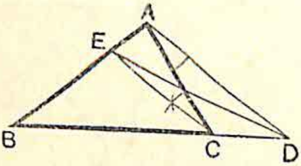
$= \frac{1}{2}(\triangle ABC + \triangle DAC)$

$= \frac{1}{2}$ চতুর্ভুজ ABCD.

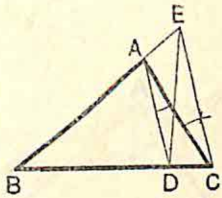
দ্রষ্টব্য। দ্বিতীয় প্রণালীতে △ABC, △ADC অপেক্ষা বড় না হইলে X বিন্দু BC-র বর্ধিতাংশের উপর অর্থাৎ ABCD চতুর্ভুজের বহির্দেশে পড়িবে; সুতরাং অঙ্কন সম্ভব হইবে না। এরূপ স্থলে অর্থাৎ △ABC, △ADC অপেক্ষা ছোট হইলে, B বিন্দু দিয়া AC-র সমান্তরাল রেখা টানিয়া DC-র বর্ধিতাংশের সহিত E বিন্দুতে ছেদ কর ও ED-র মধ্যবিন্দু X-এর সহিত A যুক্ত কর। AX, ABCD চতুর্ভুজের সমদ্বিখণ্ডক হইবে।

4. কোন নির্দিষ্ট ভূমির উপর কোন একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সমান করিয়া একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

[On a given base to construct a triangle equal in area to a given triangle.]



প্রথম চিত্র



দ্বিতীয় চিত্র

মনে কর ABC নির্দিষ্ট ত্রিভুজ। নির্দিষ্ট BD ভূমির উপর ABC ত্রিভুজের সমান একটি ত্রিভুজ অঙ্কন করিতে হইবে।

অঙ্কন। BC বা বর্ধিত BC হইতে নির্দিষ্ট ভূমির সমান BD অংশ কাটিয়া লও। AD যুক্ত কর। C-বিন্দু দিয়া AD-র সমান্তরাল একটি সরলরেখা টান যাহা প্রথম চিত্রে BA-কে এবং দ্বিতীয় চিত্রে বর্ধিত BA-কে E-বিন্দুতে ছেদ করে। ED যুক্ত কর। এখন, EBD অভীষ্ট ত্রিভুজ হইল।

প্রমাণ। $\triangle DEC = \triangle AEC$. (একই ভূমির উপর এবং একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত বলিয়া)

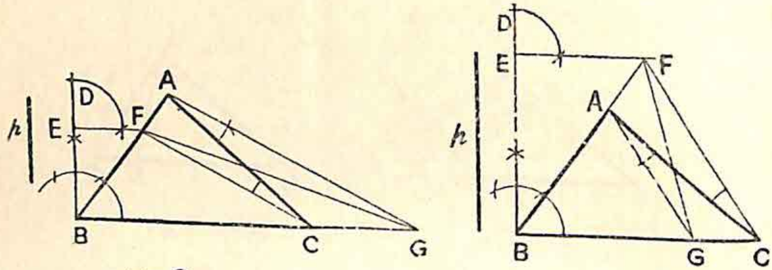
প্রথম চিত্রে, $\triangle EBD = \triangle EBC + \triangle DEC = \triangle EBC + \triangle AEC = \triangle ABC$.

দ্বিতীয় চিত্রে, $\triangle EBD = \triangle EBC - \triangle EDC = \triangle EBC - \triangle EAC = \triangle ABC$.

দ্রষ্টব্য। প্রথম চিত্রে নির্ণেয় ত্রিভুজের ভূমি BD, নির্দিষ্ট ABC ত্রিভুজের BC ভূমি অপেক্ষা বৃহত্তর এবং দ্বিতীয় চিত্রে নির্ণেয় ত্রিভুজের ভূমি BD, নির্দিষ্ট ABC ত্রিভুজের BC ভূমি অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

5. কোন নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সমান করিয়া কোন নির্দিষ্ট উন্নতি বিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To construct a triangle equal in area to a given triangle and having a given altitude.]



প্রথম চিত্র দ্বিতীয় চিত্র

মনে কর ABC নির্দিষ্ট ত্রিভুজ এবং p নির্দিষ্ট উন্নতি। ABC ত্রিভুজের সমান একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে যাহার উন্নতি p-র সমান।

অঙ্কন। B বিন্দুতে BC-র উপর BD লম্ব টান এবং BD হইতে p-র সমান BE অংশ কাটিয়া লও। E-বিন্দু দিয়া BC-র সমান্তরাল সরলরেখা টান যাহা প্রথম চিত্রে BA-কে এবং দ্বিতীয় চিত্রে বর্ধিত BA-কে F বিন্দুতে ছেদ করে। FC যুক্ত কর। A বিন্দু দিয়া FC-এর সমান্তরাল সরলরেখা টান যাহা প্রথম চিত্রে বর্ধিত BC-কে এবং দ্বিতীয় চিত্রে BC-কে G বিন্দুতে ছেদ করে। FG যুক্ত কর।

এখন FBG অভীষ্ট ত্রিভুজ হইল।

প্রমাণ। প্রথম চিত্রে, $\triangle AFC = \triangle CFC$ (একই ভূমির উপর ও একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত বলিয়া)।

$\therefore \triangle FBG = \triangle FBC + \triangle GFC = \triangle FBC + \triangle AFC = \triangle ABC$

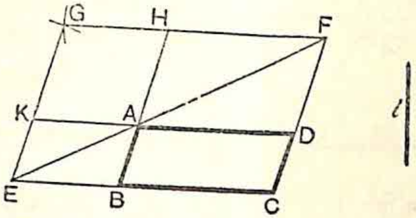
দ্বিতীয় চিত্রে, $\triangle FAG = \triangle CAG$ (একই ভূমির উপর ও একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত বলিয়া)।

$\therefore \triangle FBG = \triangle ABG + \triangle FAG = \triangle ABG + \triangle CAG = \triangle ABC.$

দ্রষ্টব্য। প্রথম চিত্রে নির্ণেয় ত্রিভুজের উন্নতি প্রদত্ত ত্রিভুজের উন্নতি অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর এবং দ্বিতীয় চিত্রে নির্ণেয় ত্রিভুজের উন্নতি প্রদত্ত ত্রিভুজের উন্নতি অপেক্ষা বৃহত্তর।

6. এমন একটি সামান্তরিক অঙ্কিত করিতে হইবে যাহার ক্ষেত্রফল কোন নির্দিষ্ট সামান্তরিকের ক্ষেত্রফলের সমান এবং যাহার এক বাহু কোন নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের সমান।

[To construct a parallelogram equal in area to a given parallelogram and having a side of given length.]



মনে কর ABCD নির্দিষ্ট সামান্তরিক এবং l নির্দিষ্ট বাহু।

ABCD সামান্তরিকের সমান একটি সামান্তরিক অঙ্কিত করিতে হইবে যাহার এক বাহু l-এর সমান।

অঙ্কন। CB-কে বর্ধিত করিয়া বর্ধিতাংশ হইতে l-এর সমান করিয়া BE অংশ কাটিয়া লও। EA যুক্ত কর। EA এবং CD-কে বর্ধিত কর যেন উহারা পরস্পর F-বিন্দুতে মিলিত হয়। ECFG সামান্তরিক সম্পূর্ণ কর।

BA ও DA কে বর্ধিত কর এবং মনে কর উহারা FG এবং EG-কে যথাক্রমে H এবং K বিন্দুতে ছেদ করে। এখন GKAH অভীষ্ট সামান্তরিক হইল।

প্রমাণ। EF কর্ণ GC সামান্তরিককে সমদ্বিখণ্ডিত করে,

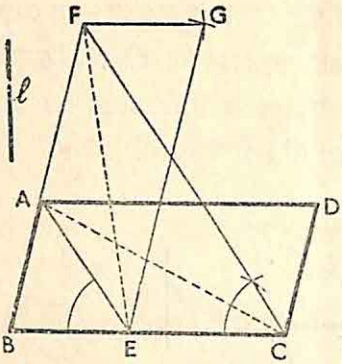
$\therefore \triangle GEF = \triangle CEF$

এইরূপে $\triangle KEA = \triangle BEA$ এবং $\triangle HAF = \triangle DAF$.

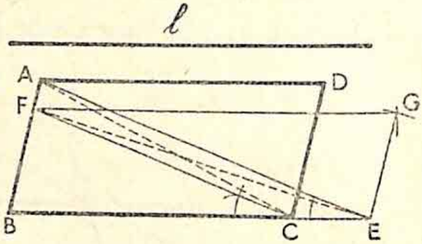
$\therefore \triangle GEF - \triangle KEA - \triangle HAF = \triangle CEF - \triangle BEA - \triangle DAF$

অর্থাৎ সামান্তরিক GKAH = সামান্তরিক ABCD এবং KA = EB = l.

দ্বিতীয় প্রণালী। BC হইতে l এর সমান BE অংশ কাট। AE যুক্ত কর। C বিন্দু দিয়া AE-র সমান্তরাল সরলরেখা টান যাহা প্রথম চিত্রে বর্ধিত BA-কে এবং দ্বিতীয় চিত্রে BA-কে F বিন্দুতে ছেদ করে। FBEG সামান্তরিক সম্পূর্ণ কর। ইহাই অভীষ্ট সামান্তরিক হইল।



(প্রথম চিত্র)



(দ্বিতীয় চিত্র)

প্রমাণ। AC, EF যুক্ত কর। $\triangle FAE = \triangle CAE$

$\therefore$ প্রথম চিত্রে $\triangle FAE + \triangle ABE = \triangle CAE + \triangle ABE$;

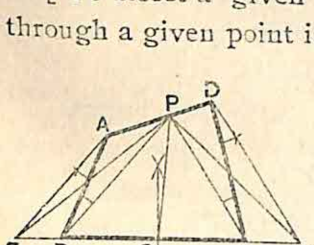
দ্বিতীয় চিত্রে $\triangle ABE - \triangle FAE = \triangle ABE - \triangle CAE$;

অর্থাৎ $\triangle FBE = \triangle ABC$ $\therefore$ $2\triangle FBE = 2\triangle ABC$

অর্থাৎ সামান্তরিক FBEG = সামান্তরিক ABCD এবং $BE = l$.

7. কোন চতুর্ভুজের যে কোন বাহুর উপরিস্থিত একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া একটি সরলরেখা টানিয়া উহাকে সমদ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে।

[To bisect a given quadrilateral by a straight line drawn through a given point in one of its sides.]



মনে কর ABCD নির্দিষ্ট চতুর্ভুজ এবং P, AD বাহুর উপরিস্থিত একটি নির্দিষ্ট বিন্দু।

P-বিন্দু দিয়া একটি সরলরেখা টানিয়া চতুর্ভুজটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। PB, PC যুক্ত কর। D-বিন্দু দিয়া PC-র সমান্তরাল একটি সরলরেখা টান যাহা বর্ধিত BC-কে E-বিন্দুতে ছেদ করে। A-বিন্দু দিয়া PB-র সমান্তরাল একটি সরলরেখা টান যাহা বর্ধিত CB-কে F-বিন্দুতে ছেদ করে। PE, PF যুক্ত কর। EF-কে Q-বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত কর। PQ যুক্ত কর। এখন, PQ, ABCD চতুর্ভুজকে সমদ্বিখণ্ডিত করিল ; কারণ,

চতুর্ভুজ PABQ $= \triangle PQF = \frac{1}{2} \triangle PEF = \frac{1}{2}$ চতুর্ভুজ ABCD.

অনুশীলনী 14

1. নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের সমান একটি সামান্তরিক অঙ্কিত কর যাহার একটি বাহু বর্গক্ষেত্রের বাহুর সমান এবং একটি কোণ বর্গক্ষেত্রের কোণের অর্ধ।

2. একটি নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজ অঙ্কিত কর। Draw an isosceles right-angled triangle equal in area to a given square.

3. কোন নির্দিষ্ট সামান্তরিকের সমান করিয়া একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত কর যাহার একটি কোণ কোন নির্দিষ্ট কোণের সমান।

4. কোন নির্দিষ্ট ত্রিভুজের ভূমির উপর উহার সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত কর। On the base of a given triangle draw an isosceles triangle of equal area.

5. কোন নির্দিষ্ট ভূমির উপর একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত কর। On a given base construct an isosceles triangle equal in area to a given triangle.

6. কোন নির্দিষ্ট ভূমির উপর এমন একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত কর যাহার ক্ষেত্রফল কোন নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সমান এবং যাহার ভূমি-সংলগ্ন একটি কোণ কোন নির্দিষ্ট কোণের সমান। On a given base construct a traingle equal in area to a given triangle and having one of its angles at the base equal to a given angle.

7. এমন একটি সামান্তরিক অঙ্কিত কর যাহার ক্ষেত্রফল একটি নির্দিষ্ট সামান্তরিকের সমান এবং যাহার একটি বাহু ও একটি কোণ কোন নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্য ও কোণের সমান। Construct a parallelogram equal in area to a given parallelogram and having an angle equal to a given angle and a side of given length

8. দুইটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সমষ্টির সমান একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত কর। Construct a triangle equal in area to the sum of two given triangles.

9. দুইটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের অন্তরের সমান একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত কর। Construct a triangle equal in area to the difference of two given triangles.

10. কোন বর্গক্ষেত্রের বাহুর উপর উহার সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত কর। On the side of a given square construct an isosceles triangle of equal area.

11. কোন নির্দিষ্ট সামান্তরিকের ভূমির উপর সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি রম্বস অঙ্কিত কর। এই অঙ্কন কখন অসম্ভব? On the base of a given parallelogram construct a rhombus of equal area. When does the construction fail?

12. ABC একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজ এবং P একটি নির্দিষ্ট বিন্দু। ABC ত্রিভুজের সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট এমন একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত কর যাহার শীর্ষবিন্দু হইবে P এবং ভূমি BC-র সহিত একই সরলরেখায় অবস্থিত।

13. ABC ত্রিভুজের BC-ভূমির উপর এমন একটি DBC ত্রিভুজ আঁক যেন উহার ক্ষেত্রফল ABC ত্রিভুজের দ্বিগুণ হয়, কিন্তু DBC কোণ, ABC কোণের অর্ধেক হয়।

14. নির্দিষ্ট উন্নতিবিশিষ্ট একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত কর যাহার ক্ষেত্রফল কোন নির্দিষ্ট ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের সমান।

15. কোন নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সমান একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত কর, যাহার দুইটি বাহু নির্দিষ্ট।

16. একটি নির্দিষ্ট সামান্তরিকের সমান আর একটি সামান্তরিক অঙ্কিত কর যাহার সন্নিহিত দুই বাহু নির্দিষ্ট। Construct a parallelogram with its two adjacent sides equal to two given straight lines and its area equal to that of a given parallelogram.

17. একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সমান একটি আয়তক্ষেত্র অঙ্কিত কর যাহার ভূমি অথবা উন্নতি নির্দিষ্ট।

18. দুইটি বর্গক্ষেত্রের সমষ্টি বা অন্তরের সমান একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর।

19. একটি বর্গক্ষেত্রের সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য নির্দিষ্ট আছে; উহার প্রস্থ নির্ণয় কর।

20. দুইটি সমবাহু ত্রিভুজের সমষ্টির সমান একটি সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত কর। Construct an equilateral triangle equal in area to the sum of two given equilateral triangles.

21. দুইটি সমবাহু ত্রিভুজের অন্তরের সমান একটি সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত কর। Construct an equilateral triangle equal in area to the difference of two equilateral triangles.

22. একটি ট্রাপিজিয়মের সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত কর এবং ইহা হইতে ট্রাপিজিয়মের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের সূত্র বাহির কর।

Draw a triangle equal in area to a trapezium and hence deduce the rule for finding the area of a trapezium.

(E. B. S. E. B. 1950).

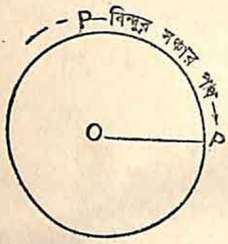
চতুর্থ অধ্যায়

সঞ্চারপথ

রেখাবিষয়ক আলোচনায় পূর্বেই দেখান হইয়াছে যে একটি গতিশীল বিন্দুদ্বারা রেখার উৎপত্তি হয়। এই রেখাই চলন্ত বিন্দুটির গতিপথের নির্দেশক। আমরা ইহাকে বিন্দুর গতিপথ বা সঞ্চারপথ বলিতে পারি, অর্থাৎ,

একটি বিন্দু কোন নির্দিষ্ট নিয়মাধীনে থাকিয়া যে পথে চলে বা সঞ্চরণ করে, তাহাকে উহার **সঞ্চারপথ** (Locus) বলে।

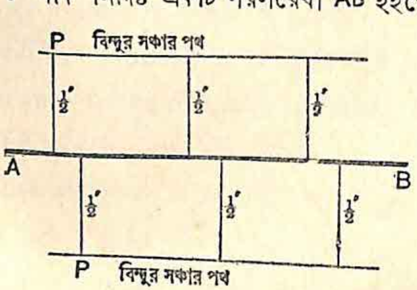
বিন্দুর সঞ্চারপথ প্রকৃতপক্ষে রেখা ছাড়া আর কিছুই নয়। বিন্দুর গতির প্রকৃতি অনুসারে এই রেখা সরল কিংবা বক্র হয়। আবার যে নির্দিষ্ট নিয়মে বিন্দু সঞ্চরণ করে সেই নির্দিষ্ট নিয়মই বিন্দুর গতির প্রকৃতি নির্ধারিত করে। নির্দিষ্ট নিয়মগুলি হইতে যুক্তি দ্বারা কোন বিশিষ্ট চল-বিন্দুর সঞ্চারপথ সরল কিংবা বক্র হইবে তাহা আমরা নির্ণয় করিতে পারি।



মনে কর P একটি চল-বিন্দু অপর আর একটি স্থির বিন্দু O হইতে সমান দূরে থাকিয়া (মনে কর অর্ধ ইঞ্চি) স্থির বিন্দুটির চতুর্দিকে ঘুরিতেছে। তাহা হইলে P বিন্দুটির সঞ্চারপথ হইবে এমন একটি বৃত্তের পরিধি যাহার কেন্দ্র O এবং ব্যাসার্ধ অর্ধ ইঞ্চি।

এস্থলে P-বিন্দুর গতি নিয়ন্ত্রিত হইতেছে যে নির্দিষ্ট শর্ত বা নিয়ম দ্বারা, তাহা হইতেছে—O হইতে P-র দূরত্ব সর্বদাই $\frac{1}{2}$ ইঞ্চি।

একটি চল-বিন্দু P যদি নির্দিষ্ট একটি সরলরেখা AB হইতে সমান দূরে (মনে কর



$\frac{1}{2}''$) থাকিয়া চলিতে থাকে, তবে P-বিন্দুটির সঞ্চারপথ হইবে AB সরলরেখা হইতে $\frac{1}{2}''$ দূরে অবস্থিত একটি সরলরেখা যাহা AB সরলরেখার সমান্তরাল। উক্ত নিয়মাধীনে

P-বিন্দুটি AB সরলরেখার যে কোন পার্শ্বেই চলিতে পারে বলিয়া AB সরলরেখার উভয় পার্শ্বেই P-বিন্দুর সঞ্চারপথ কল্পনা করা যাইতে পারে।

সঞ্চারপথের অন্যরূপ ব্যাখ্যা। কতকগুলি বিন্দুর অবস্থান যদি কোন নির্দিষ্ট নিয়ম দ্বারা নিয়ন্ত্রিত হয় তাহা হইলে উক্ত বিন্দুসমূহের সংযোজক রেখাই হইবে তাহাদের সঞ্চারপথ।

এইভাবে দেখিতে গেলে কতকগুলি বিন্দু যদি একটি স্থির বিন্দু হইতে সমান দূরে অবস্থিত থাকে, তবে উক্ত বিন্দুগুলির সঞ্চারপথ হইবে একটি বৃত্তের পরিধি। স্থিরবিন্দুটি হইবে বৃত্তের কেন্দ্র এবং নির্দিষ্ট দূরত্ব হইবে উহার ব্যাসার্ধ।

সঞ্চারপথের উক্ত ব্যাখ্যা দুইটিতে মূলতঃ কোন প্রভেদ নাই। একই নির্দিষ্ট নিয়মাধীনে গতিশীল একটি বিন্দুর বিভিন্ন অবস্থান এবং একাধিক বিন্দুর বিভিন্ন অবস্থান দ্বারা একই রেখা উৎপন্ন হয়।

বিপরীতভাবে দেখিতে গেলে, একই রেখার উপর অবস্থিত একাধিক বিন্দু কোন নির্দিষ্ট শর্ত পূরণ করিলে, উক্ত রেখাই যে কোন বিন্দুর বা সকল বিন্দুরই সঞ্চারপথ হইবে।

কোন চল-বিন্দুর সঞ্চারপথ সরলরেখা কিংবা বক্ররেখা দ্বারা সূচিত হইবে তাহা নির্ণয় করিবার জন্য মোটামুটি নিম্নলিখিত বিষয়গুলি জানা প্রয়োজন :—

(1) কোন বিন্দু একই দিকে চলিতে থাকিলে উহার সঞ্চারপথ হইবে একটি সরলরেখা অর্থাৎ চল-বিন্দুটি একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর অবস্থিত হইবে।

(2) কোন বিন্দু একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার কোন নির্দিষ্ট বিন্দুতে কোন নির্দিষ্ট কোণ করিয়া চলিলে ঐ বিন্দুটির সঞ্চারপথ একটি সরলরেখা দ্বারা সূচিত হইবে।

(3) কোন বিন্দু একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা হইতে নির্দিষ্ট ব্যবধানে থাকিয়া চলিলে উহার সঞ্চারপথ সূচিত হইবে দুইটি সরলরেখার যে কোন একটি দ্বারা এবং সরলরেখা দুইটির প্রত্যেকটিই নির্দিষ্ট ব্যবধানে থাকিয়া নির্দিষ্ট সরলরেখাটির সহিত সমান্তরাল হইবে।

(4) একটি বিন্দু যদি কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে সমান ব্যবধানে থাকিয়া চলিতে থাকে, তবে উক্ত চল-বিন্দুটি একটি বৃত্তপরিধির উপর অবস্থিত হইবে, যে বৃত্তের কেন্দ্র হইবে নির্দিষ্ট বিন্দুটি এবং ব্যাসার্ধ হইবে নির্দিষ্ট ব্যবধানের সমান।

কোন বিন্দু একটিমাত্র নিয়মের পরিবর্তে একাধিক নিয়মের অধীনে থাকিয়াও চলিতে পারে। এইরূপ বিন্দুর সঞ্চারপথ পরে আলোচিত হইবে।

অনুশীলনী 15

1. মুখে মুখে সঞ্চারপথগুলির বর্ণনা কর :

(1) ঘড়ির মিনিটের কাঁটার সম্মুখের প্রান্ত-বিন্দুর সঞ্চারপথ কি ?

(2) কোন লোক একটি সমতল রাস্তার উপর সোজাপথে সাইকেল করিয়া চলিতেছে। সাইকেলের ঘণ্টাটির (বেল) সঞ্চারপথ কি ?

(3) একটি লোক সোজাভাবে দাঁড়াইয়া লিফ্‌ট করিয়া উপরে উঠিতেছে। তাহার নাসিকার অগ্রভাগের সঞ্চারপথ কিরূপ ?

(4) ঘড়ির দোলকের নিম্নপ্রান্তের সঞ্চারপথ কিরূপ ?

(5) একখানি কপাটের লম্বাধারে একটি বিন্দু-চিহ্ন দিয়া কপাটখানিকে খুলিলে বা বন্ধ করিলে বিন্দুটির সঞ্চারপথ কিরূপ হইবে ?

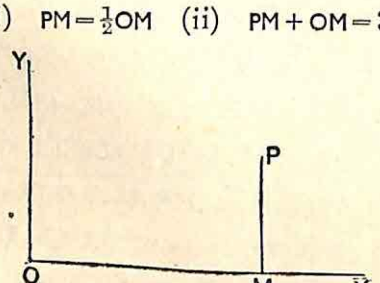
(6) একটি পেন্সিল সোজাভাবে টেবিলের উপর গড়াইয়া দাও। পেন্সিলের অগ্রভাগের সঞ্চারপথ কিরূপ ?

(7) একগাছি সূতার একপ্রান্তে একটি ভারী বল বাঁধিয়া অন্য প্রান্ত ধরিয়া হাত ঠিক রাখিয়া বলটিকে সমান ভাবে ঘুরাইতে থাক। বলটির সঞ্চারপথ কিরূপ হইবে ?

2. খাতার উপর একটি বিন্দু A লও। উহার 2 সে. মি. দূরে দশটি বিন্দু স্থাপন কর। বিন্দুগুলি কিরূপ রেখার উপর অবস্থিত মনে হয় ?

3. OX, OY দুইটি সরলরেখা পরস্পর লম্ব এবং P-বিন্দুটি XOY কোণের অন্তর্গত। PM, OX-এর উপর লম্ব। P-র সঞ্চারপথ নির্ণয় কর, যদি

(i) $PM = \frac{1}{2}OM$ (ii) $PM + OM = 3''$.



ইঙ্গিত। (i) OX-এর উপর M_1, M_2, M_3···ইত্যাদি বিন্দু লও। M_1-বিন্দুতে OX-এর উপর OM_1-এর অর্ধ পরিমিত M_1P_1 লম্ব টান। এইরূপে M_2-বিন্দুতে OM_2-এর

অর্ধ পরিমিত M_2P_2, M_3-বিন্দুতে OM_3-এর অর্ধ পরিমিত M_3P_3…লম্ব টান। এখন P_1, P_2, P_3…বিন্দুসমূহ যোগ করিয়া যে রেখাটি পাওয়া যাইবে উহা একটি সরলরেখা হইবে, এবং এই সরলরেখাই হইবে P-বিন্দুর সঞ্চারপথ।

(ii) OX-এর উপর কোন OM_1 অংশ লও যাহা 3″ অপেক্ষা ছোট। M_1-বিন্দুতে OX-এর উপর M_1P_1 লম্ব টান যেন M_1P_1-এর দৈর্ঘ্য $(3'' - OM_1)$ হয়। M_2, M_3… বিন্দুতে এইভাবে M_2P_2, M_3P_3…লম্ব টান যেন M_2P_2, M_3P_3…এর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে $(3'' - OM_2)$, $(3'' - OM_3)$ ‥হয়। এখন P_1, P_2, P_3 বিন্দুসমূহ যোগ করিয়া যে রেখাটি পাওয়া যাইবে উহা একটি সরলরেখা, এবং এই সরলরেখাই হইবে P-বিন্দুর সঞ্চারপথ।

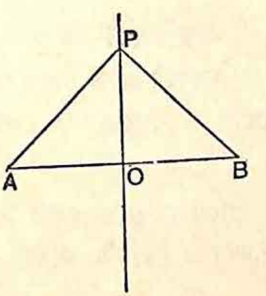
4. 3 সে. মি. ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। পরিধির যে কোন বিন্দু হইতে 1 সে. মি. দূরে একটি বিন্দু P লও। P-বিন্দুর সঞ্চারপথ অঙ্কিত কর।

সঞ্চারপথ

উপপাদ্য 32

দুইটি স্থিরবিন্দু হইতে সমদূরবর্তী কোন বিন্দুর সঞ্চারপথ উক্ত বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখার লম্ব-দ্বিখণ্ডক।

[The locus of a point equidistant from two fixed points is the perpendicular bisector of the straight line joining the fixed points.]



মনে কর A ও B দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, A ও B হইতে সমদূরবর্তী কোন বিন্দুর সঞ্চারপথ AB সরলরেখার লম্ব-দ্বিখণ্ডক, অর্থাৎ

(1) A ও B হইতে কোন বিন্দু সমদূরবর্তী হইলে উহা AB-র লম্ব-দ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত হইবে, এবং

(2) AB-র লম্ব-দ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত যে কোন বিন্দু A ও B হইতে সমদূরবর্তী হইবে।

প্রথমতঃ মনে কর P-বিন্দুটি A ও B হইতে সমদূরবর্তী, অর্থাৎ PA = PB.

প্রমাণ করিতে হইবে যে, P-বিন্দু AB-র লম্ব-দ্বিখণ্ডের উপর অবস্থিত।

অঙ্কন। AB-র মধ্যবিন্দু O এবং P যুক্ত কর।

প্রমাণ। AOP, BOP ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম,

∵ PA = PB, AO = BO, PO সাধারণ ;

∴ $\angle AOP = \angle BOP$, এবং এই দুইটি সন্নিহিত কোণের সমষ্টি 2 সমকোণ বলিয়া প্রত্যেকেই সমকোণ ; অর্থাৎ PO, AB-র উপর লম্ব।

অতএব P-বিন্দু AB-র লম্ব-দ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত। … … (1)

আবার মনে কর, AB-র লম্ব-দ্বিখণ্ডক OP-র উপর P যে কোন একটি বিন্দু। প্রমাণ করিতে হইবে, P-বিন্দু A ও B হইতে সমদূরবর্তী অর্থাৎ PA = PB।

প্রমাণ। AOP, BOP ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম,

∵ AO = BO, OP সাধারণ, $\angle POA = \angle POB$ (সমকোণ বলিয়া)

∴ PA = PB, অর্থাৎ P-বিন্দু, A ও B হইতে সমদূরবর্তী। … (2)

সুতরাং AB-র লম্ব-দ্বিখণ্ডক P-বিন্দুর সঞ্চারপথ।

অনুশীলনী 16

1. AB সরলরেখা হইতে 1″ দূরবর্তী একটি বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

2. P-বিন্দুটি AB সরলরেখার A-বিন্দুতে 30° কোণ করিয়া চলিতেছে ; P-বিন্দুর সঞ্চারপথ অঙ্কিত কর।

3. AB সরলরেখার দুই প্রান্তে P ও Q দুইটি বিন্দু 45° কোণ করিয়া বিপরীত দিকে চলিতেছে ; উহাদের সঞ্চারপথ অঙ্কিত করিয়া প্রমাণ কর যে সঞ্চারপথ দুইটি পরস্পর সমান্তরাল।

4. নির্দিষ্ট ভূমির উপর অবস্থিত সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর। Find the locus of the vertices of isosceles triangles standing on a fixed base.

(W.B. B.S.E., 1952)

5. দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী বৃত্তসমূহের কেন্দ্রের সঞ্চারপথ নির্ণয় কর। Find the locus of the centres of circles passing through two given points.

6. A, B দুইটি বিন্দু একটি নির্দিষ্ট বৃত্তের মধ্যে অবস্থিত। বৃত্ত পরিধির উপর এমন দুইটি বিন্দু নির্ণয় কর যাহারা A ও B হইতে সমদূরবর্তী।

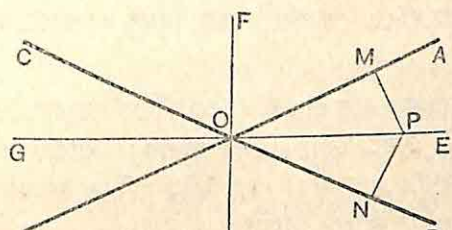
7. A, C, B, D চারিটি বিন্দু এইরূপে অবস্থিত যে AC = AD এবং BC = BD. প্রমাণ কর যে A ও B বিন্দুর মধ্য দিয়া একটি সরলরেখা টানিলে উহার উপরিস্থিত যে কোন বিন্দু C ও D হইতে সমদূরবর্তী হইবে।

8. কোন নির্দিষ্ট সরলরেখার বহিঃস্থ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে ঐ সরলরেখা পর্যন্ত অঙ্কিত যাবতীয় সরলরেখার মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর। (C. U. 1938)

উপপাদ্য 33

পরস্পরচ্ছেদী দুইটি সরলরেখা হইতে সমদূরবর্তী কোন বিন্দুর সঞ্চারপথ উক্ত সরলরেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডক সরলরেখাদ্বয় হইবে।

[The locus of a point equidistant from two given intersecting straight lines is the pair of straight lines which bisect the angles between the given straight lines.]



মনে কর AB, CD দুইটি সরলরেখা O-বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে এবং ∠AOD-এর সমদ্বিখণ্ডক OE এবং ∠AOC-এর সমদ্বিখণ্ডক OF অঙ্কিত করা হইয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, AB ও CD হইতে সমদূরবর্তী কোন বিন্দুর সঞ্চারপথ OE এবং OF সরলরেখাদ্বয় ; অর্থাৎ

(1) AB ও CD হইতে সমদূরবর্তী কোন বিন্দু OE অথবা OF-এর উপর অবস্থিত হইবে ; এবং

(2) OE অথবা OF-এর উপর অবস্থিত যে কোন বিন্দু AB ও CD হইতে সমদূরবর্তী হইবে।

প্রথমতঃ মনে কর, P-বিন্দুটি AB ও CD হইতে সমদূরবর্তী, অর্থাৎ P হইতে AB ও CD-র উপর অঙ্কিত PM ও PN লম্বদ্বয় সমান।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $\angle POM = \angle PON$.

OP যুক্ত কর।

প্রমাণ। POM এবং PON সমকোণী ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম,

$\because$ PO সাধারণ অতিভুজ এবং $PM = PN$,

$\therefore$ $\angle POM = \angle PON$, অর্থাৎ OP, $\angle AOD$-এর সমদ্বিখণ্ডক।

অর্থাৎ P, $\angle AOD$-এর সমদ্বিখণ্ডক OE-র উপর অবস্থিত। ... .. (1)

আবার মনে কর, OE-র উপর অবস্থিত P যে কোন একটি বিন্দু।

P হইতে AB ও CD-র উপর যথাক্রমে PM ও PN লম্ব টান।

প্রমাণ করিতে হইবে যে $PM = PN$.

প্রমাণ। POM এবং PON ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম,

$\because$ $\angle POM = \angle PON$, $\angle PMO = \angle PNO$, OP সাধারণ ;

$\therefore$ $PM = PN$, অর্থাৎ P বিন্দু AB ও CD হইতে সমদূরবর্তী। (2)

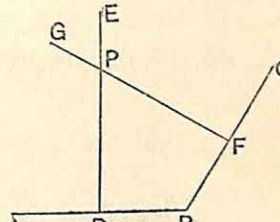
অতএব, AB ও CD হইতে সমদূরবর্তী কোন বিন্দুর সঞ্চারপথ, AB ও CD-র অন্তর্ভূত কোণের সমদ্বিখণ্ডক।

উক্ত প্রকারে প্রমাণ করা যায় যে AB ও CD হইতে সমদূরবর্তী কোন বিন্দুর সঞ্চারপথ AB ও CD-র অন্তর্ভূত AOC কোণের সমদ্বিখণ্ডক। আবার AOD, AOC কোণের সমদ্বিখণ্ডক দুইটিকে যথাক্রমে G ও H পর্যন্ত বর্ধিত করিলে উহারা যথাক্রমে COB, BOD বিপ্রতীপ কোণদ্বয়কেও সমদ্বিখণ্ডিত করিবে।

সুতরাং P-বিন্দুর সঞ্চারপথ EG এবং FH, অর্থাৎ এস্থলে নির্ণেয় সঞ্চারপথ $\angle AOD$-এর অন্তর্দ্বিখণ্ডক এবং বহির্দ্বিখণ্ডক সরলরেখাদ্বয়।

দুই বা ততোধিক সঞ্চারপথের ছেদবিন্দুর অবস্থান নির্ণয়—যদি কোন বিন্দু যুগপৎ একাধিক নিরপেক্ষ নিয়মের অধীনে চলিয়া বিভিন্ন সঞ্চারপথ উৎপন্ন করে, তবে বিভিন্ন সঞ্চারপথের ছেদবিন্দু দ্বারাই বিন্দুটির প্রকৃত অবস্থান নির্ণীত হইবে।

উদাহরণ 1. একই সরলরেখায় অবস্থিত নহে এমন তিনটি বিন্দু হইতে সমদূরবর্তী একটি বিন্দু নির্ণয় করিতে হইবে।



মনে কর A, B, C তিনটি বিন্দু একই সরলরেখায় অবস্থিত নহে।

A, B, C হইতে সমদূরবর্তী বিন্দুটি নির্ণয় করিতে হইবে।

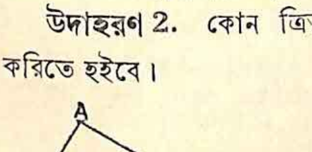
(1) A ও B হইতে সমদূরবর্তী বিন্দুর সঞ্চারপথ AB-র লম্ব-দ্বিখণ্ডক DE, এবং

(2) B ও C হইতে সমদূরবর্তী বিন্দুর সঞ্চারপথ BC-র লম্ব-দ্বিখণ্ডক FG.

সুতরাং নির্ণেয় বিন্দুটি DE ও FG এই উভয় সরলরেখার উপর অবস্থিত। কিন্তু AB ও BC একই সরলরেখা নয় বলিয়া DE ও FG সমান্তরাল নহে, অর্থাৎ উহারা যে কোন বিন্দুতে অবশ্যই ছেদ করিবে। মনে কর উহারা P-বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

এক্ষণে দুইটি সঞ্চারপথের ছেদবিন্দু P উভয় শর্তই যুগপৎ পরস্পর নিরপেক্ষভাবে পালন করিতেছে বলিয়া উহা A, B, C হইতে সমদূরবর্তী।

উদাহরণ 2. কোন ত্রিভুজের বাহুগুলি হইতে সমদূরবর্তী একটি বিন্দু নির্ণয় করিতে হইবে। [B. S. E. 1957]



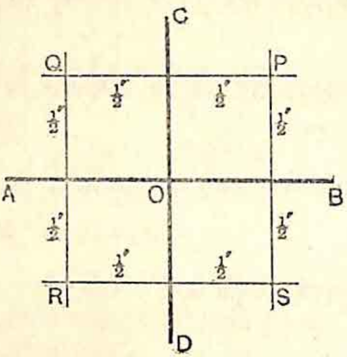
মনে কর, ABC ত্রিভুজের AB, BC ও CA হইতে সমদূরবর্তী বিন্দুটি নির্ণয় করিতে হইবে।

(1) BA এবং BC হইতে সমদূরবর্তী বিন্দুর সঞ্চারপথ ∠B-এর সমদ্বিখণ্ডক, এবং (2) BC এবং CA হইতে সমদূরবর্তী বিন্দুর সঞ্চারপথ ∠C-র সমদ্বিখণ্ডক।

মনে কর উক্ত সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় P-বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে; সুতরাং P উভয় শর্তই পালন করিতেছে।

সুতরাং P নির্ণেয় বিন্দু, যাহা AB, BC ও CA হইতে সমদূরবর্তী।

উদাহরণ 3. AB, CD দুইটি সরলরেখা O-বিন্দুতে লম্বভাবে ছেদ করিয়াছে; উভয় সরলরেখা হইতে $\frac{1}{2}''$ দূরবর্তী যতগুলি সম্ভব বিন্দু নির্ণয় কর।



AB-র উভয় পার্শ্বে $\frac{1}{2}''$ দূরে এবং CD-র উভয় পার্শ্বে $\frac{1}{2}''$ দূরে দুই দুইটি সমান্তরাল সরলরেখা অঙ্কিত কর।

মনে কর এই সরলরেখা চারিটি P, Q, R, S বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

এক্ষণে, AB হইতে $\frac{1}{2}''$ দূরবর্তী বিন্দুর সঞ্চারপথ PQ ও SR এবং CD হইতে $\frac{1}{2}''$ দূরবর্তী বিন্দুর সঞ্চারপথ PS ও QR।

এই সঞ্চারপথ চারিটি P, Q, R, S এই চারিটি বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। সুতরাং উহারা উভয় শর্তই পালন করিতেছে। সুতরাং নির্ণেয় বিন্দুগুলি—P, Q, R, S.

অনুশীলনী 17

1. কোন বৃত্তের পরিধি হইতে নির্দিষ্ট ব্যবধানে অবস্থিত কোন বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

2. AB সরলরেখার উপর এমন একটি বিন্দু নির্ণয় কর যাহা X, Y দুইটি স্থির বিন্দু হইতে সমদূরবর্তী। ইহা কখন অসম্ভব ?

3. XY সরলরেখার উপর এমন একটি বিন্দু নির্ণয় কর যাহা AB, CD দুইটি নির্দিষ্ট সরলরেখা হইতে সমদূরবর্তী।

4. একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে অতিভুজ করিয়া যতগুলি সমকোণী ত্রিভুজ অঙ্কিত করা যায়, তাহাদের শীর্ষবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

5. A একটি নির্দিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র এবং X-বিন্দুটি ঐ নির্দিষ্ট বৃত্তের পরিধি হইতে নির্দিষ্ট ব্যবধানে অবস্থিত ; AX-এর মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

6. দুইটি সমান্তরাল সরলরেখা এবং উহাদের অন্তর্বর্তী কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে সমব্যবধানে অবস্থিত একটি বিন্দু নির্ণয় কর।

7. ত্রিভুজের তিন বাহু হইতে সমদূরবর্তী একটি বিন্দু নির্ণয় কর।

8. ভূমি ও উন্নতি নির্দিষ্ট আছে। এমন একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত কর যাহার শীর্ষবিন্দুটি একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর অবস্থিত থাকে।

9. কোন ত্রিভুজের শীর্ষ হইতে ভূমির উপর যতগুলি সরলরেখা টানা যায় তাহাদের মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

10. দুইটি নির্দিষ্ট সরলরেখা পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত। নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট তৃতীয় একটি সরলরেখা প্রান্তদ্বয় দ্বারা পূর্বোক্ত সরলরেখা দুইটিকে স্পর্শ করিয়া চলিতেছে। তৃতীয় সরলরেখাটির মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

11. দুইটি পরস্পরচ্ছেদী সরলরেখা হইতে নির্দিষ্ট ব্যবধানে অবস্থিত একটি বিন্দু নির্ণয় কর।

12. একটি নির্দিষ্ট চাপ হইতে বৃত্তটির কেন্দ্র নির্ণয় কর।

13. কোন ত্রিভুজের কৌণিক বিন্দু তিনটি হইতে সমদূরবর্তী একটি বিন্দু নির্ণয় কর।

14. এমন একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর যাহা কোন ত্রিভুজের কৌণিক বিন্দুত্রয় দিয়া যাইবে।

15. B-বিন্দুকে ব্যবহার না করিয়া ABC কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত কর।

16. কোন নির্দিষ্ট সরলরেখায় এমন একটি বিন্দু নির্ণয় কর, যাহা কোন নির্দিষ্ট সরলরেখা হইতে নির্দিষ্ট ব্যবধানে অবস্থিত। কখন ইহা অসম্ভব ?

On a given straight line, find a point which is at a given distance from another fixed straight line. When is it impossible ?

17. একটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে একটি নির্দিষ্ট বৃত্তের পরিধি পর্যন্ত অঙ্কিত যাবতীয় সরলরেখার মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

পঞ্চম অধ্যায়

সমবিন্দু বিষয়ক উপপাদ্য

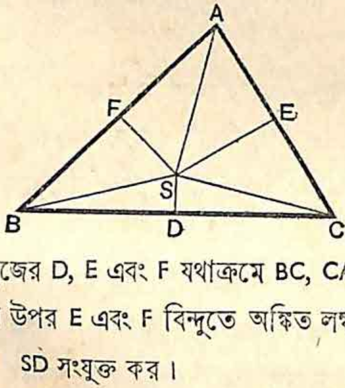
সমবিন্দু রেখা ও সমরেখ বিন্দু। তিন বা ততোধিক সরলরেখা একটি বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিলে উহাদিগকে **সমবিন্দু** (Concurrent) সরলরেখা বলে, এবং উহাদের ছেদ-বিন্দুকে **সম্পাত বিন্দু** (Point of concurrence) বলে।

তিন বা ততোধিক বিন্দু একই সরলরেখায় অবস্থিত হইলে উহাদিগকে **সমরেখ** (Collinear) বিন্দু বলে।

উপপাদ্য 34

ত্রিভুজের তিন বাহুর লম্ব-দ্বিখণ্ডক তিনটি সমবিন্দু।

[The perpendicular bisectors of the sides of a triangle are concurrent.]



মনে কর ABC ত্রিভুজের D, E এবং F যথাক্রমে BC, CA, AB বাহু তিনটির মধ্যবিন্দু। AC এবং AB বাহু দুইটির উপর E এবং F বিন্দুতে অঙ্কিত লম্ব দুইটি মনে কর S-বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিয়াছে। SD সংযুক্ত কর।

প্রমাণ করিতে হইবে SD, BC-র উপর লম্ব।

SA, SB, SC যুক্ত কর।

প্রমাণ। ES, AC-র লম্ব-দ্বিখণ্ডক, ∴ S-বিন্দু A ও C হইতে সমদূরবর্তী অর্থাৎ SA = SC, এইরূপে SA = SB. ∴ SB = SC.

অতএব, S-বিন্দু BC-র লম্ব-দ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত,

অর্থাৎ SD, BC-র উপর লম্ব।

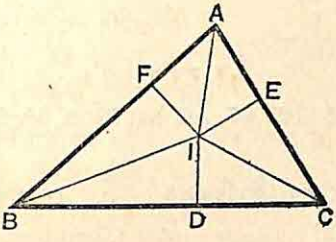
সংজ্ঞা। ত্রিভুজের তিন বাহুর লম্ব-দ্বিখণ্ডক তিনটির সম্পাত বিন্দুকে ঐ ত্রিভুজের **পরিকেন্দ্র** (Circum-centre) বলে। পূর্ববর্তী চিত্রে S, ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র।

পরিকেন্দ্র ত্রিভুজের মধ্যে, বাহিরে বা কোন বাহুর উপর অবস্থিত হইতে পারে।

প্রমাণ করা হইয়াছে SA = SB = SC. অতএব পরিকেন্দ্র ত্রিভুজের তিনটি কৌণিক বিন্দু হইতে সমদূরবর্তী। সুতরাং S-বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া SA ব্যাসার্ধ লইয়া বৃত্ত অঙ্কিত করিলে উহা B ও C বিন্দু দিয়া যাইবে। এই বৃত্তকে ABC ত্রিভুজের **পরিবৃত্ত** (Circum-circle) বলে। SA, SB, SC ইহাদের প্রত্যেকটিকে **পরিব্যাসার্ধ** (Circum-radius) বলে।

উপপাদ্য 35

ত্রিভুজের অন্তঃকোণগুলির সমদ্বিখণ্ডকত্রয় সমবিন্দু। [The bisectors of the interior angles of a triangle are concurrent.]



মনে কর ABC ত্রিভুজের ∠B ও ∠C-এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় I-বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। IA যুক্ত কর। প্রমাণ করিতে হইবে IA, ∠BAC-এর সমদ্বিখণ্ডক।

অঙ্কন। I-বিন্দু হইতে BC, CA এবং AB বাহু তিনটির উপর যথাক্রমে ID, IE, IF লম্ব টান।

প্রমাণ। BI, ∠ABC-এর সমদ্বিখণ্ডক; ∴ BI সরলরেখার যে কোন বিন্দু BA এবং BC হইতে সমদূরবর্তী। ∴ ID = IF ; এইরূপ CI-সরলরেখার যে কোন বিন্দু CA এবং CB হইতে সমদূরবর্তী। ∴ ID = IE. অতএব IF = IE.

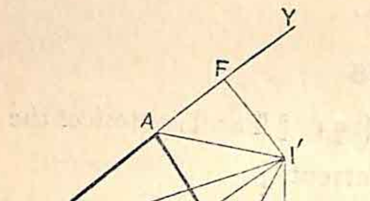
∴ I-বিন্দু, ∠BAC-এর সমদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত,

অর্থাৎ IA, ∠BAC-এর সমদ্বিখণ্ডক।

সংজ্ঞা। ত্রিভুজের কোণগুলির অন্তর্দ্বিখণ্ডক তিনটির সম্পাতবিন্দুকে ঐ ত্রিভুজের **অন্তঃকেন্দ্র** (In-centre) বলে। উপরের চিত্রে I, ABC ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র।

প্রমাণ করা হইয়াছে ID = IE = IF ; সুতরাং অন্তঃকেন্দ্র ত্রিভুজের তিনটি বাহু হইতে সমদূরবর্তী। অতএব I-বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া ID-র সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিলে উহা D, E এবং F বিন্দু দিয়া যাইবে এবং উহা BC, CA, AB-কে যথাক্রমে D, E, F বিন্দুতে স্পর্শ করিবে। এই বৃত্তটিকে ABC ত্রিভুজের **অন্তর্বৃত্ত** (Inscribed circle বা In-circle) বলে।

অনুসিদ্ধান্ত। কোন ত্রিভুজের একটি কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক এবং অন্য দুইটি কোণের বহির্দ্বিখণ্ডকদ্বয় সমবিন্দু।



মনে কর ABC ত্রিভুজের BC এবং BA বাহুদ্বয় যথাক্রমে X এবং Y বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত হইয়াছে, এবং মনে কর ∠ACX এবং ∠CAY বহিঃকোণ দুইটির সমদ্বিখণ্ডক I′-বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। I′ B যুক্ত কর।

প্রমাণ করিতে হইবে I′B, ∠ABC-এর সমদ্বিখণ্ডক।

অঙ্কন। I′ বিন্দু হইতে বর্ধিত BC, AC এবং বর্ধিত BA-র উপর যথাক্রমে I′D, I′E, I′F লম্ব টান।

প্রমাণ। CI′, ∠ACX-এর সমদ্বিখণ্ডক ; ∴ CI′-সরলরেখার যে কোন বিন্দু CX এবং AC হইতে সমদূরবর্তী। ∴ I′D = I′E.

এইরূপে I′E = I′F. ∴ I′D = I′F

∴ I′-বিন্দু ∠ABC-এর সমদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত, অর্থাৎ I′B, ∠ABC-এর সমদ্বিখণ্ডক।

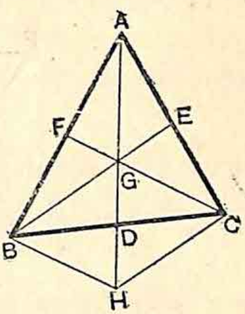
সংজ্ঞা। কোন ত্রিভুজের একটি কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক এবং অন্য দুইটি কোণের বহির্দ্বিখণ্ডক যে বিন্দুতে মিলিত হয় উহাকে ঐ ত্রিভুজের **বহিঃকেন্দ্র** (Ex-centre) বলে। উপরের চিত্রে I′, ABC ত্রিভুজের বহিঃকেন্দ্র।

প্রমাণ করা হইয়াছে I′D = I′E = I′F ; সুতরাং বহিঃকেন্দ্র ত্রিভুজের বাহু তিনটি হইতে সমদূরবর্তী। অতএব I′-বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া I′D-ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিলে উহা D, E এবং F বিন্দু দিয়া যাইবে এবং উহা বর্ধিত BC, AC এবং বর্ধিত BA-কে যথাক্রমে D, E, F বিন্দুতে স্পর্শ করিবে। এই বৃত্তকে ABC ত্রিভুজের **বহির্বৃত্ত** (Escribed circle বা Ex-circle) বলে।

উপপাদ্য 36

ত্রিভুজের মধ্যমা তিনটি সমবিন্দু।

[The medians of a triangle are concurrent.]



মনে কর ABC একটি ত্রিভুজ। ইহার দুইটি মধ্যমা BE এবং CF, G-বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিয়াছে। AG যুক্ত করিয়া বর্ধিত কর এবং মনে কর উহা BC-কে D-বিন্দুতে ছেদ করিল।

প্রমাণ করিতে হইবে D, BC-র মধ্যবিন্দু।

অঙ্কন। C-বিন্দু দিয়া EB-র সমান্তরাল CH সরলরেখা টান এবং মনে কর ইহা বর্ধিত AD-কে H-বিন্দুতে ছেদ করে। BH যুক্ত কর।

প্রমাণ। ACH ত্রিভুজে E, AC-র মধ্যবিন্দু এবং EG ∥ CH ;

$\therefore$ G-বিন্দু, AH-এর মধ্যবিন্দু।

আবার ABH ত্রিভুজে F, AB-র মধ্যবিন্দু, এবং G, AH-এর মধ্যবিন্দু,

$\therefore$ FG ∥ BH, অর্থাৎ GC ∥ BH.

সুতরাং BGCH একটি সামান্তরিক হইল। কিন্তু সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। $\therefore$ BD = DC অর্থাৎ D বিন্দু, BC-র মধ্যবিন্দু।

সংজ্ঞা। ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয়ের সম্পাত-বিন্দুকে ঐ ত্রিভুজের **ভর-কেন্দ্র** (Centroid) বলে।

অনুসিদ্ধান্ত। ত্রিভুজের প্রত্যেক মধ্যমা ভর-কেন্দ্রে ত্রিখণ্ডিত হয় এবং উহার কৌণিক বিন্দুর দিকের অংশ অপর অংশের দ্বিগুণ।

[Each median of a triangle is trisected at the centroid, the part of it towards the angular point being double of the other.]

মূল উপপাদ্যে প্রমাণিত হইয়াছে G-বিন্দু, AH-এর মধ্যবিন্দু অর্থাৎ AG = GH. আবার BGCH একটি সামান্তরিক ;

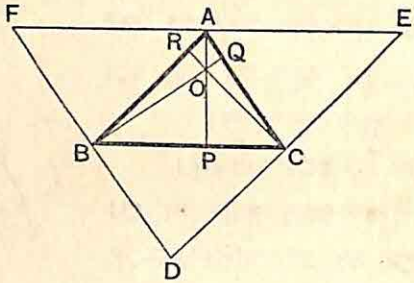
$\therefore$ GD = DH. অর্থাৎ $GD = \frac{1}{2}GH$. $\therefore$ $GD = \frac{1}{2}AG$.

সুতরাং $GD = \frac{1}{3}AD$ এবং AG = 2GD.

উপপাদ্য 37

ত্রিভুজের কৌণিক বিন্দু হইতে বিপরীত বাহুগুলির উপর অঙ্কিত লম্ব তিনটি সমবিন্দু।

[The perpendiculars drawn from the vertices of a triangle to the opposite sides are concurrent.]



মনে কর ABC ত্রিভুজের তিনটি কৌণিক বিন্দু হইতে BC, CA, AB বাহু তিনটির উপর যথাক্রমে AP, BQ, CR লম্ব টানা হইয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে,

AP, BQ এবং CR সমবিন্দু।

অঙ্কন। A, B এবং C বিন্দু দিয়া যথাক্রমে BC, CA এবং AB-র সমান্তরাল সরলরেখা সমূহ অঙ্কিত কর এবং মনে কর উহারা পরস্পর D, E, F বিন্দুতে ছেদ করিল।

প্রমাণ। অঙ্কন অনুসারে AFBC, ABCE এবং ABDC প্রত্যেকটিই সামান্তরিক।

$\therefore$ AF = BC = AE ; অতএব A বিন্দু EF-এর মধ্যবিন্দু।

আবার, BC ও EF সমান্তরাল এবং AP, BC-র উপর লম্ব ;

$\therefore$ AP, EF-এর উপর লম্ব।

এইরূপে BQ এবং CR যথাক্রমে FD এবং DE-র উপর লম্ব।

$\therefore$ AP, BQ এবং CR, DEF ত্রিভুজের বাহুগুলির মধ্যবিন্দু হইতে উহাদের উপর লম্ব।

$\therefore$ AP, BQ এবং CR সমবিন্দু।

সংজ্ঞা। কোন ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু হইতে বিপরীত বাহুর উপর পাতিত লম্বত্রয়ের ছেদ-বিন্দুকে **লম্ব-বিন্দু** (Ortho-centre) বলে। ABC ত্রিভুজে O লম্ব-বিন্দু।

কোন ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু হইতে বিপরীত বাহুর উপর পাতিত লম্বত্রয়ের পাদবিন্দুগুলি যুক্ত করিলে যে ত্রিভুজ উৎপন্ন হয় তাহাকে **পাদ-ত্রিভুজ** (Pedal or Ortho-centric triangle) বলে। উপপাদ্যের চিত্রে PQ, QR এবং RP যোগ করিলে PQR ত্রিভুজ ABC ত্রিভুজের পাদ-ত্রিভুজ হইবে।

অনুশীলনী 14

1. কোন ত্রিভুজের ভূমির প্রান্ত হইতে বিপরীত বাহুর উপর লম্বের পাদ-বিন্দুদ্বয় ভূমির মধ্যবিন্দু হইতে সমদূরবর্তী।

2. কোন ত্রিভুজের শিরঃকোণের সমদ্বিখণ্ডক এবং শীর্ষবিন্দু হইতে ভূমির উপর পাতিত লম্বের মধ্যবর্তী কোণ, ভূমি-সংলগ্ন কোণদ্বয়ের অন্তরের অর্ধ।

3. ABCD ট্রাপিজিয়মের AB বাহু DC বাহুর সমান্তরাল এবং AD = BC ; প্রমাণ কর ∠ADC = ∠BCD.

4. কোন চতুর্ভুজের তুইটি বিপরীত বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা যদি উক্ত বাহু তুইটির প্রত্যেকের উপর লম্ব হয়, প্রমাণ কর যে চতুর্ভুজের অপর বাহু তুইটি পরস্পর সমান।

5. ABC ত্রিভুজের AC অপেক্ষা AB বৃহত্তর। যদি BC বাহুর মধ্যবিন্দু X হয়, এবং AX যুক্ত করা হয়, প্রমাণ কর AXB একটি স্থূল কোণ।

6. ABCD সামান্তরিকের AB ও CD বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু E ও F ; প্রমাণ কর DE ও BF, AC কর্ণকে ত্রিখণ্ডিত করে।

7. কোন সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি বর্ধিত করা হইলে, বর্ধিতাংশের যে কোন বিন্দু হইতে সমান বাহু তুইটির দূরত্বের অন্তর ধ্রুবক।

8. ত্রিভুজের মধ্যমা তিনটির সমষ্টি পরিসীমার তিন-চতুর্থাংশ অপেক্ষা বৃহত্তর।

9. কোন ত্রিভুজের তুইটি মধ্যমা পরস্পর সমান হইলে ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু হইবে।

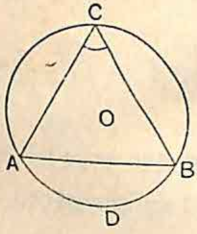
দশম শ্রেণীর পাঠ্যাংশ

ষষ্ঠ অধ্যায়

বৃত্ত ও প্রতিসাম্য

বৃত্ত সম্বন্ধে সাধারণ সংজ্ঞাসমূহ সপ্তমশ্রেণীর পাঠ্যাংশে বিবৃত হইয়াছে। বর্তমান অধ্যায় আরম্ভ করিবার পূর্বে সেগুলি একবার পুনরাবৃত্তি করিয়া লওয়া যাইতে পারে। নিম্নে বৃত্তবিষয়ক আরও কয়েকটি সংজ্ঞা প্রদত্ত হইল।

কোন জ্যা সমগ্র বৃত্তপরিধিকে দুইটি অসমান চাপে বিভক্ত করিলে, তন্মধ্যে বৃহত্তর চাপটিকে **অধিচাপ** (Major arc) এবং ক্ষুদ্রতর চাপটিকে **উপচাপ** (Minor arc) বলে। উক্ত চাপ দুইটিকে পরস্পর **অনুবন্ধী** (Conjugate) বলে।



চিত্রে ACB অধিচাপ এবং ADB উপচাপ।

ACB এবং ADB চাপ দুইটি পরস্পর অনুবন্ধী।

কোন জ্যা দ্বারা বৃত্ত দুই অংশে বিভক্ত হইলে, প্রত্যেক অংশকে **বৃত্তাংশ** (Segment of a circle) বলে।

জ্যা ও অধিচাপ দ্বারা সীমাবদ্ধ বৃত্তাংশকে **অধিবৃত্তাংশ** (Major segment) এবং জ্যা ও উপচাপ দ্বারা সীমাবদ্ধ বৃত্তাংশকে **উপবৃত্তাংশ** (Minor segment) বলে।

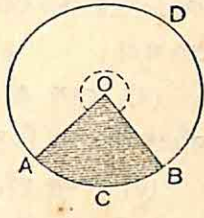
ACB ক্ষেত্রটি অধিবৃত্তাংশ এবং ADB ক্ষেত্রটি উপবৃত্তাংশ। বৃত্তাংশের জ্যাকে উহার ভূমি (base) বলে।

জ্যা কেন্দ্রগামী হইলে বৃত্তাংশ দুইটি পরস্পর সমান হয়, এবং প্রত্যেকটি বৃত্তাংশ অর্ধবৃত্ত হয়।

কোন বৃত্তাংশের জ্যা-এর প্রান্তবিন্দুদ্বয় চাপের কোন বিন্দুর সহিত যুক্ত করিলে জ্যা-এর সম্মুখে পরিধিতে যে কোণ উৎপন্ন হয় তাহাকে **বৃত্তাংশস্থ কোণ** (Angle in a segment) বলে। ACB একটি বৃত্তাংশস্থ কোণ।

দুইটি ব্যাসার্ধ এবং তদ্দ্বারা ছিন্ন চাপ এই উভয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রটিকে **বৃত্তকলা** (Sector of a circle) বলে।

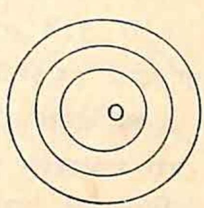
OACB, OADB ক্ষেত্র দুইটির প্রত্যেকটিই বৃত্তকলা। বৃত্তকলার ব্যাসার্ধ দুইটির অন্তর্ভূত কোণকে বৃত্তকলার কোণ (Angle of a sector) বলে।



∠AOB এবং প্রবৃদ্ধ ∠AOB বৃত্তকলার কোণ।

বৃত্তকলার কোণ দুই সমকোণের সমান হইলে বৃত্তকলাটি অর্ধবৃত্ত হয়।

একই বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া বিভিন্ন ব্যাসার্ধযুক্ত একাধিক বৃত্ত অঙ্কিত হইলে উহাদিগকে **এককেন্দ্রীয় বৃত্ত** (Concentric circles) বলে।



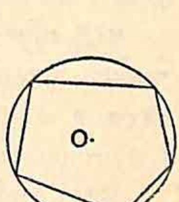
এককেন্দ্রীয় বৃত্তের ব্যাসার্ধগুলি সমান হইলে সমস্ত বৃত্ত একটি মাত্র বৃত্তে পর্যবসিত হয়।

এককেন্দ্রীয় বৃত্ত কদাচ পরস্পর ছেদ করিতে পারে না।

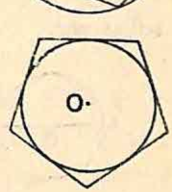
চারি বা ততোধিক বিন্দু দিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কন সম্ভব হইলে উক্ত বিন্দুগুলিকে **সমবৃত্ত** (Concyclic) বলা হয়।

যে ঋজুরেখ ক্ষেত্রের শীর্ষবিন্দু সমূহ দিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত হইতে পারে, তাহাকে **বৃত্তস্থ** (Cyclic) ক্ষেত্র বলে।

এরূপ স্থলে বৃত্ত হিসাবে ক্ষেত্রটি বৃত্তের **অন্তর্লিখিত** (Inscribed) এবং ক্ষেত্র হিসাবে বৃত্তটি ক্ষেত্রের **পরিলিখিত** (Circumscribed) বৃত্ত বা সংক্ষেপে **পরিবৃত্ত** (Circum-circle)।



যদি কোন ঋজুরেখ ক্ষেত্রের সকল বাহু স্পর্শ করাইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কন করা হয়, তাহা হইলে বৃত্তটিকে ক্ষেত্রের **অন্তর্বৃত্ত** (In-circle বা Inscribed circle) এবং ক্ষেত্রটিকে বৃত্তের **পরিলিখিত** (Circumscribed about the circle) বলা হয়।



বৃত্তবিষয়ক কয়েকটি বিশেষ সিদ্ধান্ত।

(1) পরিধি দ্বারা বৃত্ত সম্পূর্ণভাবে সীমাবদ্ধ ; সুতরাং কোন সরলরেখা পরিধিকে এক বিন্দুতে ছেদ করিলে ঐ সরলরেখা বর্ধিত হইয়া পরিধিকে আর একটি বিন্দুতে ছেদ করে।

(2) কেন্দ্র হইতে বৃত্তের মধ্যস্থ যে কোন বিন্দুর দূরত্ব ব্যাসার্ধ অপেক্ষা কম এবং বহিঃস্থ যে কোন বিন্দুর দূরত্ব ব্যাসার্ধ অপেক্ষা বেশী। বিপরীতক্রমে,

(3) কেন্দ্র হইতে কোন বিন্দুর দূরত্ব ব্যাসার্ধ অপেক্ষা কম হইলে বিন্দুটি বৃত্তমধ্যস্থ এবং বেশী হইলে উহা বৃত্তের বহিঃস্থ।

(4) সমান ব্যাস বা ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তগুলি সর্বসম।

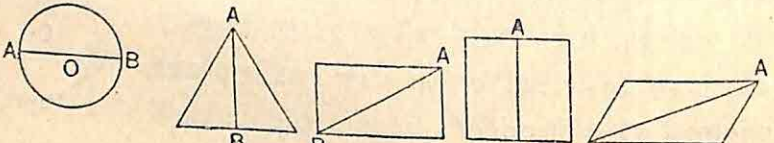
(5) দুইটি বৃত্তের একই কেন্দ্র এবং উভয়ের পরিধিতে একটি মাত্র বিন্দু সাধারণ থাকিলেই, বৃত্ত দুইটি সর্বসম হয়।

প্রতিসাম্য (Symmetry)। কোন জ্যামিতিক ক্ষেত্রকে উহার কোন ছেদক সরলরেখার বরাবর ভাঁজ করিলে যদি এক অংশ অপর অংশের সহিত সম্পূর্ণভাবে মিলিয়া যায়, তবে ক্ষেত্রটিকে ঐ ছেদক সরলরেখার উভয় পার্শ্বে **প্রতিসম** (Symmetrical about the straight line) বলা হয় এবং উক্ত সরলরেখাটিকে বলা হয় **প্রতিসাম্য অক্ষ** (Axis of symmetry)।

কোন ক্ষেত্রের প্রতিসাম্য অক্ষের এক পার্শ্বের একার্ধ অপর পার্শ্বের অপরার্ধের প্রতিবিম্ববৎ।

দুইটি প্রতিসম ক্ষেত্রের P ও Q দুইটি অনুরূপ বিন্দু হইলে, PQ সরলরেখা প্রতিসাম্য অক্ষদ্বারা লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত হইবে ; সুতরাং প্রতিসাম্য অক্ষের যে কোন বিন্দু হইতে P ও Q সমদূরবর্তী। P ও Q এই দুইটি বিন্দুকে **প্রতিসমরূপে বিপরীত** (Symmetrically opposite) বলা হয়।

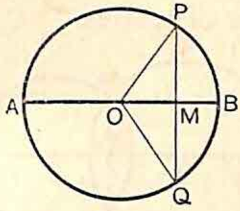
নীচের ক্ষেত্রগুলির কোন্ কোন্টি AB সরলরেখার উভয় পার্শ্বে প্রতিসম পরীক্ষা করিয়া দেখ :



বৃত্তের প্রতিসাম্য ধর্ম।

(1) বৃত্ত ব্যাসের উভয় পার্শ্বে প্রতিসম।

[A circle is symmetrical about the diameter.]



মনে কর, APBQ বৃত্তের কেন্দ্র O এবং AB যে কোন ব্যাস।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, বৃত্তটি AB সরলরেখার উভয় পার্শ্বে প্রতিসম।

O-বিন্দুতে AB-র সহিত সমান কোণ করিয়া উভয় পার্শ্বে OP, OQ দুইটি ব্যাসার্ধ অঙ্কিত কর।

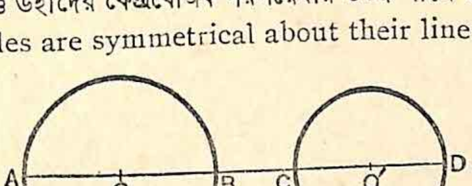
প্রমাণ। এখন বৃত্তটিকে AB-র বরাবর ভাঁজ করিলে, OQ, OP-র উপর পড়িবে, কারণ $\angle POB = \angle QOB$.

আবার $OP = OQ$, $\therefore$ Q, P-র উপর পড়িবে।

এইরূপে AQB চাপের যে কোন বিন্দু APB চাপের কোন না কোন বিন্দুর সহিত মিলিত হইবে, অর্থাৎ AQB এবং APB চাপ দুইটি সম্পূর্ণভাবে মিলিয়া যাইবে। অতএব বৃত্তটি ব্যাসের উভয় পার্শ্বে প্রতিসম।

(2) দুইটি বৃত্ত উহাদের কেন্দ্রযোজক সরলরেখার উভয় পার্শ্বে প্রতিসম।

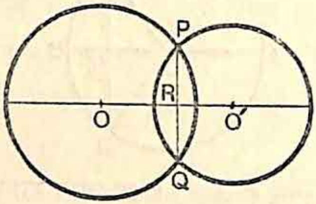
[Two circles are symmetrical about their line of centres.]



প্রমাণ। মনে কর, O, O′ দুইটি বৃত্তের কেন্দ্র এবং OO′ সরলরেখা উভয় দিকে বর্ধিত হইয়া বৃত্তদ্বয়কে যথাক্রমে A, B এবং C, D, দুই দুইটি বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। তাহা হইলে AB এবং CD বৃত্ত দুইটির ব্যাস ; সুতরাং উহারা নিজ নিজ বৃত্তের প্রতিসাম্য অক্ষ। অতএব বৃত্ত দুইটি OO′ সরলরেখার উভয় পার্শ্বে প্রতিসম।

(3) দুইটি বৃত্ত পরস্পর ছেদ করিলে উহাদের সাধারণ জ্যা কেন্দ্রযোজক সরলরেখা দ্বারা লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

[If two circles intersect, their common chord is bisected at right angles by their line of centres.]



মনে কর দুইটি বৃত্তের কেন্দ্র O, O′ এবং উহারা P-বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিয়াছে। OO′ সরলরেখার উপর PR লম্ব টান এবং উহাকে Q পর্যন্ত বর্ধিত কর যেন RQ = RP হয়।

প্রমাণ। এক্ষণে OO′ সরলরেখা সম্পর্কে P ও Q-বিন্দু পরস্পর প্রতিসমরূপে বিপরীত বিন্দু।

সুতরাং P যখন উভয় বৃত্তে অবস্থিত, Q-বিন্দুও উভয়বৃত্তে অবস্থিত। অর্থাৎ PQ উভয় বৃত্তের সাধারণ জ্যা এবং অঙ্কন অনুসারে ইহা OO′ সরলরেখা দ্বারা লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা

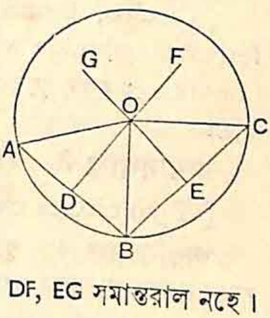
জ্যা, চাপ, বৃত্তাংশ ও কোণ

উপপাদ্য 38

একই সরলরেখায় অবস্থিত নহে এরূপ যে কোন তিনটি বিন্দু দিয়া একটিমাত্র বৃত্ত অঙ্কন করা যায়।

[One and only one circle can pass through any three points not in the same straight line.]

মনে কর A, B, C এমন তিনটি বিন্দু যাহারা এক সরলরেখায় অবস্থিত নহে।



প্রমাণ করিতে হইবে যে, A, B, C বিন্দু তিনটি দিয়া একটি মাত্র বৃত্ত অঙ্কন করা যায়।

অঙ্কন। AB, BC যুক্ত কর এবং AB-র লম্ব-দ্বিখণ্ডক DF ও BC-র লম্ব-দ্বিখণ্ডক EG অঙ্কিত কর।

প্রমাণ। AB, BC এক সরলরেখায় অবস্থিত নহে বলিয়া DF, EG সমান্তরাল নহে। সুতরাং DF, EG যে কোন বিন্দু O-তে পরস্পর ছেদ করিবে।

O-বিন্দু, AB-র লম্ব-দ্বিখণ্ডকে অবস্থিত,

$\therefore$ OA = OB.

আবার O-বিন্দু, BC-র লম্ব-দ্বিখণ্ডকে অবস্থিত,

$\therefore$ OB = OC.

$\therefore$ OA = OB = OC, অর্থাৎ O-বিন্দু A, B, C হইতে সমদূরবর্তী।

সুতরাং O-কে কেন্দ্র করিয়া OA-ব্যাসার্ধ লইয়া বৃত্ত অঙ্কিত করিলে উহা A, B, C বিন্দু দিয়া যাইবে।

আবার, DF ও EG সরলরেখা দুইটি O ভিন্ন অন্য কোন বিন্দুতে ছেদ করিতে পারে না; সুতরাং A, B, C হইতে O ভিন্ন অন্য কোন সমদূরবর্তী বিন্দু থাকিতে পারে না। অতএব A, B, C দিয়া অন্য কোন বৃত্তও অঙ্কিত করা যায় না।

দ্রষ্টব্য। তিনটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যে বৃত্ত অঙ্কিত হয়, তাহার কেন্দ্র এবং ব্যাসার্ধ নির্দিষ্ট

অনুসিদ্ধান্ত 1. যে কোন ত্রিভুজের তিনটি কৌণিক বিন্দু দিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কন করা যায়।

[A circle may be drawn through the vertices of any triangle.]

যেহেতু, ত্রিভুজের কৌণিক বিন্দু তিনটি একই সরলরেখায় অবস্থিত নহে।

অনুসিদ্ধান্ত 2. যে সকল বৃত্তের পরিধিস্থ তিনটি বিন্দু সাধারণ, তাহারা পরস্পর সমাপতিত হয়।

[Circles, having three points common on their circumferences coincide with one another.]

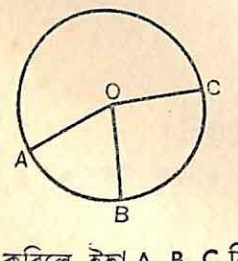
কারণ, যে সকল বৃত্তের পরিধির তিনটি বিন্দু সাধারণ তাহাদের কেন্দ্র এবং ব্যাসার্ধ অভিন্ন।

অনুসিদ্ধান্ত 3. দুইটি বৃত্ত দুই-এর অধিক বিন্দুতে ছেদ করিতে পারে না।

[Two circles cannot intersect at more than two points.]

অনুসিদ্ধান্ত 4. বৃত্তের মধ্যস্থিত কোন বিন্দু হইতে পরিধি পর্যন্ত দুই-এর অধিক সমান সরলরেখা অঙ্কন করা সম্ভব হইলে, উক্ত বিন্দুটি বৃত্তের কেন্দ্র।

[If from a point within a circle more than two equal straight lines can be drawn to the circumference, that point is the centre of the circle.]



মনে কর ABC বৃত্তের অন্তর্গত O-বিন্দু হইতে OA, OB, OC তিনটি পরস্পর সমান সরলরেখা পরিধি পর্যন্ত অঙ্কিত হইয়াছে।

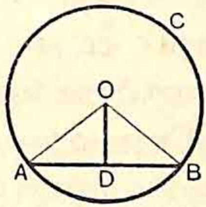
প্রমাণ করিতে হইবে যে, O, ABC বৃত্তের কেন্দ্র। O বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া OA ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিলে, ইহা A, B, C বিন্দু তিনটি দিয়া যাইবে, কারণ OA = OB = OC. কিন্তু A, B, C বিন্দু তিনটি দিয়া একটি মাত্র বৃত্ত অঙ্কিত হইতে পারে। সুতরাং প্রদত্ত বৃত্ত হইতে এই বৃত্তটি অভিন্ন। অতএব, প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্র O.

উপপাদ্য 39

বৃত্তের কেন্দ্র হইতে অঙ্কিত কোন সরলরেখা ব্যাস নহে এমন কোন জ্যা-কে সমদ্বিখণ্ডিত করিলে, উক্ত সরলরেখা, জ্যা-এর উপর লম্ব হইবে।

বিপরীত ক্রমে, বৃত্তের কেন্দ্র হইতে ব্যাস ভিন্ন অপর কোন জ্যা-এর উপর অঙ্কিত লম্ব উক্ত জ্যা-কে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে।

[If a straight line drawn from the centre of a circle bisects a chord which is not a diameter, it is at right angles to the chord. *Conversely*, the perpendicular from the centre of a circle to a chord other than a diameter bisects the chord.]



মনে কর, ABC-বৃত্তের কেন্দ্র O এবং AB একটি জ্যা যাহা ব্যাস নহে।

এখন, যদি OD, AB-কে সমদ্বিখণ্ডিত করে,

প্রমাণ করিতে হইবে যে, OD, AB-র উপর লম্ব।

অঙ্কন। OA, OB যুক্ত কর।

প্রমাণ। OAD, OBD ত্রিভুজদ্বয়ে,

OA = OB (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ)

AD = DB (কল্পনা), OD সাধারণ

$\therefore \triangle OAD \equiv \triangle OBD$

অতএব, $\angle ODA = \angle ODB$. কিন্তু ADB একটি সরলরেখা বলিয়া $\angle ODA$, $\angle ODB$ সন্নিহিত কোণ দুইটির সমষ্টি 2 সমকোণ, সুতরাং উহাদের প্রত্যেকটি সমকোণ।

$\therefore$ OD, AB-র উপর লম্ব।

বিপরীত ক্রমে, ABC বৃত্তের কেন্দ্র O এবং AB একটি জ্যা যাহা ব্যাস নহে। যদি OD, AB-র উপর লম্ব হয়, প্রমাণ করিতে হইবে যে AD = DB.

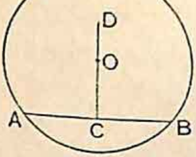
অঙ্কণ। OA, OB যুক্ত কর।

প্রমাণ। ODA, ODB সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ে,

অতিভুজ OA = অতিভুজ OB, OD সাধারণ ;

$\therefore$ $\triangle ODA \equiv \triangle ODB$. অতএব AD = DB.

অনুসিদ্ধান্ত 1. বৃত্তের জ্যা-এর লম্ব-দ্বিখণ্ডক বৃত্তের কেন্দ্র দিয়া যায়।



মনে কর, CD, AB জ্যা-এর লম্ব-দ্বিখণ্ডক।

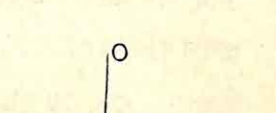
প্রমাণ করিতে হইবে যে, CD বৃত্তের কেন্দ্র O দিয়া যাইবে।

প্রমাণ। CD, AB-র লম্ব-দ্বিখণ্ডক বলিয়া উহা A ও B হইতে সমদূরবর্তী সকল বিন্দুরই সঞ্চারপথ।

A ও B হইতে কেন্দ্র O সমদূরবর্তী, স্থতরাং O-বিন্দু CD-র উপর অবস্থিত ; অর্থাৎ CD O-বিন্দু দিয়া যাইবে।

অনুসিদ্ধান্ত 2. কোন সরলরেখা বৃত্তপরিধিকে দুই-এর অধিক বিন্দুতে ছেদ করিতে পারে না। [A straight line cannot intersect a circle at more than two points]

মনে কর, যে বৃত্তের কেন্দ্র O তাহা কোন সরলরেখাকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।



AB-র উপর OC লম্ব টান।

প্রমাণ। তাহা হইলে, AC = CB.

যদি বৃত্তটি AB সরলরেখাকে তৃতীয় বিন্দু D-তে ছেদ করিত, তাহা হইলে AC = CD হইত, কাজেই CB = CD হইত, কিন্তু ইহা অসম্ভব।

স্থতরাং বৃত্তটি AB সরলরেখাকে A ও B ভিন্ন অপর কোন তৃতীয় বিন্দুতে ছেদ করিতে পারে না।

অনুসিদ্ধান্ত 3. জ্যা-এর কোন অংশই বৃত্তপরিধির বহির্ভূত নহে।
[No part of a chord is outside the circle.]

অনুশীলনী 19

1. কোন বৃত্তের জ্যা 8″, কেন্দ্র হইতে জ্যা-এর উপর লম্ব 3″; বৃত্তের ব্যাসার্ধ কত ?

2. কোন বৃত্তের ব্যাসার্ধ 2·6″ এবং কেন্দ্র হইতে একটি জ্যা-এর দূরত্ব 1″; জ্যা-এর দৈর্ঘ্য কত ?

3. 13 সে. মি. ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট কোন বৃত্তের একটি জ্যা-এর দৈর্ঘ্য 24 সে. মি.। কেন্দ্র হইতে জ্যা-এর দূরত্ব কত ?

4. কোন সরলরেখা এককেন্দ্রীয় দুইটি বৃত্তকে ছেদ করিলে, উভয় পরিধির মধ্যবর্তী সরলরেখার ছিন্ন অংশ দুইটি সমান। The parts of the straight line intercepted between the circumferences of two concentric circles are equal.

5. পরস্পরচ্ছেদী দুইটি বৃত্তের কেন্দ্রযোজক সরলরেখা সাধারণ জ্যা-কে লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত করে। The line of centres of two intersecting circles bisects the common chord at right angles.

6. এক বিন্দু হইতে অঙ্কিত দুইটি সমান জ্যা-এর অন্তর্গত কোণের সমদ্বিখণ্ডক কেন্দ্রগামী। The straight line, which bisects the angle between two equal chords of a circle drawn from the same point, passes through the centre.

7. এমন একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর যাহার কেন্দ্রটি কোন নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর থাকে এবং পরিধি দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যায়। Describe a circle passing through two given points and having its centre on a given straight line.

8. নির্দিষ্ট ব্যাসার্ধযুক্ত এমন একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর যাহা দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যায়। কখন অঙ্কন অসম্ভব হইবে ? Describe a circle of given radius to pass through two given points. When does the construction fail ?

9. দুইটি সমান্তরাল জ্যা-এর মধ্যবিন্দু-যোজক সরলরেখা বৃত্তের কেন্দ্রগামী। The straight line which joins the middle points of two parallel chords of a circle passes through the centre.

10. বৃত্তের সমান্তরাল জ্যা-সমূহের মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর। Find the locus of the middle points of parallel chords of a circle.

(C. U. 1933)

11. ব্যাস ব্যতীত অন্য কোন দুইটি জ্যা পরস্পর সমদ্বিখণ্ডিত হইতে পারে না। Diameters are the only chords which bisect each other.

(C. U. 1932)

12. বৃত্তস্থ সামান্তরিকের কর্ণদ্বয়ের ছেদ-বিন্দুটিই বৃত্তের কেন্দ্র।

(E. B. S. B. 1948)

13. বৃত্তস্থ সামান্তরিক একটি আয়তক্ষেত্র। A cyclic parallelogram is a rectangle.

14. এমন একটি জ্যা অঙ্কিত কর যাহা বৃত্তমধ্যস্থ কোন নির্দিষ্ট বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়। Through a given point within a circle draw a chord which shall be bisected at that point.

15. পরস্পরচ্ছেদী দুইটি বৃত্তের যে কোন ছেদ-বিন্দু দিয়া কেন্দ্রযোজক সরলরেখার সমান্তরাল করিয়া একটি সরলরেখা পরিধি পর্যন্ত উভয়দিকে প্রসারিত করিলে উহা কেন্দ্রযোজক সরলরেখার দ্বিগুণ হইবে।

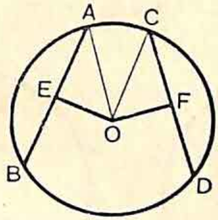
A straight line is drawn through a point of intersection of two circles parallel to the line of centres and terminated by the circumferences. Prove that its length is twice that of the straight line joining the centres.

উপপাদ্য 40

একই বৃত্তের সমান জ্যাসমূহ কেন্দ্র হইতে সমদূরবর্তী।

বিপরীতক্রমে, একই বৃত্তের কেন্দ্র হইতে সমদূরবর্তী জ্যাসমূহ পরস্পর সমান।

[In the same circle equal chords are equidistant from the centre. *Conversely*, chords which are equidistant from the centre of a circle are equal.]



মনে কর, AB ও CD, কোন বৃত্তের দুইটি জ্যা এবং O উহার কেন্দ্র।
O হইতে AB ও CD-র উপর যথাক্রমে OE এবং OF লম্ব টান।
তাহা হইলে OE ও OF, O হইতে যথাক্রমে AB ও CD-র দূরত্ব।
যদি AB = CD হয়, প্রমাণ করিতে হইবে OE = OF.

অঙ্কন। OA, OC যুক্ত কর।

প্রমাণ। OE, AB জ্যা-এর উপর লম্ব, $\therefore$ AE = $\frac{1}{2}$AB

এবং OF, CD জ্যা-এর উপর লম্ব, $\therefore$ CF = $\frac{1}{2}$CD

$\therefore$ AE = CF ($\because$ AB = CD)

এক্ষণে AEO, CFO সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ে,

অতিভুজ AO = অতিভুজ CO (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলিয়া)

AE = CF

$\therefore$ $\triangle$AEO $\equiv$ $\triangle$CFO ; অতএব OE = OF.

বিপরীতক্রমে, যদি OE = OF হয়, প্রমাণ করিতে হইবে AB = CD.

অঙ্কন। OA, OC যুক্ত কর।

প্রমাণ। OE, AB জ্যা-এর উপর লম্ব, $\therefore$ AE = $\frac{1}{2}$AB, তদ্রূপ CF = $\frac{1}{2}$CD.
AEO, CFO সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ে, অতিভুজ AO = অতিভুজ CO, OE = OF,

$\therefore$ $\triangle$AEO $\equiv$ $\triangle$CFO. $\therefore$ AE = CF, অর্থাৎ $\frac{1}{2}$AB = $\frac{1}{2}$CD,

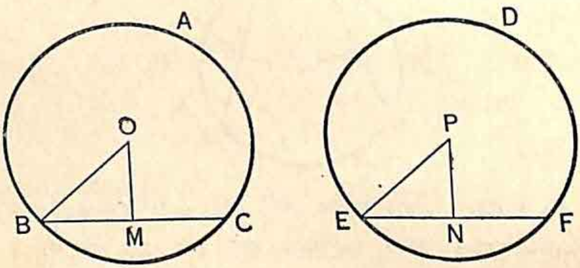
$\therefore$ AB = CD.

উপপাদ্য 40 (A)

সমান সমান বৃত্তে সমান জ্যাসমূহ কেন্দ্র হইতে সমদূরবর্তী।

বিপরীতক্রমে, সমান সমান বৃত্তের কেন্দ্র হইতে সমদূরবর্তী জ্যাসমূহ পরস্পর সমান।

[In equal circles, equal chords are equidistant from the centres. *Conversely*, chords which are equidistant from the centres of equal circles are equal.]



মনে কর ABC ও DEF দুইটি সমান বৃত্তে BC ও EF দুইটি জ্যা। ABC বৃত্তের কেন্দ্র O হইতে BC-এর উপর OM লম্ব এবং DEF বৃত্তের কেন্দ্র P হইতে EF-এর উপর PN লম্ব টানা হইয়াছে। তাহা হইলে OM ও PN কেন্দ্র O ও P হইতে যথাক্রমে BC ও EF-এর দূরত্ব।

যদি BC = EF হয়, প্রমাণ করিতে হইবে OM = PN.

OB, PE যুক্ত কর।

OM, কেন্দ্র O হইতে BC জ্যা-এর উপর লম্ব, $\therefore$ BM = $\frac{1}{2}$BC

PN, কেন্দ্র P হইতে EF জ্যা-এর উপর লম্ব, $\therefore$ EN = $\frac{1}{2}$EF.

কিন্তু BC = EF, সুতরাং BM = EN,

এখন OBM, PEN সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ে অতিভুজ OB = অতিভুজ PE (সমান বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলিয়া) এবং BM = EN. $\therefore$ OBM, PEN ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

$\therefore$ OM = PN.

বিপরীতক্রমে, যদি OM = PN হয়, প্রমাণ করিতে হইবে BC = EF.

OB, PE যুক্ত কর।

OM, কেন্দ্র O হইতে BC-জ্যা-এর উপর লম্ব, $\therefore$ $BM = \frac{1}{2}BC$.

PN, কেন্দ্র P হইতে EF-জ্যা এর উপর লম্ব, $\therefore$ $EN = \frac{1}{2}EF$.

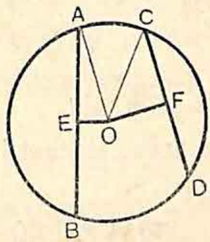
এখন OBM, PEN সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ে অতিভুজ OB = অতিভুজ PE (সমান বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলিয়া), OM = PN (কল্পনা) $\therefore$ OBM, PEN ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম ; $\therefore$ BM = EN অর্থাৎ $\frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}EF$ $\therefore$ BC = EF.

একটি প্রয়োজনীয় উপপাদ্য

বৃত্তের দুইটি জ্যা-এর যেটি কেন্দ্রের অধিকতর নিকটবর্তী সেইটি অপরটি অপেক্ষা বৃহত্তর।

বিপরীতক্রমে, বৃত্তের দুইটি জ্যা-এর বৃহত্তরটি ক্ষুদ্রতরটি অপেক্ষা কেন্দ্রের অধিকতর নিকটবর্তী। [Of any two chords of a circle, that which is nearer to the centre is greater than one more remote.

Conversely, the greater of two chords of a circle is nearer to the centre than the less.]



মনে কর, যে বৃত্তের কেন্দ্র O, তাহার দুইটি জ্যা AB ও CD এবং কেন্দ্র O হইতে উহাদের উপর যথাক্রমে OE, OF লম্ব (সুতরাং দূরত্ব)।

যদি OE < OF হয়, প্রমাণ করিতে হইবে AB > CD.

অঙ্কন। OA, OC যুক্ত কর।

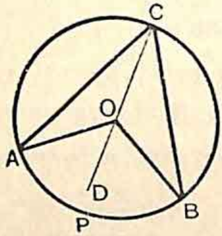
প্রমাণ। OE, AB জ্যা-এর উপর এবং OF, CD জ্যা-এর উপর লম্ব বলিয়া,

$AE = \frac{1}{2}AB$ এবং $CF = \frac{1}{2}CD$.

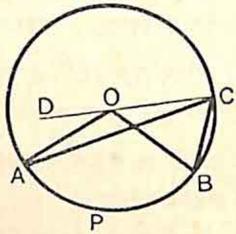
উপপাদ্য 41

বৃত্তের একই চাপের উপর অবস্থিত কেন্দ্রস্থ কোণ পরিধিস্থ কোণের দ্বিগুণ।

[The angle at the centre of a circle is double of an angle at the circumference, standing on the same arc.]



(প্রথম চিত্র)



(দ্বিতীয় চিত্র)

মনে কর ABC বৃত্তের কেন্দ্র O এবং APB উহার একটি চাপ।
APB চাপের উপর অবস্থিত AOB কেন্দ্রস্থ এবং ACB পরিধিস্থ কোণ।
প্রমাণ করিতে হইবে যে AOB কোণ ACB কোণের দ্বিগুণ।

অঙ্কন। CO যুক্ত কর এবং ইহাকে কোন বিন্দু D পর্যন্ত বর্ধিত কর।

প্রমাণ। BOC ত্রিভুজে, $OB = OC$, $\therefore$ $\angle OCB = \angle OBC$

কিন্তু, বহিঃ $\angle BOD = \angle OCB + \angle OBC$

$\therefore$ $\angle BOD = \angle OCB$-এর দ্বিগুণ,

তদ্রূপ, $\angle AOD = \angle OCA$-এর দ্বিগুণ।

$\therefore$ (প্রথম চিত্রে), $\angle BOD + \angle AOD = (\angle OCB + \angle OCA)$-এর দ্বিগুণ,

অর্থাৎ $\angle AOB = \angle ACB$-এর দ্বিগুণ ;

(দ্বিতীয় চিত্রে), $\angle BOD - \angle AOD = (\angle OCB - \angle OCA)$-এর দ্বিগুণ,

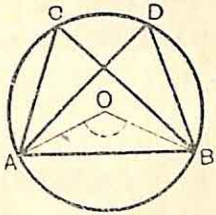
অর্থাৎ $\angle AOB = \angle ACB$-এর দ্বিগুণ।

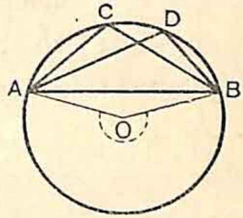
দ্রষ্টব্য। $\angle AOB$, সরল কিংবা প্রবৃদ্ধ হইলেও উক্ত প্রমাণপদ্ধতি প্রযোজ্য হইবে। AOB সরলকোণ হইলে AO, OB এক সরলরেখা হইবে এবং ACB বৃত্তাংশটি অর্ধবৃত্ত হইবে, আর ACB কোণটি হইবে এক সমকোণ। সুতরাং অর্ধবৃত্তস্থ কোণ এক সমকোণের সমান।

উপপাদ্য 42

একই বৃত্তাংশস্থিত সকল কোণই পরস্পর সমান।

[Angles in the same segment of a circle are equal.]





মনে কর, যে বৃত্তের কেন্দ্র O, তাহার ACDB বৃত্তাংশে ACB এবং ADB যে কোন দুইটি কোণ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে ∠ACB = ∠ADB.

অঙ্কন। OA, OB যুক্ত কর।

প্রমাণ। পরিধিস্থ ∠ACB = $\frac{1}{2}$ কেন্দ্রস্থ ∠AOB
আবার, পরিধিস্থ ∠ADB = $\frac{1}{2}$ কেন্দ্রস্থ ∠AOB } (একই AB চাপে অবস্থিত বলিয়া)

∴ ∠ACB = ∠ADB.

অনুশীলনী 21

1. AB, CD দুইটি জ্যা X-বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। যদি ∠XAC = 32°, ∠XCA = 40° হয়, তাহা হইলে ∠XBD, ∠XDB দুইটির পরিমাণ কত ?

2. O-কেন্দ্র বৃত্তের পরিধিতে B, C, D যে কোন তিনটি বিন্দু। ∠BOC = 38°, ∠OCD = 24° ; ∠DBC, ∠BCD এর পরিমাণ নির্ণয় কর।

3. কোন বৃত্তে AXB, CXD দুইটি জ্যা। যদি ∠AXC = 82°, ∠ADX = 37° হয়, ∠BCD কত ডিগ্রী ?

4. O-কেন্দ্র বৃত্তে AXB, CXD দুইটি জ্যা। যদি ∠AXC = 72°, ∠ADX = 23° হয়, ∠BOD কত ডিগ্রী ?

5. O-কেন্দ্র বৃত্তের পরিধিতে B, A, C যে কোন তিনটি বিন্দু এবং ∠BAC = 115° ; ∠BOC, ∠OBC কত ডিগ্রী ?

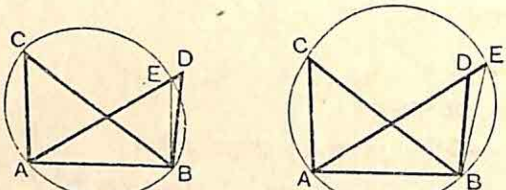
6. দুইটি বৃত্তের ছেদবিন্দু A ও B ; A বিন্দু দিয়া অঙ্কিত CAD এবং EAF দুইটি সরলরেখা উভয় বৃত্তের পরিধিকে C, D এবং E, F বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ কর ∠CBE = ∠DBF.

7. কোন বৃত্তের কেন্দ্র O এবং AB, CD দুইটি জ্যা বৃত্তের অন্তঃস্থ E বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে ∠AOC + ∠BOD = 2 ∠AEC. (C. U. 1938)

উপপাদ্য 43

যদি দুইটি বিন্দুর সংযোজক সরলরেখা উহার একই পার্শ্বস্থ অপর দুইটি বিন্দুতে সমান কোণ উৎপন্ন করে, তাহা হইলে ঐ চারিটি বিন্দু সমবৃত্ত হইবে।

[If a straight line joining any two points subtends equal angles at two other points on the same side of it, then the four points are concyclic.]



মনে কর, A ও B বিন্দুর সংযোজক সরলরেখা AB, ইহার একই পার্শ্বস্থ C ও D বিন্দুতে ACB এবং ADB দুইটি সমান কোণ উৎপন্ন করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে A, B, D, C সমবৃত্ত।

প্রমাণ। C, A, B দিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। এই বৃত্ত D-বিন্দু দিয়া যদি না যায়, তবে ইহা AD বা বর্ধিত AD-কে যে কোন বিন্দু E-তে ছেদ করিবে। EB যুক্ত করিলে, একই বৃত্তাংশস্থিত $\angle ACB = \angle AEB$.

কিন্তু কল্পনা অনুসারে, $\angle ACB = \angle ADB$.

$\therefore$ $\angle AEB = \angle ADB$; তাহা হইলে BDE ত্রিভুজের বহিঃকোণ ও বিপরীত অন্তঃকোণ পরস্পর সমান হইয়া পড়ে, ইহা অসম্ভব।

সুতরাং C, A, B বিন্দুগামী বৃত্ত AD-কে D ভিন্ন অন্য কোন বিন্দুতে ছেদ করিতে পারে না।

অতএব A, B, D, C সমবৃত্ত।

অনুসিদ্ধান্ত। একই ভূমির একই পার্শ্বে অবস্থিত ত্রিভুজগুলির শিরঃকোণসমূহ সমান হইলে, উক্ত ত্রিভুজ সমূহের শীর্ষবিন্দুর সঞ্চারপথ একটি বৃত্তচাপ, প্রদত্ত ভূমি যাহার জ্যা। [If the vertical angles of triangles standing on the same base and on the same side of it be equal, the locus of their vertices is an arc of a circle, of which the given base is a chord.]

অনুশীলনী 22

1. O-কেন্দ্র বৃত্তে AXB, CXD দুইটি জ্যা ; $\angle AOC = 20°$ ও $\angle BOD = 30°$ হইলে, AB, CD-র অন্তর্ভূত সূক্ষ্মকোণটি নির্ণয় কর।

2. কোন বৃত্তপরিধিতে A, B, C, D চারিটি ক্রমিক বিন্দু ; $\angle DAC = 25°$, $\angle ADB = 33°$, $\angle ABD = 41°$। ABCD চতুর্ভুজের চারিটি কোণ নির্ণয় কর।

3. O-কেন্দ্র বৃত্তে A, B, C এমন তিনটি বিন্দু যে AOCB একটি সামান্তরিক। প্রমাণ কর যে $\angle AOC = 120°$.

4. O-কেন্দ্র বৃত্তে A, B, C এমন তিনটি বিন্দু যে A, B, C যুক্ত করিলে একটি সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ উৎপন্ন হয় ; প্রমাণ কর যে $\angle OCB + \angle BAC = 90°$.

5. O-কেন্দ্র বৃত্তে $\angle RST$ উপবৃত্তাংশের একটি কোণ ; প্রমাণ কর $\angle RST - \angle ORT = 90°$.

6. O-কেন্দ্র বৃত্তে APB, CPD দুইটি জ্যা লম্বভাবে পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে ; প্রমাণ কর যে $\angle AOD$ এবং $\angle BOC$ পরস্পর সম্পূরক।

7. ABC ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষ হইতে বিপরীত বাহুর উপর লম্ব তিনটি O-বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে এবং A হইতে BC-র উপর AD লম্ব বর্ধিত হইয়া ABC বৃত্তপরিধির E-বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। প্রমাণ কর $\angle EBD = \angle DBO$ এবং DE = DO.

8. ABC সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষ তিনটি দিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত হইয়াছে এবং উহার কেন্দ্র O হইতে BC-কে লম্বভাবে ছিন্ন করিয়া OD ব্যাসার্ধ টানা হইয়াছে ; প্রমাণ কর OBD, OCD ত্রিভুজ দুইটি সমবাহু।

9. দুইটি বৃত্ত A ও B-বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে এবং A-বিন্দু দিয়া XAY যে কোন একটি সরলরেখা উভয় পরিধি পর্যন্ত টানা হইয়াছে। প্রমাণ কর যে XAY সরলরেখার সকল অবস্থানেই $\angle XBY$ সমান।

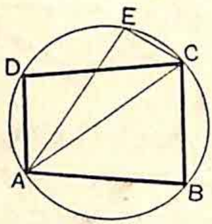
10. O-কেন্দ্র বৃত্তের AOB একটি ব্যাস এবং P অর্ধপরিধির একটি বিন্দু ; AP-কে T পর্যন্ত বর্ধিত করা হইয়াছে যাহাতে PT = OP হইয়াছে। প্রমাণ কর $\angle POT = \frac{1}{3}\angle TOB$.

11. AB সরলরেখার একই পার্শ্বে দুইটি বৃত্তাংশ আছে। বৃহত্তর বৃত্তাংশের উপর P যে কোন এক বিন্দু। AP অপর বৃত্তাংশকে Q-বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে P-বিন্দুর সকল অবস্থানেই $\angle PBQ$ সমান।

উপপাদ্য 45

কোন চতুর্ভুজের বিপরীত কোণ দুইটি সম্পূরক হইলে, উহার শীর্ষবিন্দু চারিটি সমবৃত্ত।

[If a pair of opposite angles of a quadrilateral are supplementary, its vertices are concyclic]



মনে কর, ABCD চতুর্ভুজের ∠ABC + ∠ADC = 2 সমকোণ।

প্রমাণ করিতে হইবে A, B, C, D সমবৃত্ত।

প্রমাণ। A, B, C বিন্দু দিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর।

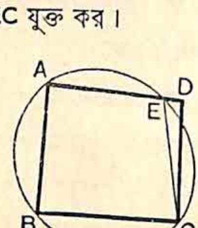
AC চাপের যে দিকে D আছে সেইদিকে পরিধির উপর একটি E-বিন্দু লও। AE, EC যুক্ত কর। এখন ABCE চতুর্ভুজটি বৃত্তস্থ,

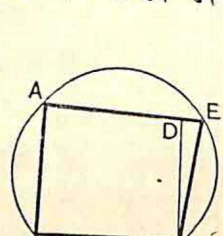
∴ ∠B + ∠E = 2 সম ∠; কিন্তু ∠B + ∠D = 2 সম ∠ (কল্পনা)

∴ ∠D = ∠E, ∴ D, A, C, E সমবৃত্ত। (উপপাদ্য 43)

কিন্তু A, B, C, E সমবৃত্ত। ∴ A, B, C, D সমবৃত্ত।

দ্বিতীয় প্রমাণ। A, B, C বিন্দু তিনটি দিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। যদি এই বৃত্ত D-বিন্দু দিয়া না যায় তাহা হইলে ইহা AD বা বর্ধিত AD-কে কোন এক E-বিন্দুতে ছেদ করিবে। EC যুক্ত কর।





এখন ABCE একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ বলিয়া, ∠ABC + ∠AEC = দুই সমকোণ;

কিন্তু $\angle ABC + \angle ADC =$ দুই সমকোণ (কল্পনা) ; $\therefore \angle AEC = \angle ADC.$

অর্থাৎ CDE ত্রিভুজের বহিঃকোণ বিপরীত অন্তঃকোণের সমান, যাহা অসম্ভব। সুতরাং A, B, C বিন্দু দিয়া অঙ্কিত বৃত্ত D-বিন্দু দিয়াই যাইবে।

অতএব A, B, C, D সমবৃত্ত।

অনুসিদ্ধান্ত। কোন চতুর্ভুজের একবাহু বর্ধিত করায় বহিঃকোণ বিপরীত অন্তঃকোণের সমান হইলে, চতুর্ভুজটি বৃত্তস্থ হইবে।

[If one side of a quadrilateral be produced and the exterior angle so formed be equal to the opposite interior angle, the quadrilateral is cyclic.]

অনুশীলনী 23

1. প্রমাণ কর যে কোন সামান্তরিকের চারিটি কৌণিক বিন্দু দিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কন সম্ভব হইলে, সামান্তরিকটি একটি আয়তক্ষেত্র হইবে। If a circle can be described about a parallelogram, prove that the parallelogram is a rectangle. (C. U. 1920, D. B. 1942)

2. ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি BC-র সমান্তরাল সরলরেখা অপর দুই বাহুকে X, Y-বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে ; প্রমাণ কর যে B, C, Y, X সমবৃত্ত।

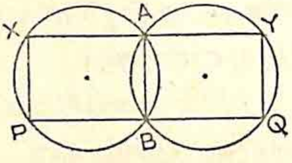
3. কোন বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের বিপরীত কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় পরিধির সহিত A ও B বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে ; প্রমাণ কর যে AB বৃত্তের ব্যাস।

4. কোন প্রবৃদ্ধকোণশূন্য চতুর্ভুজের কোণগুলির অন্তর্দ্বিখণ্ডক বা বহির্দ্বিখণ্ডক চারিটি একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ উৎপন্ন করে। The internal or the external bisectors of the angles of a convex quadrilateral form a cyclic quadrilateral.

5. বৃত্তের অন্তর্লিখিত ত্রিভুজের বহির্দিকের বৃত্তাংশ তিনটির তিন কোণের সমষ্টি চারি সমকোণের সমান। (C. U. 1950)

6. দুইটি বৃত্তের ছেদবিন্দু দিয়া উহাদের পরিধি পর্যন্ত দুইটি সমান্তরাল সরলরেখা টানা হইলে, সরলরেখা দুইটি পরস্পর সমান হইবে।

ইঙ্গিত। মনে কর XAY ∥ PBQ, প্রমাণ করিতে হইবে XY = PQ। XP, AB, YQ যোগ কর। ∠X + ∠Y = ∠ABQ + ∠ABP = 2 সম ∠।



∴ XP ∥ YQ ∴ XPQY একটি সামান্তরিক ; ∴ XY = PQ.

7. ABCD একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ। বর্ধিত BA ও CD, P-বিন্দুতে এবং AD ও BC, Q-বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। ADP এবং CDQ ত্রিভুজদ্বয়ের পরিবৃত্তদ্বয় R-বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ কর P, R, Q একই সরলরেখায় অবস্থিত।

[ইঙ্গিত। PR, RQ, DR যোগ কর। ADRP এবং DCQR বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।

∴ ∠DRP + ∠DRQ = ∠BAD + ∠BCD = 2 সম ∠।

∴ PR এবং RQ একই সরলরেখায় অবস্থিত।]

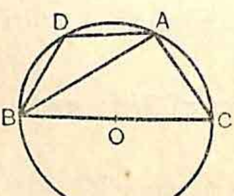
উপপাদ্য 46

(1) অর্ধবৃত্তস্থ কোণ সমকোণ,

(2) অর্ধবৃত্ত অপেক্ষা বৃহত্তর বৃত্তাংশস্থ কোণ সূক্ষ্মকোণ,

(3) অর্ধবৃত্ত অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর বৃত্তাংশস্থ কোণ স্থূলকোণ।

[(1) The angle in a semi-circle is a right angle, (2) the angle in a segment greater than a semi-circle is acute, and (3) the angle in a segment less than a semi-circle is obtuse.]



মনে কর BDAC বৃত্তের কেন্দ্র O এবং BC উহার ব্যাস।

BD, DA, BA, AC যুক্ত কর ; তাহা হইলে,

BDAC অর্ধবৃত্ত এবং ∠BAC অর্ধবৃত্তস্থ কোণ, ∠BCA অর্ধবৃত্ত অপেক্ষা বৃহত্তর বৃত্তাংশস্থ কোণ, এবং ∠BDA অর্ধবৃত্ত অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর বৃত্তাংশস্থ কোণ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, (1) ∠BAC সমকোণ,

(2) ∠BCA সূক্ষ্মকোণ,

(3) ∠BDA স্থূলকোণ।

প্রমাণ। (1) একই BC চাপে অবস্থিত পরিধিস্থ ∠BAC $=\frac{1}{2}$ কেন্দ্রস্থ ∠BOC

$=\frac{1}{2}$ সরলকোণ $=$ এক সমকোণ।

(2) BAC ত্রিভুজের ∠BAC সমকোণ, সুতরাং ∠BCA সূক্ষ্মকোণ।

(3) BDAC একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ,

∴ ∠BDA + ∠BCA = 2 সমকোণ

কিন্তু ∠BCA সূক্ষ্মকোণ (প্রমাণিত)

∴ ∠BDA স্থূলকোণ।

অনুসিদ্ধান্ত। সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজকে ব্যাস করিয়া কোন বৃত্ত অঙ্কন করিলে উহা সমকোণবিন্দু দিয়া যায়। [A circle described on the hypotenuse of a right-angled triangle as diameter, passes through the opposite angular point.]

অনুশীলনী 24

1. সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের মধ্যবিন্দু, কৌণিক বিন্দু তিনটি হইতে সমদূরবর্তী। The middle point of the hypotenuse of a right-angled triangle is equidistant from the three vertices.

2. দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া অঙ্কিত দুইটি সরলরেখা পরস্পর লম্বভাবে ছেদ করিয়াছে ; ছেদবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর। Two straight lines passing through two fixed points intersect each other at right angles. Find the locus of the point of intersection. (C. U. 1917)

3. একটি চলরেখা কোন নির্দিষ্ট বিন্দুগামী। অপর একটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে উহার উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর। A variable straight line passes through a fixed point. Perpendiculars are drawn to it from another fixed point. Find the locus of the feet of the perpendiculars.

4. PQRS একটি সামান্তরিক এবং P, S বিন্দু দিয়া যে কোন বৃত্ত PQ-কে X এবং SR-কে Y-বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে ; প্রমাণ কর যে Q, X, Y, R সমবৃত্ত।

5. O-কেন্দ্র বৃত্তের উপর A যে কোন একটি বিন্দু এবং AP, AQ দুইটি জ্যা যথাক্রমে X, S বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত। প্রমাণ কর যে A, X, O, S সমবৃত্ত।

6. সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সমান বাহুদ্বয়কে ব্যাস করিয়া দুইটি বৃত্ত অঙ্কন করিলে উহারা ভূমির মধ্যবিন্দুতে পরস্পর ছেদ করে। Circles, described on the equal sides of an isosceles triangle as diameters, intersect on the middle point of the base.

7. বৃত্তের মধ্যস্থ, উপরিস্থ বা বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে ঐ বৃত্তে যে সমস্ত জ্যা অঙ্কিত হইতে পারে, তাহাদের মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

8. ABC ত্রিভুজের AB ও AC-কে ব্যাস লইয়া দুইটি বৃত্ত অঙ্কন করিলে উহারা BC বাহুর একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে মিলিত হয়।

9. দুইটি বৃত্ত A ও B বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিয়াছে এবং AP, AQ যথাক্রমে ঐ দুই বৃত্তের ব্যাস। প্রমাণ কর যে P, B, Q একই সরলরেখায় অবস্থিত।

10. রম্বসের একটি বাহুর আয়তন ও অবস্থান নির্দিষ্ট আছে ; উহার কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর। Find the locus of the point of intersection of the diagonals of a rhombus one of whose sides is fixed in magnitude and direction.

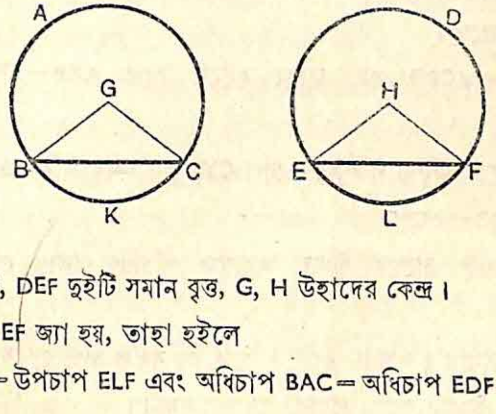
11. একটি সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণের অবস্থান নির্দিষ্ট এবং উহার অতিভুজের দৈর্ঘ্যও নির্দিষ্ট আছে। অতিভুজের মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

স্বীকৃত সিদ্ধান্ত 6. সমান সমান (বা একই) বৃত্তে, সমান সমান জ্যা-দ্বারা ছিন্ন চাপসমূহ (উপচাপ উপচাপের এবং অধিচাপ অধিচাপের সহিত) পরস্পর সমান।

বিপরীতক্রমে, সমান সমান (বা একই) বৃত্তে, যে সকল জ্যা সমান সমান চাপ ছিন্ন করে, তাহারা পরস্পর সমান।

[In equal circles (or in the same circle), arcs, which are cut off by equal chords, are equal, the minor arc being equal to the minor arc and the major to the major.]

Conversely, in equal circles (or in the same circle), chords, which cut off equal arcs, are equal.]



মনে কর, ABC, DEF দুইটি সমান বৃত্ত, G, H উহাদের কেন্দ্র।

যদি BC জ্যা = EF জ্যা হয়, তাহা হইলে

উপচাপ BKC = উপচাপ ELF এবং অধিচাপ BAC = অধিচাপ EDF

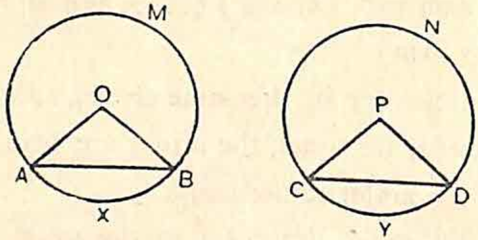
বিপরীতক্রমে, যদি BKC চাপ = ELF চাপ হয় অথবা BAC চাপ = EDF চাপ হয়, তাহা হইলে BC জ্যা = EF জ্যা।

স্বীকৃত সিদ্ধান্ত 7. সমান সমান (অথবা একই) বৃত্তের যে সকল চাপ বা যে সকল জ্যা কেন্দ্রে সমান সমান কোণ উৎপন্ন করে তাহারা পরস্পর সমান।

বিপরীতক্রমে, সমান সমান (অথবা একই) বৃত্তে সমান সমান চাপের উপর বা সমান সমান জ্যা-এর উপর অবস্থিত কেন্দ্রস্থ কোণগুলি পরস্পর সমান।

[In equal circles (or in the same circle), arcs or chords which subtend equal angles at the centres, are equal.

Conversely, in equal circles (or in the same circle), equal arcs or equal chords subtend equal angles at the centres.]



মনে কর, AMB, CND বৃত্ত দুইটি সমান এবং O, P যথাক্রমে উহাদের কেন্দ্র।

AXB, CYD চাপ দুইটি অথবা AB, CD জ্যা দুইটি কেন্দ্রে যথাক্রমে AOB, CPD দুইটি কোণ উৎপন্ন করিয়াছে।

যদি $\angle AOB = \angle CPD$ হয়, তাহা হইলে চাপ AXB = চাপ CYD এবং জ্যা AB = জ্যা CD.

বিপরীতক্রমে, যদি চাপ AXB = চাপ CYD হয় অথবা যদি AB জ্যা = CD জ্যা হয়, তাহা হইলে $\angle AOB = \angle CPD$.

দ্রষ্টব্য। একই চাপের উপর অবস্থিত পরিধিস্থ কোণ কেন্দ্রস্থ কোণের অর্ধ বলিয়া,—

(1) সমান সমান (অথবা একই) বৃত্তে যে সকল চাপ বা যে সকল জ্যা পরিধিতে সমান সমান কোণ উৎপন্ন করে, তাহারা পরস্পর সমান।

[In equal circles (or in the same circle) arcs or chords, which subtend equal angles at the circumferences are equal.]

(2) সমান সমান (অথবা একই) বৃত্তে, সমান সমান চাপের উপর বা সমান সমান জ্যা-এর উপর অবস্থিত পরিধিস্থ কোণগুলি পরস্পর সমান।

[In equal circles (or in the same circle) equal arcs or equal chords subtend equal angles at the circumferences.]

মন্তব্য। চাপ, জ্যা এবং কোণ সম্বন্ধে দুইটি সমান বৃত্তে যাহা সত্য, একই বৃত্ত সম্বন্ধেও তাহা সত্য।

অনুশীলনী 25

1. কোন বৃত্তের AB ও CD দুইটি জ্যা P-বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ কর যে APC, BPD ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী।

2. AB জ্যা দ্বারা খণ্ডিত বৃত্তাংশের চাপে X যে কোন একটি বিন্দু। প্রমাণ কর যে X-বিন্দুর সকল অবস্থানেই ∠XAB, ∠XBA-এর সমষ্টি সমান।

3. কোন বৃত্তের সমান্তরাল দুইটি জ্যা-এর দুইটি প্রান্তবিন্দু একই বা বিপরীত দিকে যুক্ত করিলে সংযোজক সরলরেখা দুইটি সমান হইবে। Straight lines joining the extremities of two parallel chords of a circle, towards the same parts or towards the opposite parts, are equal.

4. সমান সমান দুইটি বৃত্তের একটি ছেদবিন্দু X দিয়া AXB এবং CXD সরলরেখা দুইটি উভয় পরিধি পর্যন্ত প্রসারিত। প্রমাণ কর AC = BD.

5. দুইটি সমান বৃত্ত X, Y বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে এবং X-বিন্দু দিয়া AXB সরলরেখা উভয় পরিধি পর্যন্ত প্রসারিত। প্রমাণ কর যে AYB ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু।

6. পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত দুইটি জ্যা দ্বারা ছিন্ন চাপ দুইটির সমষ্টি অর্ধ পরিধির সমান। Sum of the arcs cut off by two chords at right angles to each other, is equal to the semi-circumference.

7. AB জ্যা দ্বারা বিভক্ত বৃত্তাংশের চাপের উপর C যে কোন এক বিন্দু; CAB, CBA কোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় O-বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। O-বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

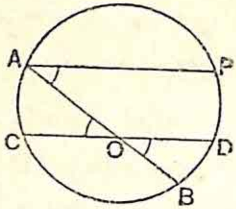
8. নির্দিষ্ট ভূমির উপর একই দিকে সমান শিরঃকোণ বিশিষ্ট কতকগুলি ত্রিভুজ অঙ্কিত হইয়াছে। প্রমাণ কর যে শিরঃকোণের সমদ্বিখণ্ডকগুলি কোন নির্দিষ্ট বিন্দুতে মিলিত হয়। Prove that the bisectors of the equal vertical angles of all triangles drawn on the same side of a given base, pass through a fixed point.

9. কোন বৃত্তের অন্তর্লিখিত ABC ত্রিভুজের কোণের সমদ্বিখণ্ডক তিনটি X, Y, Z বিন্দুতে পরিধির সহিত মিলিত হইয়াছে। প্রমাণ কর যে XYZ ত্রিভুজের কোণত্রয় যথাক্রমে

$$90^\circ - \frac{A}{2},\ \ 90^\circ - \frac{B}{2},\ \ 90^\circ - \frac{C}{2}.$$

(C. U. 1939 Supl.)

10. দুইটি জ্যা বৃত্তমধ্যে পরস্পর ছেদ করিলে অন্তর্ভূত কোণটি উহাদের দ্বারা ছিন্ন চাপদ্বয়ের সমষ্টির অর্ধ পরিমিত চাপের সম্মুখীন কেন্দ্রস্থ কোণের সমান। *If two chords intersect within a circle, they form an angle equal to that at the centre, subtended by half the sum of the arcs they cut off.*



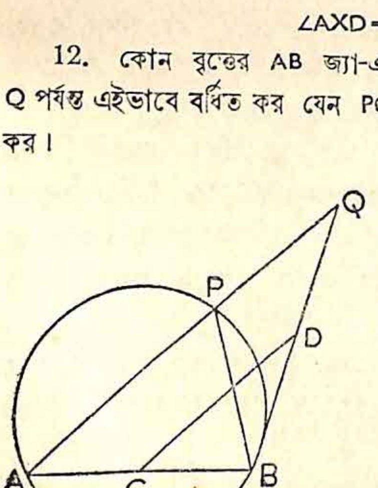
ইঙ্গিত। AB, CD জ্যা দুইটি O-বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। AP ∥ CD আঁক। ∴ AC চাপ = PD চাপ। ∠DOB = ∠PAB. কিন্তু ∠PAB, PB অর্থাৎ (BD + DP) চাপের উপর অবস্থিত পরিধিস্থ কোণ = BP চাপের উপর অবস্থিত কেন্দ্রস্থ কোণের অর্ধ, ইত্যাদি।

11. O-কেন্দ্র বৃত্তের AB, DC দুইটি জ্যা বৃত্তের বহির্দেশে X-বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ কর যে

$$\angle AXD = \tfrac{1}{2}(\angle AOD - \angle BOC)$$

12. কোন বৃত্তের AB জ্যা-এর উপর অবস্থিত চাপে P একটি বিন্দু। AP-কে Q পর্যন্ত এইভাবে বর্ধিত কর যেন PQ = PB হয়। BQ-র মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

(C. U. 1935)



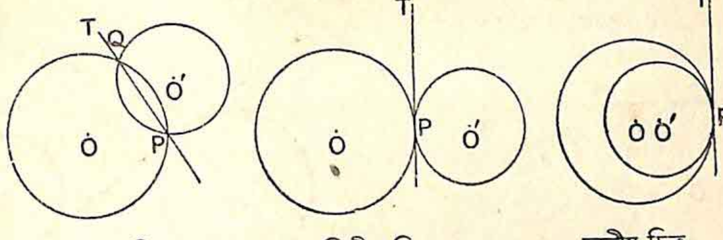
[AB ও BQ-এর মধ্যবিন্দুদ্বয় C ও D যোগ কর। ∠CDB = ∠AQB = $\frac{1}{2}$ ∠APB = ধ্রুবক ; CB ধ্রুবক। সুতরাং D-বিন্দুর সঞ্চারপথ একটি বৃত্তচাপ CB যাহার জ্যা।]

সপ্তম অধ্যায়

বৃত্ত ও স্পর্শক

দুইটি বৃত্তের স্পর্শ।

দুইটি বৃত্ত এক বিন্দুতে ছেদ করিলে আর একটি বিন্দুতেও ছেদ করে। মনে কর, দুইটি বৃত্ত P, Q বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে (প্রথম চিত্র)। এখন, P-বিন্দু স্থির রাখিয়া



প্রথম চিত্র   দ্বিতীয় চিত্র   তৃতীয় চিত্র

ক্ষুদ্রতর বৃত্তটি এমন ভাবে ঘুরাও যেন Q-বিন্দু ক্রমশঃ P-বিন্দুর নিকটবর্তী হয়। অবশেষে এমন এক চরম অবস্থা আসিবে যখন Q, P-র সহিত মিশিয়া যাইবে এবং বৃত্তদ্বয় P-Q সম্মিলিত বিন্দুতে পরস্পরকে মাত্র স্পর্শ করিয়া থাকিবে। এইরূপ অবস্থায় একটি বৃত্ত অপর একটি বৃত্তকে স্পর্শ করিয়াছে বলা হয়।

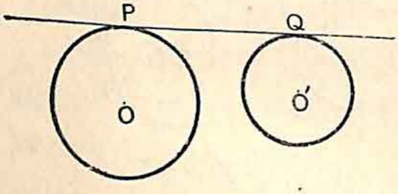
ক্ষুদ্রতর বৃত্তটিকে যে কোন দিকে ঘুরাইতে পারা যায়। যদি ক্ষুদ্রতর বৃত্তটি O-কেন্দ্র হইতে ক্রমশঃ দূরে সরিয়া যায়, তাহা হইলে উহা বহির্দেশে থাকিয়া বৃহত্তর বৃত্তটিকে স্পর্শ করিবে (দ্বিতীয় চিত্র)। আর ক্ষুদ্রতর বৃত্তটি ক্রমশঃ O-কেন্দ্রের নিকটবর্তী হইতে থাকিলে অবশেষে উহা বৃহত্তর বৃত্তটির অন্তর্গত হইয়া উহাকে স্পর্শ করিবে (তৃতীয় চিত্র)।

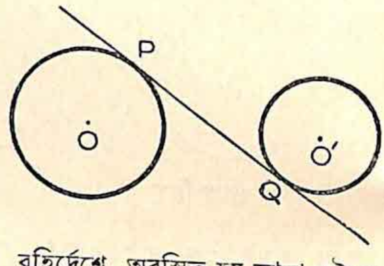
যখন দুইটি বৃত্ত পরস্পর বহির্দেশে থাকিয়া স্পর্শ করে তখন বৃত্তদ্বয়ের স্পর্শকে বহিঃস্পর্শ (External contact) বলে (দ্বিতীয় চিত্র), আর যদি একটি বৃত্ত অপর একটি বৃত্তের অন্তর্গত থাকিয়া পরস্পরকে স্পর্শ করে তাহা হইলে বৃত্তদ্বয়ের স্পর্শকে অন্তঃস্পর্শ (Internal contact) বলে (তৃতীয় চিত্র)।

পরস্পরচ্ছেদী দুইটি ঘূর্ণ্যমান বৃত্ত চরম অবস্থায় বহিঃস্পর্শ বা অন্তঃস্পর্শ করিলে উহাদের সাধারণ জ্যা বা ছেদক উভয় বৃত্তের একটি সাধারণ স্পর্শকে (Common tangent) পরিণত হয়।

সংজ্ঞা। যে সরলরেখা দুইটি বৃত্তের প্রত্যেকটিকে স্পর্শ করে তাহাকে বৃত্তদ্বয়ের **সাধারণ স্পর্শক** (Common Tangent) বলে।

সাধারণ স্পর্শকের স্পর্শবিন্দুদ্বয় বৃত্তদ্বয়ের কেন্দ্রগামী সরলরেখার একই পার্শ্বে অবস্থিত থাকিলে উহাকে **সরল সাধারণ স্পর্শক** (Direct Common Tangent) এবং বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত থাকিলে **তির্যক্ সাধারণ স্পর্শক** (Transverse Common Tangent) বলে।





দুইটি বৃত্ত স্পর্শ না করিয়াও যদি পরস্পর বহির্দেশে অবস্থিত হয় তাহা হইলে তাহাদের সাধারণ স্পর্শক থাকিতে পারে। PQ দুইটি বৃত্তের সাধারণ স্পর্শক।

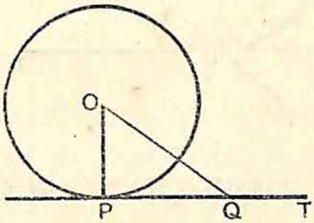
দুইটি বৃত্ত পরস্পর ছেদ করিলেও উহাদের সাধারণ স্পর্শক থাকিতে পারে। কিন্তু যদি দুইটি বৃত্ত পরস্পর স্পর্শ না করে অথচ একটি অপরটির অন্তর্গত হয়, তাহা হইলে উভয়ের সাধারণ স্পর্শক থাকে না।

দুইটি বৃত্ত পরস্পর স্পর্শ করিলে উভয়ের মধ্যে একটির বেশী সাধারণ বিন্দু থাকিতে পারে না।

উপপাদ্য 47

বৃত্তের কোন বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক, স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধের উপর লম্ব।

[The tangent at any point of a circle is perpendicular to the radius drawn to the point of contact.]



মনে কর, একটি বৃত্তের কেন্দ্র O এবং P-বিন্দুতে PT উহার স্পর্শক এবং OP স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে PT, OP-র উপর লম্ব।

অঙ্কন। PT স্পর্শকের উপর যে কোন একটি বিন্দু Q লও এবং OQ যুক্ত কর।

প্রমাণ। PT, P-বিন্দুস্থ স্পর্শক বলিয়া উহা P ভিন্ন অন্য কোন বিন্দুতে বৃত্তটির সহিত মিলিত হইতে পারে না; সুতরাং PT-র উপর P ভিন্ন সমস্ত বিন্দুই বৃত্তের বহির্ভূত।

সুতরাং, Q বৃত্তের বহির্ভূত।

অতএব $OQ > OP$.

এইরূপে PT-র উপর Q-র P ভিন্ন যে কোন অবস্থানেই OQ, OP অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

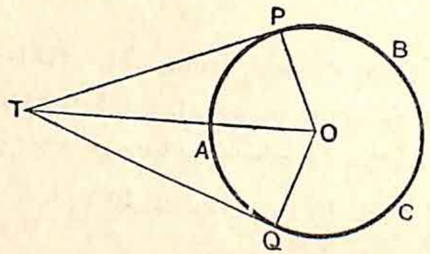
সুতরাং, OP সরলরেখাই O হইতে PT সরলরেখার ন্যূনতম দূরত্ব।

তাহা হইলে, OP, PT-র উপর লম্ব। ∴ PT, OP-র উপর লম্ব।

উপপাদ্য 48

বৃত্তের বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে দুইটি স্পর্শক টানিলে উহারা পরস্পর সমান হয় এবং কেন্দ্র-বিন্দুতে উহাদের সম্মুখ কোণদ্বয়ও সমান হয়।

[The two tangents to a circle drawn from an external point are equal and they subtend equal angles at the centre.]



মনে কর, ABC বৃত্তের কেন্দ্র O, এবং বহিঃস্থ T-বিন্দু হইতে TP, TQ উহার দুইটি স্পর্শক।

OP, OQ, OT যুক্ত কর।

প্রমাণ করিতে হইবে যে (1) $TP = TQ$, (2) $\angle TOP = \angle TOQ$.

প্রমাণ। TP, TQ স্পর্শক এবং OP, OQ স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ বলিয়া OPT, OQT কোণ দুইটির প্রত্যেকটিই সমকোণ।

তাহা হইলে TOP, TOQ সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ে,

TO সাধারণ অতিভুজ, এবং $OP = OQ$, (ব্যাসার্ধ)।

$\therefore \quad \triangle TOP \equiv \triangle TOQ$

$\therefore$ (1) $TP = TQ$ এবং (2) $\angle TOP = \angle TOQ$.

দ্রষ্টব্য। TOP, TOQ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম হওয়ায়, $\angle OTP = \angle OTQ$ অর্থাৎ TP, TQ স্পর্শকদ্বয় TO-র সহিত সমভাবে নত।

অনুশীলনী 26

1. কোন বৃত্তের ব্যাসার্ধ 3″ ; কেন্দ্র হইতে 5″ দূরবর্তী কোন বিন্দু হইতে ঐ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

2. কোন বৃত্তের ব্যাসার্ধ 6″ এবং বহিঃস্থ P-বিন্দু হইতে উহার স্পর্শকের দৈর্ঘ্য 8″. P-বিন্দু হইতে কেন্দ্রের দূরত্ব কত ?

3. দুইটি এককেন্দ্রীয় বৃত্তের ব্যাসার্ধ 13″ এবং 5″। বৃহত্তর বৃত্তটির একটি জ্যা ক্ষুদ্রতর বৃত্তটির স্পর্শক। জ্যা-টির দৈর্ঘ্য কত ?

4. ABC ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্ত BC, CA, AB-কে যথাক্রমে D, E, F বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে ; BD = ·8″, CD = 1·5″, AE = ·9″। AB, AC-র দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

5. বৃত্তের ব্যাসের প্রান্তবর্তী স্পর্শক দুইটি সমান্তরাল। Tangents at the extremities of a diameter of a circle are parallel.

6. বৃত্তের দুইটি স্পর্শক সমান্তরাল হইলে উহাদের স্পর্শবিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখা বৃত্তের ব্যাস। The straight line joining the points of contact of two parallel tangents to a circle is a diameter of the circle.

7. প্রমাণ কর যে কোন বৃত্তের AB ব্যাস A-বিন্দুতে স্পর্শকের সমান্তরাল জ্যাগুলিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

8. যে বৃত্ত পরস্পরচ্ছেদী দুইটি সরলরেখাকে স্পর্শ করে, তাহার কেন্দ্রবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর। Find the locus of the centre of a circle which touches two intersecting straight lines.

9. O-কেন্দ্র বৃত্তে বহিঃস্থ T-বিন্দু হইতে TP ও TQ দুইটি স্পর্শক। প্রমাণ কর যে OT, PQ-র লম্ব-দ্বিখণ্ডক এবং ∠PTQ = 2∠OPQ।

10. কোন বৃত্তের দুইটি সমান্তরাল স্পর্শক তৃতীয় একটি স্পর্শককে ছেদ করিলে উহাদের মধ্যবর্তী তৃতীয় স্পর্শকের ছিন্ন অংশ বৃত্তের কেন্দ্রে যে সম্মুখীন কোণ উৎপন্ন করে তাহা সমকোণ। Two parallel tangents to a circle intercept on any third tangent a segment which subtends a right angle at the centre.

11. বৃত্তের পরিলিখিত চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুদ্বয় কেন্দ্রে পরস্পর সম্পূরক কোণ উৎপন্ন করে। The opposite sides of a quadrilateral circumscribed about a circle subtend supplementary angles at the centre.

12. বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে এককেন্দ্রীয় কতকগুলি বৃত্তের স্পর্শক টানা হইলে স্পর্শবিন্দুগুলি বৃত্তস্থ হইবে। If from an external point tangents are drawn to each of a number of concentric circles, the points of contact lie on a circle.

13. ABCD কোন বৃত্তের পরিলিখিত একটি চতুর্ভুজ; প্রমাণ কর যে AB + CD = BC + AD.

14. ABCD চতুর্ভুজের AB + CD = BC + AD; প্রমাণ কর যে চতুর্ভুজের বাহুগুলি স্পর্শ করাইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত করা যায়।

15. প্রমাণ কর যে, বৃত্তের পরিলিখিত সামান্তরিকের বাহুগুলি সমান। If the four sides of a parallelogram touch a circle, prove that all the four sides are equal.

16. কোন বৃত্তের এমন দুইটি স্পর্শক অঙ্কিত কর যাহারা পরস্পর ছেদ করিয়া কোন নির্দিষ্ট কোণ উৎপন্ন করে। Show how to draw two tangents to a circle so as to contain a given angle.

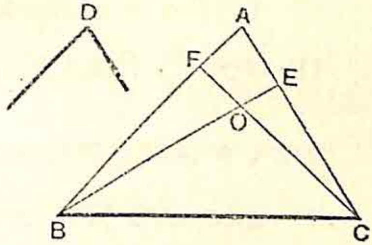
17. কোন বৃত্তের এমন একটি স্পর্শক অঙ্কিত কর যাহা কোন নির্দিষ্ট সরলরেখার সমান্তরাল বা উহার উপর লম্ব। Show how to draw a tangent to a circle which shall be either parallel or perpendicular to a given straight line.

18. যে বৃত্ত কোন সরলরেখাকে কোন নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শ করে তাহার কেন্দ্রের সঞ্চারপথ একটি সরলরেখা যাহা নির্দিষ্ট বিন্দুতে নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর লম্ব।

19. বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে বৃত্তের উপর দুইটি মাত্র স্পর্শক টানা যায়।

বিবিধ সঞ্চারপথ।

1. ত্রিভুজের ভূমি ও শিরঃকোণ নির্দিষ্ট আছে ; উহার লম্ব-বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় করিতে হইবে।



মনে কর, BC নির্দিষ্ট ভূমি এবং D নির্দিষ্ট কোণ।

BC ভূমির উপর D-কোণের সমান শিরঃকোণ বিশিষ্ট যে কোন ABC ত্রিভুজ অঙ্কিত কর।

মনে কর, B ও C হইতে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত BE ও CF লম্বদ্বয় O-বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিয়াছে। তাহা হইলে ABC ত্রিভুজের লম্ব-বিন্দু O.

O-বিন্দুর সঞ্চারপথটি নির্ণয় করিতে হইবে।

সঞ্চারপথ নির্ণয়। ∠OEA এবং ∠OFA-এর প্রত্যেকটিই সমকোণ।

∴ ∠EOF = ∠A-এর সম্পূরক।

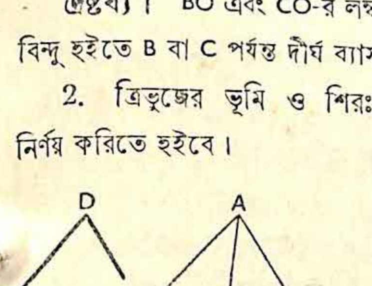
কিন্তু ∠EOF = ∠BOC. ∴ ∠BOC = ∠A-এর সম্পূরক।

∠A নির্দিষ্ট, কারণ উহা নির্দিষ্ট ∠D-এর সমান।

∴ ∠BOC একটি নির্দিষ্ট কোণ এবং উহা নির্দিষ্ট BC ভূমির উপর অবস্থিত বলিয়া O-বিন্দুর সঞ্চারপথ এমন একটি O-বিন্দুগামী বৃত্তচাপ যাহার জ্যা BC.

দ্রষ্টব্য। BO এবং CO-র লম্ব-দ্বিখণ্ডকদ্বয়ের ছেদ-বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া এবং ঐ ছেদ-বিন্দু হইতে B বা C পর্যন্ত দীর্ঘ ব্যাসার্ধ লইয়া উক্ত বৃত্তচাপটি অঙ্কিত করা যাইতে পারে।

2. ত্রিভুজের ভূমি ও শিরঃকোণ নির্দিষ্ট আছে, উহার অন্তঃকেন্দ্রের সঞ্চারপথ নির্ণয় করিতে হইবে।



মনে কর, নির্দিষ্ট BC ভূমির উপর ∠D-এর সমান শিরঃকোণ বিশিষ্ট ABC যে কোন একটি ত্রিভুজ।

A, B, C কোণের সমদ্বিখণ্ডক তিনটি I-বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। অতএব I ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র।

I-বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় করিতে হইবে।

অষ্টম অধ্যায়

বৃত্তাঙ্কন

1. বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইলে দুইটি বিষয় জানা প্রয়োজন—কেন্দ্রের অবস্থান ও ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য।

কেন্দ্রের অবস্থান জানিতে প্রদত্ত শর্ত হইতে কেন্দ্রগামী দুইটি সঞ্চারপথ নির্ণয়ের প্রয়োজন হয়। দুইটি কেন্দ্রগামী সঞ্চারপথের ছেদ-বিন্দুই কেন্দ্র।

কেন্দ্রের অবস্থান এবং পরিধিস্থিত যে কোন একটি বিন্দু পাইলেই ব্যাসার্ধ নির্ণয় করা যায়।

বৃত্তাঙ্কনের পূর্বে নিম্নলিখিত সঞ্চারপথ সমূহের ধারণা একান্ত প্রয়োজন—

(1) দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যাইবে এইরূপ বৃত্তসমূহের কেন্দ্রের সঞ্চারপথ একটি সরলরেখা, যাহা নির্দিষ্ট বিন্দু দুইটির সংযোজক সরলরেখাকে লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

(2) কোন নির্দিষ্ট সরলরেখার কোন নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শ করিবে এরূপ বৃত্তসমূহের কেন্দ্রের সঞ্চারপথ একটি সরলরেখা, যাহা নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর নির্দিষ্ট বিন্দুতে লম্ব।

(3) কোন নির্দিষ্ট বৃত্তের কোন নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শ করিবে এরূপ বৃত্তসমূহের কেন্দ্রের সঞ্চারপথ একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা, যাহা নির্দিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র এবং নির্দিষ্ট বিন্দুকে সংযুক্ত করে।

(4) কোন নির্দিষ্ট সরলরেখাকে স্পর্শ করিবে এরূপ নির্দিষ্ট ব্যাসার্ধ-বিশিষ্ট বৃত্তগুলির সঞ্চারপথ একটি সরলরেখা যাহা নির্দিষ্ট সরলরেখার সমান্তরাল এবং উহা হইতে নির্দিষ্ট ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য পরিমিত ব্যবধানে অবস্থিত।

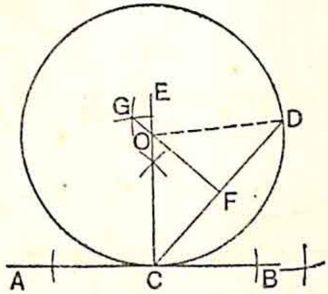
(5) দুইটি নির্দিষ্ট সমান্তরাল সরলরেখাকে স্পর্শ করিবে এরূপ বৃত্তসমূহের কেন্দ্রের সঞ্চারপথ একটি সরলরেখা, যাহা নির্দিষ্ট সরলরেখা দুইটির সমান্তরাল এবং সমব্যবধানে অবস্থিত।

(6) দুইটি নির্দিষ্ট পরস্পরচ্ছেদী সরলরেখাকে স্পর্শ করিবে এরূপ বৃত্তসমূহের কেন্দ্রের সঞ্চারপথ দুইটি সরলরেখার যে কোন একটি, যাহা নির্দিষ্ট সরলরেখা দুইটির অন্তর্গত অন্তঃকোণ বা বহিঃকোণের সমদ্বিখণ্ডক।

(7) কোন নির্দিষ্ট বৃত্তকে স্পর্শ করিবে এরূপ নির্দিষ্ট ব্যাসার্ধ-বিশিষ্ট বৃত্তসমূহের কেন্দ্রের সঞ্চারপথ একটি বৃত্ত, যাহার কেন্দ্র নির্দিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র এবং ব্যাসার্ধ নির্দিষ্ট ব্যাসার্ধদ্বয়ের সমষ্টি বা অন্তর।

সম্পাদ্য 23

কোন নির্দিষ্ট সরলরেখাকে উহার অন্তর্গত কোন নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শ করিবে এবং ঐ সরলরেখার বহিঃস্থ কোন নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যাইবে এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে। [To construct a circle touching a given straight line at a given point and passing through a given point outside the straight line.]



মনে কর AB নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর C একটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং D উহার বহিঃস্থ আর একটি নির্দিষ্ট বিন্দু।

এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে যাহা AB-কে C-বিন্দুতে স্পর্শ করিয়া D-বিন্দু দিয়া যাইবে।

অঙ্কন। C-বিন্দুতে AB-র উপর CE লম্ব টান। CD যুক্ত কর এবং CD-কে FG দ্বারা লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত কর। মনে কর CE এবং FG পরস্পর O-বিন্দুতে ছেদ করিল।

O-কে কেন্দ্র করিয়া OC-ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর।

ইহাই অভীষ্ট বৃত্ত হইল।

প্রমাণ। OD যুক্ত কর। O-বিন্দু CD-র লম্ব-দ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত; $\therefore$ OC = OD.

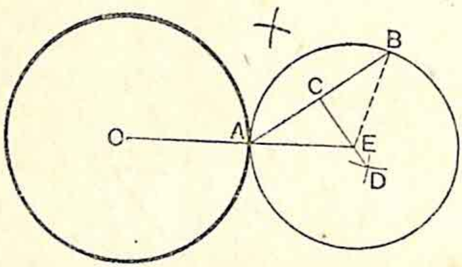
সুতরাং O-কে কেন্দ্র করিয়া OC-ব্যাসার্ধ লইয়া বৃত্ত অঙ্কিত করিলে উহা D দিয়া যাইবে।

আবার CB সরলরেখা OC ব্যাসার্ধের প্রান্তবিন্দু C-তে OC-র উপর লম্ব; সুতরাং এই বৃত্ত CB-কে অর্থাৎ AB-কে C-বিন্দুতে স্পর্শ করিবে।

সম্পাদ্য 24

কোন নির্দিষ্ট বৃত্তকে একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শ করিবে এবং নির্দিষ্ট বৃত্তের বহিঃস্থ কোন নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যাইবে এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To construct a circle touching a given circle at a given point and passing through a given point outside the circle.]



মনে কর O নির্দিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র, A উহার পরিধিস্থ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং B এই বৃত্তের বহিঃস্থ আর একটি নির্দিষ্ট বিন্দু।

এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে যাহা B-বিন্দু দিয়া যাইবে এবং নির্দিষ্ট বৃত্তকে A-বিন্দুতে স্পর্শ করিবে।

অঙ্কন। AB যুক্ত কর এবং AB-কে CD দ্বারা লম্ব-ভাবে সমদ্বিখণ্ডিত কর। OA যুক্ত কর এবং উহাকে বর্ধিত কর যেন উহা CD-কে E-বিন্দুতে ছেদ করে।

E-কে কেন্দ্র করিয়া EA-ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর।

ইহাই অভীষ্ট বৃত্ত।

প্রমাণ। BE যুক্ত কর। E-বিন্দু AB-র লম্ব-দ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত ;
$\therefore$ EA = EB.

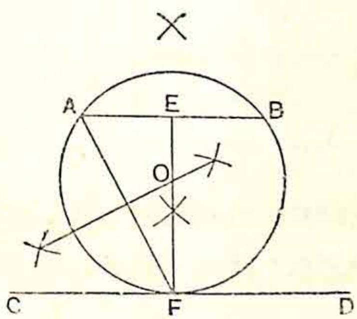
অতএব E-কে কেন্দ্র করিয়া EA-ব্যাসার্ধ লইয়া বৃত্ত অঙ্কিত করিলে উহা B-বিন্দু দিয়া যাইবে।

আবার A-বিন্দু, বৃত্ত দুইটির কেন্দ্রদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখার উপর অবস্থিত বলিয়া এবং A-বিন্দুতে বৃত্ত দুইটি মিলিত হইয়াছে বলিয়া বৃত্ত দুইটি পরস্পর A-বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে।

সম্পাদ্য 25

দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া এবং উহাদের সংযোজক সরলরেখার সমান্তরাল একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে স্পর্শ করিয়া যায় এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To construct a circle passing through two given points and touching a given straight line parallel to the straight line joining the given points.]



মনে কর A, B দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু, CD নির্দিষ্ট সরলরেখা যাহা AB-এর সমান্তরাল।

এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে যাহা A ও B বিন্দু দিয়া যাইবে এবং CD-কে স্পর্শ করিবে।

অঙ্কন। AB-কে EF দ্বারা লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত কর এবং মনে কর EF, CD-কে F-বিন্দুতে ছেদ করিল।

A, B, F বিন্দু দিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর।

ইহাই অভীষ্ট বৃত্ত হইবে।

প্রমাণ। EF, AB জ্যা-র লম্ব-দ্বিখণ্ডক ; সুতরাং EF, ABF বৃত্তের কেন্দ্র দিয়া যাইবে।

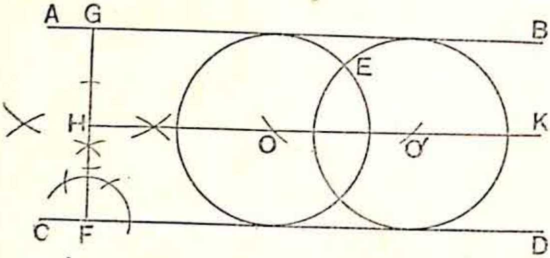
আবার EF, CD-র উপর লম্ব, কারণ AB, CD-র সমান্তরাল এবং EF, AB-র উপর লম্ব।

∴ ABF বৃত্ত CD-কে F-বিন্দুতে স্পর্শ করিবে।

সম্পাদ্য 26

দুইটি নির্দিষ্ট সমান্তরাল সরলরেখাকে স্পর্শ করিবে এবং একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যাইবে এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To construct a circle touching two given parallel straight lines and passing through a given point.]



মনে কর AB, CD নির্দিষ্ট সমান্তরাল সরলরেখা এবং E একটি নির্দিষ্ট বিন্দু।

এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে যাহা AB ও CD-কে স্পর্শ করিবে এবং E বিন্দু দিয়া যাইবে।

অঙ্কন। CD-র যে কোন F-বিন্দু হইতে CD-র উপর লম্ব টান। এই লম্ব যেন AB-কে G-বিন্দুতে ছেদ করিল। GF-কে HK দ্বারা লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত কর। E-কে কেন্দ্র করিয়া GH বা HF-এর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কিত কর যাহা KH-কে O, O′ বিন্দুতে ছেদ করে।

O, O′-কে কেন্দ্র করিয়া OE বা O′E ব্যাসার্ধ লইয়া বৃত্ত অঙ্কিত করিলে প্রত্যেকটিই অভীষ্ট বৃত্ত হইবে।

প্রমাণ। BG, KH, DF, প্রত্যেকেই GF-এর উপর লম্ব। সুতরাং উহারা পরস্পর সমান্তরাল। আবার GH = HF, ∴ KH সরলরেখার প্রত্যেক বিন্দু AB, CD হইতে সমদূরবর্তী। ∴ AB, CD সমান্তরাল সরলরেখা দুইটিকে স্পর্শ করিবে এরূপ বৃত্তসমূহের কেন্দ্রের সঞ্চারপথ KH. আবার OE = O′E = GH = HF.

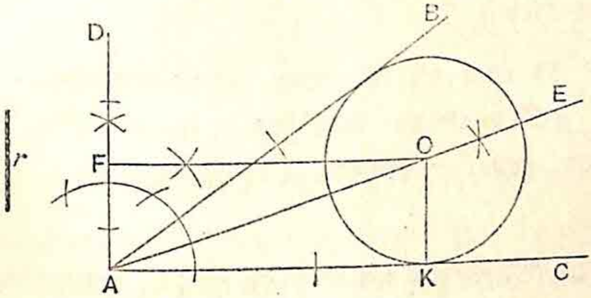
সুতরাং O বা O′-কে কেন্দ্র করিয়া OE অথবা O′E ব্যাসার্ধ লইয়া বৃত্ত অঙ্কিত করিলে এই বৃত্ত AB ও CD-কে স্পর্শ করিবে।

দ্রষ্টব্য। E-বিন্দু, AB ও CD-র বাহিরে থাকিলে অঙ্কন অসম্ভব হইবে।

সম্পাদ্য 27

দুইটি পরস্পরচ্ছেদী সরলরেখাকে স্পর্শ করে এইরূপ নির্দিষ্ট ব্যাসার্ধের একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To draw a circle of given radius to touch two intersecting straight lines.]



মনে কর, AB, AC সরলরেখা দুইটি A-বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিয়াছে এবং r নির্দিষ্ট ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য।

r-ব্যাসার্ধের একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে যাহা AB ও AC-কে স্পর্শ করিবে।

অঙ্কন। ∠BAC-এর সমদ্বিখণ্ডক AE অঙ্কিত কর।

AC-র উপর AD লম্ব টান এবং উহা হইতে r-এর সমান AF কাট।

F-বিন্দু দিয়া AC-র সমান্তরাল একটি সরলরেখা টান যাহা AE-র সহিত O-বিন্দুতে মিলিত হয়।

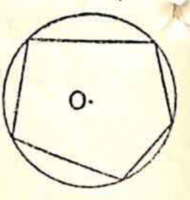
এক্ষণে, O-কে কেন্দ্র করিয়া FA অর্থাৎ r ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। উহাই অভীষ্ট বৃত্ত।

প্রমাণ। O-বিন্দু দিয়া FA-এর সমান্তরাল করিয়া একটি সরলরেখা টান যাহা AC-কে K-বিন্দুতে ছেদ করে। তাহা হইলে AFOK একটি আয়তক্ষেত্র হইল।

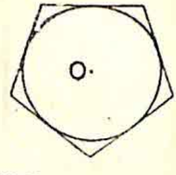
∴ OK = FA = r ; OK, AC-র উপর লম্ব এবং O, ∠BAC-এর সমদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত ; সুতরাং উক্ত বৃত্ত AB ও AC-কে স্পর্শ করিবে।

পরিবৃত্ত, অন্তর্বৃত্ত, বহির্বৃত্ত।

যদি কোন বৃত্তের পরিধি কোন ঋজুরেখ ক্ষেত্রের শীর্ষ-বিন্দুসমূহ দিয়া গমন করে, তবে বৃত্তটিকে ক্ষেত্রের পরিলিখিত (circumscribed) এবং ক্ষেত্রটিকে বৃত্তের অন্তর্লিখিত (inscribed) বলা হয়।



পার্শ্বের চিত্রে বৃত্তটি পঞ্চভুজের পরিলিখিত এবং পঞ্চভুজটি বৃত্তে অন্তর্লিখিত আছে।



যদি কোন বৃত্ত কোন ঋজুরেখ ক্ষেত্রের প্রত্যেক বাহু স্পর্শ করে, তবে বৃত্তটিকে ক্ষেত্রের অন্তর্লিখিত (inscribed) এবং ক্ষেত্রটিকে বৃত্তের পরিলিখিত (circumscribed) বলা হয়।

পার্শ্বের চিত্রে বৃত্তটি পঞ্চভুজে অন্তর্লিখিত এবং পঞ্চভুজটি বৃত্তের পরিলিখিত আছে।

কোন ত্রিভুজের পরিলিখিত বৃত্তকে ত্রিভুজের **পরিবৃত্ত** (Circumscribed circle বা circum-circle) বলে। পরিবৃত্তের কেন্দ্রকে **পরিকেন্দ্র** (Circum-centre) এবং ব্যাসার্ধকে **পরিব্যাসার্ধ** (Circum-radius) বলে।

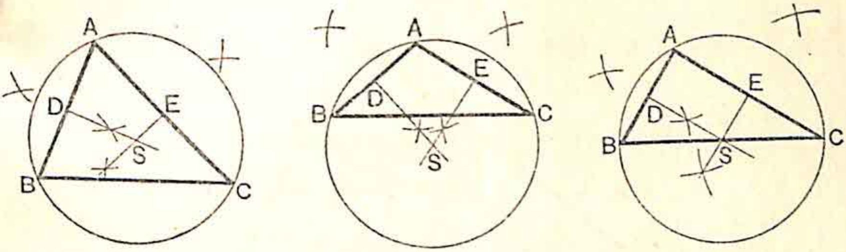
কোন ত্রিভুজের অন্তর্লিখিত বৃত্তকে ত্রিভুজের **অন্তর্বৃত্ত** (Inscribed circle বা in-circle) বলে। অন্তর্বৃত্তের কেন্দ্রকে **অন্তঃকেন্দ্র** (In-centre) এবং ব্যাসার্ধকে **অন্তর্ব্যাসার্ধ** (In-radius) বলে।

যদি কোন বৃত্ত একটি ত্রিভুজের কোন এক বাহু এবং অপর বাহু দুইটির বর্ধিতাংশকে স্পর্শ করে, তবে ঐ বৃত্তকে ঐ ত্রিভুজের বহির্লিখিত (escribed) বলা হয়। ত্রিভুজের বহির্লিখিত বৃত্তকে **বহির্বৃত্ত** (Escribed circle) বলে। উহার কেন্দ্রকে **বহিঃকেন্দ্র** (Ex-centre) এবং ব্যাসার্ধকে **বহির্ব্যাসার্ধ** (Ex-radius) বলে।

সম্পাদ্য 28

কোন নির্দিষ্ট ত্রিভুজের পরিবৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To circumscribe a circle about a given triangle.]



মনে কর ABC একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজ। ইহার পরিবৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। AB ও AC-র মধ্যবিন্দু D ও E দিয়া উহাদের উপর লম্ব টান এবং মনে কর ইহারা যেন পরস্পর S-বিন্দুতে ছেদ করে। S-কে কেন্দ্র করিয়া এবং SA ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। এই বৃত্তই অভীষ্ট বৃত্ত হইবে।

প্রমাণ। DS, AB-র লম্ব-দ্বিখণ্ডক। সুতরাং DS এর প্রত্যেক বিন্দু A ও B হইতে সমদূরবর্তী। এইরূপ ES-এর প্রত্যেক বিন্দু A ও C হইতে সমদূরবর্তী। ∴ S-বিন্দু A, B, C হইতে সমদূরবর্তী।

সুতরাং S-কে কেন্দ্র করিয়া SA-ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিলে ইহা A, B, C বিন্দু দিয়া যাইবে। অতএব এই বৃত্তই অভীষ্ট পরিবৃত্ত হইবে।

দ্রষ্টব্য। (1) ত্রিভুজটি সূক্ষ্মকোণী হইলে পরিবৃত্তের কেন্দ্র ত্রিভুজটির মধ্যে, স্থূলকোণী হইলে ত্রিভুজটির বাহিরে এবং সমকোণী হইলে অতিভুজের উপর অবস্থিত হইবে।

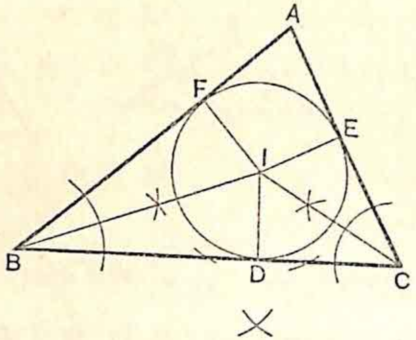
(2) S-বিন্দু BC-র মধ্যবিন্দুর সহিত যুক্ত করিলে এই সংযোজক সরলরেখা BC-র উপর লম্ব হইবে।

সুতরাং, ত্রিভুজের বাহুগুলির লম্ব-দ্বিখণ্ডক তিনটি সমবিন্দু এবং উহাদের সম্পাত-বিন্দুই ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র।

সম্পাদ্য 29

কোন নির্দিষ্ট ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To inscribe a circle in a given triangle.]



মনে কর ABC একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজ। ইহার অন্তর্বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। ABC, ACB কোণ দুইটিকে সমদ্বিখণ্ডিত কর এবং মনে কর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় I-বিন্দুতে ছেদ করে।

I-বিন্দু হইতে BC-র উপর ID লম্ব টান।

I-কে কেন্দ্র করিয়া ID-ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর।

এই বৃত্তই অভীষ্ট অন্তর্বৃত্ত হইবে।

প্রমাণ। I-বিন্দু হইতে AC ও AB র উপর যথাক্রমে IE এবং IF লম্ব টান।

BI, ∠ABC-এর সমদ্বিখণ্ডক ; ∴ ID = IF.

তদ্রূপ ID = IE,

সুতরাং ID = IE = IF.

∴ I-কে কেন্দ্র করিয়া ID- ব্যাসার্ধ লইয়া বৃত্ত অঙ্কিত করা হইলে উহা নিশ্চয়ই D, E, F বিন্দু দিয়া যাইবে।

আবার ID, IE, IF ব্যাসার্ধ সমূহ যথাক্রমে, BC, CA, AB-র উপর লম্ব ;

∴ বৃত্তটি BC, CA ও AB-কে যথাক্রমে, D, E, F বিন্দুতে স্পর্শ করিবে।

দ্রষ্টব্য। I-বিন্দু A-বিন্দুর সহিত সংযুক্ত হইলে, AI, ∠BAC-এর সমদ্বিখণ্ডক হইবে। সুতরাং ত্রিভুজের কোণ তিনটির অন্তর্দ্বিখণ্ডক সমবিন্দু এবং উহাদের সম্পাতবিন্দুই ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র।

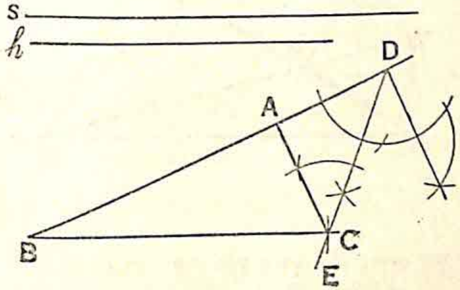
নবম অধ্যায়

বিবিধ ত্রিভুজ ও ডিজাইন অঙ্কন

বিবিধ ত্রিভুজ অঙ্কন

1. অতিভুজ এবং অপর দুই বাহুর সমষ্টি দেওয়া আছে ; একটি সমকোণী ত্রিভুজ অঙ্কন করিতে হইবে।

[To construct a right-angled triangle, having given the hypotenuse and the sum of the other two sides.]



মনে কর h অতিভুজ এবং s অপর দুই বাহুর সমষ্টি।

একটি সমকোণী ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। s-এর সমান করিয়া BD সরলরেখা লও। D-বিন্দুতে $\angle BDE = 45°$ আঁক। B-কে কেন্দ্র করিয়া h-ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ আঁক যাহা BE-কে C-বিন্দুতে ছেদ করে। পুনরায় C-বিন্দুতে $\angle DCA = 45°$ আঁক যাহার CA বাহু BD-কে A-বিন্দুতে ছেদ করে।

তাহা হইলে, ABC অভীষ্ট সমকোণী ত্রিভুজ হইল।

প্রমাণ। $\angle BAC = \angle ADC + \angle ACD = 45° + 45° = 90°$.

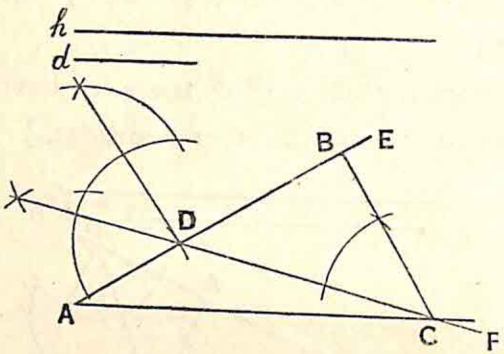
আবার, $\angle ADC = \angle ACD$, $\therefore$ $AD = AC$

$\therefore$ $BA + AC = BA + AD = BD = S$

এবং অঙ্কন অনুসারে $BC = h$.

2. অতিভুজ এবং অপর দুই বাহুর অন্তর দেওয়া আছে ; একটি সমকোণী ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To construct a right-angled triangle, having given the hypotenuse and the difference of the other two sides.]



মনে কর h অতিভুজ এবং d অপর দুই বাহুর অন্তর।
একটি সমকোণী ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। d-এর সমান AD সরলরেখা লও এবং উহাকে E পর্যন্ত বর্ধিত করিয়া $\angle EDF = 45°$ আঁক।

A-কে কেন্দ্র করিয়া h ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ আঁক যাহা DF-কে C-বিন্দুতে ছেদ করে।

$\angle DCB = \angle EDC$ আঁক, যেন CB, AE-কে B-বিন্দুতে ছেদ করে, তাহা হইলে, ABC অভীষ্ট সমকোণী ত্রিভুজ হইল।

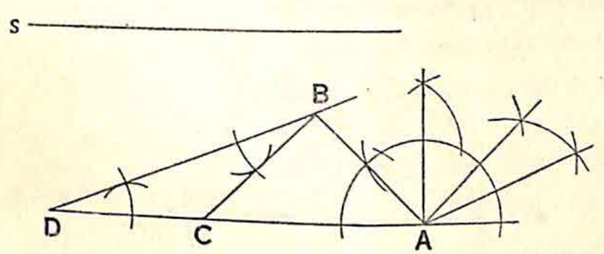
প্রমাণ। $\angle BDC = \angle BCD = 45°$; $\therefore$ $BD = BC$ এবং $\angle CBD = 90°$

আবার অঙ্কন অনুসারে, $AC = h$ এবং $BA - BC = BA - BD = AD = d$.

সুতরাং ABC অভীষ্ট সমকোণী ত্রিভুজ।

3. অতিভুজ এবং সমান দুই বাহুর একটির সমষ্টি দেওয়া আছে ; একটি সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To construct an isosceles right-angled triangle having given the sum of the hypotenuse and one of the equal sides.]



মনে কর অতিভুজ এবং সমান বাহুদ্বয়ের একটির সমষ্টি S.

একটি সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। DA = S লও এবং DA-র একই দিকে A বিন্দুতে 45° এবং D বিন্দুতে $22\frac{1}{2}^\circ$ কোণ আঁক যেন উহাদের দুইটি বাহু B বিন্দুতে মিলিত হয়। পুনরায় DB-র B-বিন্দুতে $\angle DBC = 22\frac{1}{2}^\circ$ আঁক যেন BC, DA-কে C-বিন্দুতে ছেদ করে।

তাহা হইলে ABC অভীষ্ট সমকোণী ত্রিভুজ হইল।

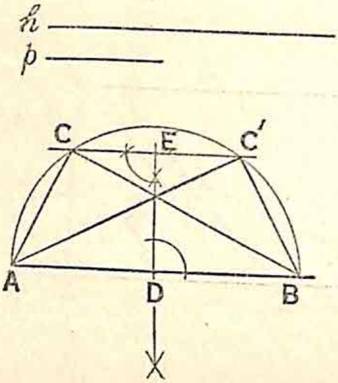
প্রমাণ। $\angle DBC = \angle BDC = 22\frac{1}{2}^\circ$, $\therefore$ CB = CD এবং $\angle BCA = 45^\circ$

$\angle BAC = \angle BCA = 45^\circ$; $\therefore$ $\angle ABC = 90^\circ$

আবার, AC + CB = AC + CD = AD = S.

4. অতিভুজ এবং সমকোণ বিন্দু হইতে অতিভুজের উপর লম্ব দেওয়া আছে; সমকোণী ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To construct a right-angled triangle having given the hypotenuse and the perpendicular from the right angle to the hypotenuse.]



মনে কর h অতিভুজ এবং p লম্ব।

একটি সমকোণী ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। একটি সরলরেখা লইয়া উহা হইতে h-এর সমান AB অংশ কাট। AB-র উপর একটি অর্ধবৃত্ত আঁক। AB-র লম্ব-দ্বিখণ্ডক টান এবং উহা হইতে p-র সমান করিয়া DE কাট।

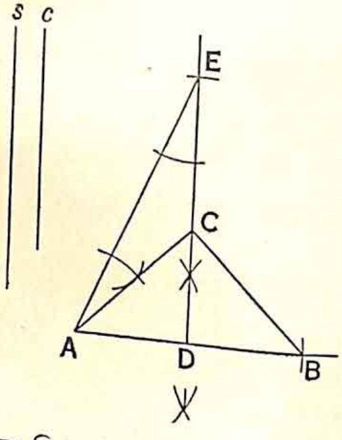
E-বিন্দু দিয়া AB-র সমান্তরাল করিয়া একটি সরলরেখা টান যাহা অর্ধবৃত্তকে C এবং C′ বিন্দুতে ছেদ করে। CA, CB এবং C′A, C′B যোগ কর।

তাহা হইলে ABC এবং ABC′ উভয়ই অভীষ্ট ত্রিভুজ হইল।

প্রমাণ। অর্ধবৃত্তস্থ কোণ বলিয়া C এবং C′ প্রত্যেকেই সমকোণ। অতিভুজ AB $= h$ এবং উক্ত ত্রিভুজদ্বয়ের উন্নতি $=$ DE $= p$.

5. ভূমি এবং সমান বাহুদ্বয়ের একটি এবং উন্নতির সমষ্টি দেওয়া আছে ; একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To construct an isosceles triangle having given the base and the sum of one of the equal sides and the perpendicular from the vertex to the base.]



মনে কর c ভূমি এবং s একটি সমান বাহু ও শীর্ষ হইতে ভূমির উপর লম্বের সমষ্টি। একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। একটি সরলরেখা লইয়া উহা হইতে AB $= c$ কাটিয়া লও। AB-র লম্ব-দ্বিখণ্ডক আঁক এবং উহা হইতে DE $= s$ কাট। AE যোগ কর এবং ∠EAC = ∠DEA আঁক যেন AC, DE-কে C-বিন্দুতে ছেদ করে। CB যোগ কর।

তাহা হইলে ABC অভীষ্ট ত্রিভুজ হইল।

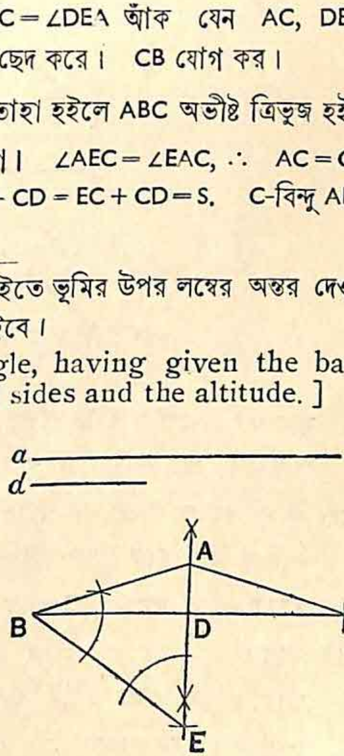
প্রমাণ। ∠AEC = ∠EAC, ∴ AC = CE.. ∴ AC + CD = EC + CD = S. C-বিন্দু AB-র লম্ব-দ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত বলিয়া CA = CB.

---

6. ভূমি, সমান বাহুদ্বয়ের একটি এবং শীর্ষ হইতে ভূমির উপর লম্বের অন্তর দেওয়া আছে ; একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To construct an isosceles triangle, having given the base and the difference of one of the equal sides and the altitude.]

মনে কর a ভূমি এবং d সমান বাহুদ্বয়ের একটি এবং উন্নতির অন্তর।



অঙ্কন। একটি সরলরেখা লইয়া উহা হইতে a-এর সমান BC কাট এবং BC-র লম্ব-দ্বিখণ্ডক DE আঁক। ঐ লম্ব-দ্বিখণ্ডক হইতে d-এর সমান DE কাট। BE যোগ কর এবং ∠EBA = ∠BED আঁক এবং মনে কর BA, বর্ধিত ED-কে A-বিন্দুতে ছেদ করে। AC যোগ কর।

তাহা হইলে ABC অভীষ্ট ত্রিভুজ হইল।

প্রমাণ। $\angle ABE = \angle AEB$, $\therefore$ $AB = AE$

$\therefore$ $AB - AD = AE - AD = DE = d$

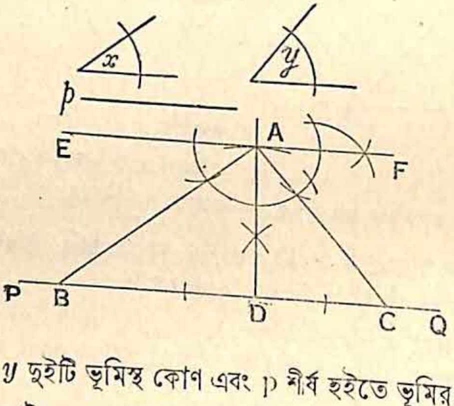
আবার A-বিন্দু BC-র লম্ব-দ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত বলিয়া $AB = AC$.

$\therefore$ ABC অভীষ্ট সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

---

7 ভূমিস্থ দুইটি কোণ এবং শীর্ষ হইতে ভূমির উপর লম্বের দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে; একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To construct a triangle having given two base-angles and the length of the perpendicular from the vertex to the base.]



মনে কর x এবং y দুইটি ভূমিস্থ কোণ এবং p শীর্ষ হইতে ভূমির উপর লম্ব।

অঙ্কন। PQ একটি সরলরেখা লও এবং উহার D-বিন্দুতে উহার উপর লম্ব টান এবং ঐ লম্ব হইতে p-এর সমান DA কাট।

A বিন্দু দিয়া $EAF \parallel PQ$ আঁক।

$\angle EAB = \angle x$ এবং $\angle FAC = \angle y$ আঁক যেন AB এবং AC PQ-কে B ও C বিন্দুতে ছেদ করে।

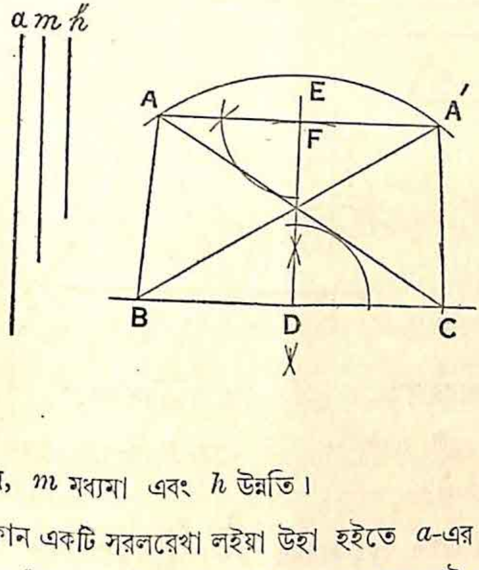
তাহা হইলে ABC অভীষ্ট ত্রিভুজ হইল।

প্রমাণ। $EF \parallel BC$, $\therefore$ $\angle EAB = \angle ABC = \angle x$ এবং $\angle FAC = \angle ACB = \angle y$ এবং $AD = p$.

---

৪. ভূমি, ভূমির দ্বিখণ্ডক মধ্যমা এবং উন্নতি দেওয়া আছে ; একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To construct a triangle having given the base, the median which bisects the base and the altitude.]



মনে কর a ভূমি, m মধ্যমা এবং h উন্নতি।

অঙ্কন। যে কোন একটি সরলরেখা লইয়া উহা হইতে a-এর সমান BC কাট। BC-র লম্ব-দ্বিখণ্ডক DE আঁক এবং উহা হইতে h-এর সমান DF কাট।

F-বিন্দু দিয়া BC-র সমান্তরাল একটি সরলরেখা টান। এখন, BC-র মধ্যবিন্দু D-কে কেন্দ্র করিয়া m-ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ আঁক যাহা BC-র সমান্তরাল সরলরেখাটিকে A, A′ বিন্দুতে ছেদ করে।

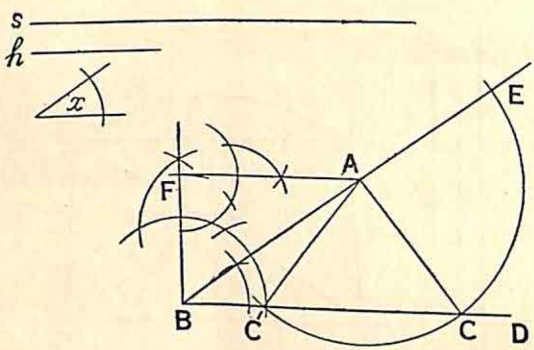
AB, AC এবং A′B, A′C যোগ কর।

তাহা হইলে ABC এবং A′BC উভয়ই অভীষ্ট ত্রিভুজ হইল।

প্রমাণ। BC $= a$, DF $= h$ এবং AD $=$ A′D $= m$.

9. একটি ভূমিস্থ কোণ, উন্নতি এবং ভূমি ভিন্ন অপর দুই বাহুর সমষ্টি দেওয়া আছে ; একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To construct a triangle having given one of the base-angles, the altitude and the sum of the other two sides.]



মনে কর s বাহুদ্বয়ের সমষ্টি, p উন্নতি এবং x ভূমিস্থ কোণ।

অঙ্কন। BD একটি সরলরেখা লও এবং B-বিন্দুতে x-কোণের সমান $\angle$DBE আঁক। এবং BE $= s$ লও।

B-বিন্দুতে BD-র উপর একটি লম্ব টান এবং উহা হইতে BF $= h$ কাট।

F-বিন্দু দিয়া BD-র সমান্তরাল সরলরেখা আঁক যাহা BE-কে A-বিন্দুতে ছেদ করে।

A-কে কেন্দ্র করিয়া AE-ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ আঁক যাহা BD-কে C এবং সম্ভব হইলে C′-বিন্দুতেও ছেদ করে।

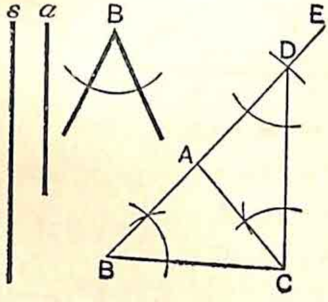
AC এবং AC′ যোগ কর।

তাহা হইলে ABC অথবা ABC′ অভীষ্ট ত্রিভুজ হইল।

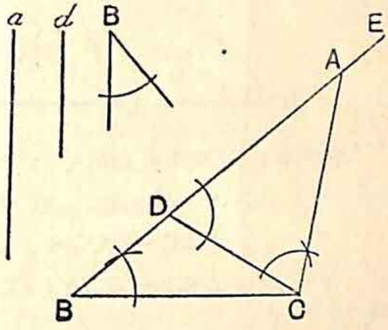
প্রমাণ। $\angle$ABC $= \angle x$, উন্নতি BF $= h$, BA + AC $=$ BA + AE $=$ BE $= s$.

10. কোন ত্রিভুজের ভূমি, ভূমি-সংলগ্ন একটি কোণ এবং অপর বাহুদ্বয়ের (1) সমষ্টি বা (2) অন্তর দেওয়া আছে ; ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To construct a triangle having given the base, one of the base angles and (1) the sum or (2) difference of the other two sides.]



(প্রথম চিত্র)



(দ্বিতীয় চিত্র)

ভূমি a, অপর বাহু দুইটির সমষ্টি s ও অন্তর d এবং ভূমি-সংলগ্ন একটি কোণ B.

অঙ্কন। BC $= a$ টান। ∠CBE = ∠B আঁক। BE হইতে (প্রথম চিত্রে) s-এর সমান এবং (দ্বিতীয় চিত্রে) d-র সমান BD অংশ কাট। DC যুক্ত কর। (প্রথম চিত্রে) ∠DCA = ∠BDC এবং (দ্বিতীয় চিত্রে) ∠DCA = ∠EDC আঁক। মনে কর CA, (প্রথম চিত্রে) BD-কে এবং (দ্বিতীয় চিত্রে) বর্ধিত BD-কে A-বিন্দুতে ছেদ করে। এক্ষণে, উভয় ক্ষেত্রেই ABC অভীষ্ট ত্রিভুজ হইল।

প্রমাণ। (প্রথম চিত্রে) ∠ACD = ∠ADC. ∴ AC = AD.

∴ AB + AC = AB + AD = BD = s, BC = a এবং ∠ABC = ∠B.

(দ্বিতীয় চিত্রে) ∠ADC = ∠ACD. ∴ AC = AD,

∴ AB − AC = AB − AD = BD = d, BC = a, ∠ABC = ∠B.

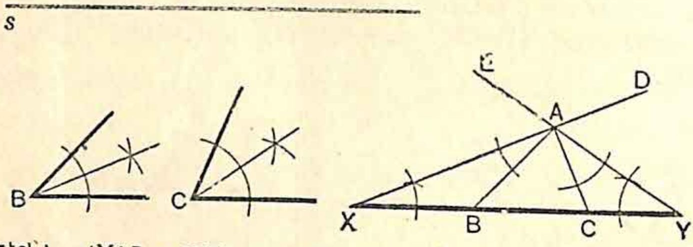
11. কোন ত্রিভুজের পরিসীমা ও ভূমিসংলগ্ন দুইটি কোণ দেওয়া আছে ; ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে। [To construct a triangle having given the perimeter and two base angles.]

s পরিসীমা এবং B ও C ভূমিসংলগ্ন দুইটি কোণ।

অঙ্কন। s-এর সমান করিয়া XY সরলরেখা টান। X ও Y বিন্দুতে যথাক্রমে ∠B ও ∠C-এর অর্ধপরিমিত YXD ও XYE কোণ অঙ্কিত কর।

XD ও YE-র ছেদবিন্দু A-তে ∠YXD-এর সমান ∠XAB এবং ∠XYE-এর সমান

করিয়া ∠YAC অঙ্কিত কর। মনে কর AB ও AC, XY-কে B ও C বিন্দুতে ছেদ করিল। এক্ষণে, ABC অভীষ্ট ত্রিভুজ হইল।



প্রমাণ। ∠XAB = ∠BXA, ∴ AB = BX ; এইরূপে AC = CY.

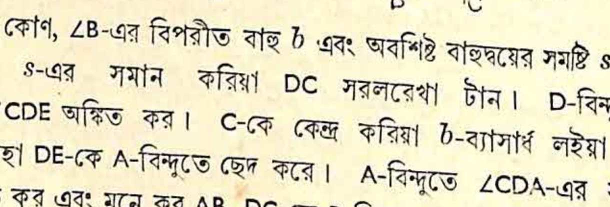
∴ AB + BC + AC = XB + BC + CY = XY = s.

∠ABC = ∠XAB + ∠BXA = 2∠BXA = প্রদত্ত ∠B

এবং ∠ACB = ∠CYA + ∠CAY = 2∠CYA = প্রদত্ত ∠C.

12. কোন ত্রিভুজের একটি কোণ, কোণসংলগ্ন বাহুদ্বয়ের সমষ্টি এবং ঐ কোণের বিপরীত বাহু দেওয়া আছে ; ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To construct a triangle having given an angle, the sum of the sides containing the angle and the side opposite to that angle.]



B নির্দিষ্ট কোণ, ∠B-এর বিপরীত বাহু b এবং অবশিষ্ট বাহুদ্বয়ের সমষ্টি s.

অঙ্কন। s-এর সমান করিয়া DC সরলরেখা টান। D-বিন্দুতে ∠B-এর অর্ধপরিমিত ∠CDE অঙ্কিত কর। C-কে কেন্দ্র করিয়া b-ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কিত কর যাহা DE-কে A-বিন্দুতে ছেদ করে। A-বিন্দুতে ∠CDA-এর সমান করিয়া ∠DAB অঙ্কিত কর এবং মনে কর AB, DC-কে B-বিন্দুতে ছেদ করিল। AC যুক্ত কর। এখন, ABC অভীষ্ট ত্রিভুজ হইল।

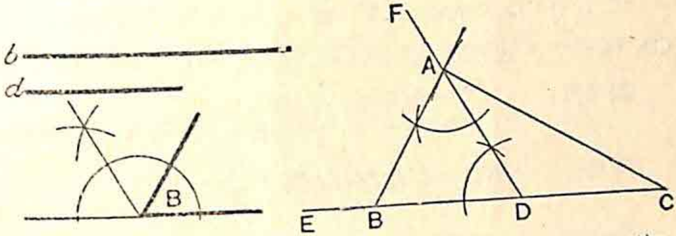
প্রমাণ। ∠BDA = ∠DAB, ∴ AB = DB.

∴ AB + BC = DB + BC = DC = s ; AC = b.

এবং ∠ABC = ∠BDA + ∠BAD = 2∠BDA = প্রদত্ত ∠B.

13. কোন ত্রিভুজের একটি কোণ, কোণ-সংলগ্ন বাহু দুইটির অন্তর এবং ঐ কোণের বিপরীত বাহু দেওয়া আছে, ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে। [To construct a triangle having given an angle, the difference of the sides containing the angle, and the side opposite to that angle.]

B নির্দিষ্ট কোণ, ∠B-এর বিপরীত বাহু b এবং অপর বাহুদ্বয়ের অন্তর d.



অঙ্কন। d-র সমান DC সরলরেখা টান এবং CD-কে E-বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত কর। ED সরলরেখার D-বিন্দুতে $\left(90° - \frac{B}{2}\right)$ পরিমিত ∠EDF অঙ্কিত কর।

C-কে কেন্দ্র করিয়া b-ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কিত কর যাহা DF-কে A-বিন্দুতে ছেদ করে। DA সরলরেখার A-বিন্দুতে ∠EDAএর সমান করিয়া ∠DAB অঙ্কিত কর। মনে কর AB, ED-কে B-বিন্দুতে ছেদ করে। AC যুক্ত কর। এখন, ABC অভীষ্ট ত্রিভুজ হইল।

প্রমাণ। ∠DAB = ∠BDA, ∴ AB = BD.

∴ BC − AB = BC − BD = DC = d ; AC = b ;

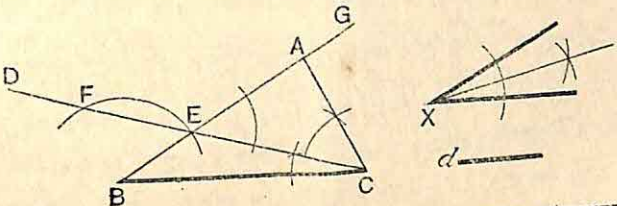
এবং ∠ABC = 180° − (∠BAD + ∠BDA)

$= 180° - \left(90° - \frac{B}{2} + 90° - \frac{B}{2}\right) =$ প্রদত্ত ∠B.

---

14. কোন ত্রিভুজের ভূমি, ভূমিসংলগ্ন কোণদ্বয়ের অন্তর এবং অপর বাহুদ্বয়ের অন্তর দেওয়া আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To construct a triangle having given the base, the difference of the base angles, and the difference of the remaining sides.]



মনে কর BC ভূমি, ভূমিসংলগ্ন কোণদ্বয়ের অন্তর X, এবং অপর বাহুদ্বয়ের অন্তর d.

অঙ্কন। BC সরলরেখার C-বিন্দুতে X-কোণের অর্ধপরিমিত BCD-কোণ অঙ্কিত কর। B-কে কেন্দ্র করিয়া d-ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কিত কর যাহা CD-কে E এবং F-বিন্দুতে ছেদ করে। মনে কর E ও F-বিন্দু দুইটির মধ্যে E-বিন্দুই C-র অধিকতর নিকটবর্তী। BE সংযুক্ত কর এবং ইহাকে G-বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত কর।

EC রেখার C-বিন্দুতে ∠CEG-এর সমান করিয়া ∠ECA অঙ্কিত কর এবং মনে কর CA, BC-কে A-বিন্দুতে ছেদ করে। এক্ষণে, ABC অভীষ্ট ত্রিভুজ হইল।

প্রমাণ। $\angle AEC = \angle ACE, \quad \therefore \quad AC = AE$

$$\therefore \quad AB - AC = AB - AE = EB = d.$$

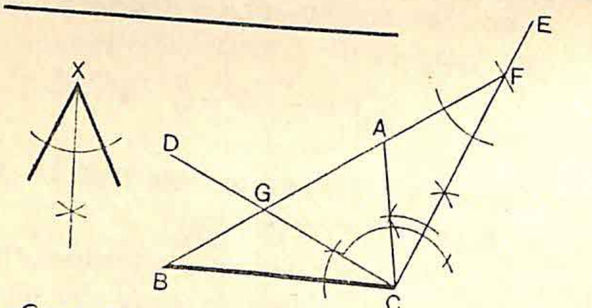
আবার, $\angle ACB - \angle ABC = \angle ACE + \frac{X}{2} - \angle EBC$

$$= \angle AEC + \frac{X}{2} - \angle EBC$$

$$= \angle EBC + \frac{X}{2} + \frac{X}{2} - \angle EBC = \angle X.$$

15. কোন ত্রিভুজের ভূমি, ভূমি-সংলগ্ন কোণদ্বয়ের অন্তর এবং অপর বাহু দুইটির সমষ্টি দেওয়া আছে ; ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To construct a triangle having given the base, the difference of the base angles and the sum of the remaining sides]



মনে কর BC ভূমি, X ভূমি-সংলগ্ন কোণদ্বয়ের অন্তর এবং s অপর বাহু দুইটির সমষ্টি।

অঙ্কন। C-বিন্দুতে $\frac{X}{2}$ কোণের সমান ∠BCD অঙ্কিত কর। C-বিন্দুতে DC-র উপর লম্ব CE টান। B-কে কেন্দ্র করিয়া s-ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কিত কর যাহা CE-কে F-বিন্দুতে ছেদ করে। BF সংযুক্ত কর। FC-র C-বিন্দুতে ∠BFC এর সমান করিয়া ∠FCA অঙ্কিত কর এবং মনে কর CA, BF-কে A-বিন্দুতে ছেদ করিল। এক্ষণে, ABC অভীষ্ট ত্রিভুজ হইল।

প্রমাণ। মনে কর CD ও BF, G-বিন্দুতে ছেদ করিল।

$\angle AFC = \angle ACF$, $\therefore$ $AF = AC$.

$\therefore$ $AB + AC = AB + AF = BF = s$.

আবার, $\angle AGC = \angle GFC$-এর পূরক $= \angle ACF$-এর পূরক $= \angle ACG$.

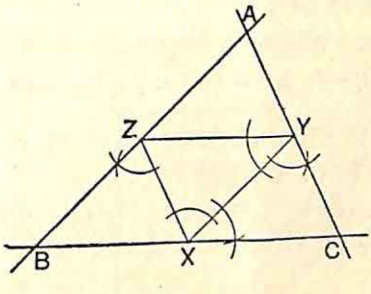
$$\therefore \angle ACB - \angle ABC = \angle ACG + \frac{X}{2} - \angle GBC.$$

$$= \angle AGC + \frac{X}{2} - \angle GBC = \angle GBC + \frac{X}{2} + \frac{X}{2} - \angle GBC = \angle X$$

---

16. কোন ত্রিভুজের তিনটি বাহুর মধ্যবিন্দুর অবস্থান দেওয়া আছে; ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To construct a triangle having given the middle points of the three sides.]



মনে কর X, Y, Z ত্রিভুজের বাহু তিনটির মধ্যবিন্দুর অবস্থান।

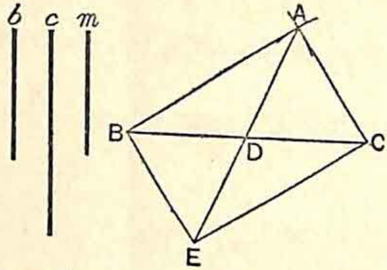
অঙ্কন। XY, YZ, ZX যুক্ত কর। X, Y, Z বিন্দু দিয়া যথাক্রমে YZ, ZX, XY এর সমান্তরাল BC, CA, AB তিনটি সরলরেখা টান এবং মনে কর উহারা পরস্পর A, B, C বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। তাহা হইলে, ABC অভীষ্ট ত্রিভুজ হইল।

প্রমাণ। AZXY সামান্তরিকের $AZ = XY$; ZBXY সামান্তরিকের $ZB = XY$, $\therefore$ $AZ = ZB$, অর্থাৎ Z, AB-র মধ্যবিন্দু। এইরূপে প্রমাণ করা যায় X, BC-র এবং Y, AC-র মধ্যবিন্দু।

---

17. কোন ত্রিভুজের দুই বাহু এবং তৃতীয় বাহুর সমদ্বিখণ্ডক মধ্যমার দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To construct a triangle having given the lengths of two sides and of the median which bisects the third side.]



মনে কর b, c দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য এবং m তৃতীয় বাহুর সমদ্বিখণ্ডক মধ্যমা।

অঙ্কন। ABC ত্রিভুজ অঙ্কিত কর যাহার $AC = b$. $CE = c$ এবং $AE = 2m$. ACEB সামান্তরিক সম্পূর্ণ কর এবং BC যুক্ত কর।

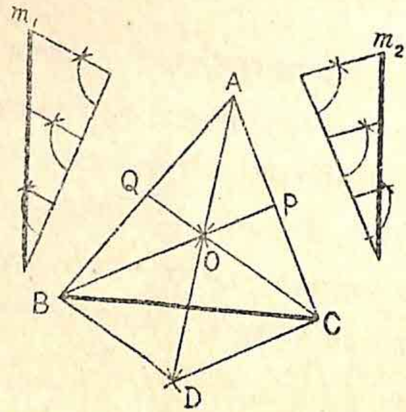
এক্ষণে, ABC অভীষ্ট ত্রিভুজ হইল।

প্রমাণ। মনে কর BC, AE-কে D-বিন্দুতে ছেদ করিল।

$AB = CE = c$, $AC = b$, $AD = \frac{1}{2}AE = \frac{1}{2} \times 2m = m$.

18. কোন ত্রিভুজের এক বাহুর এবং অপর দুই বাহুর সমদ্বিখণ্ডক মধ্যমা দুইটির দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To construct a triangle having given the lengths of one side and of the medians which bisect the other two sides.]



মনে কর BC একটি বাহু, m_1 এবং m_2 অপর দুই বাহুর সমদ্বিখণ্ডক মধ্যমা।

অঙ্কন। OBC ত্রিভুজ অঙ্কিত কর যাহার OB এবং OC বাহু যথাক্রমে $\frac{2}{3}m_1$ ও $\frac{2}{3}m_2$-এর দৈর্ঘ্যের সমান ; BOCD সামান্তরিক সম্পূর্ণ কর। DO যুক্ত কর এবং ইহাকে DO-র সমান করিয়া A বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত কর।

AB, AC যুক্ত কর।

এক্ষণে, ABC অভীষ্ট ত্রিভুজ হইল।

প্রমাণ। BO এবং CO কে বর্ধিত কর যেন উহারা AC, AB-কে যথাক্রমে P এবং Q-বিন্দুতে ছেদ করে।

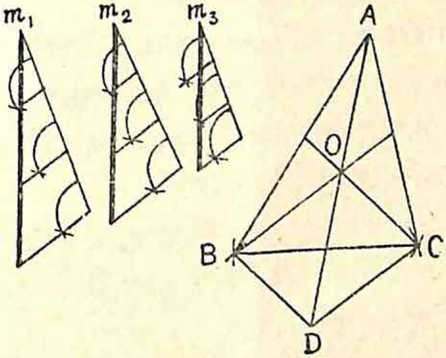
AO = OD এবং OP ∥ DC, ∴ P, AC-র মধ্যবিন্দু।

এইরূপে Q, AB-র মধ্যবিন্দু। ∴ ABC ত্রিভুজের দুইটি মধ্যমা BP ও CQ, O-বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

∴ $BP = \frac{3}{2}BO = \frac{3}{2}.\frac{2}{3}\ m_1 = m_1$; এবং $CQ = \frac{3}{2}CO = \frac{3}{2}.\frac{2}{3}\ m_2 = m_2$.

---

19. কোন ত্রিভুজের তিনটি মধ্যমার দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে। [To construct a triangle having given the lengths of three medians.]



মনে কর m_1, m_2, m_3, তিনটি মধ্যমা।

অঙ্কন। OCD ত্রিভুজ অঙ্কিত কর যাহার OD, DC, CO বাহু তিনটি যথাক্রমে $\frac{2}{3}m_1$, $\frac{2}{3}m_2$, এবং $\frac{2}{3}m_3$-এর দৈর্ঘ্যের সমান। OCDB সামান্তরিক সম্পূর্ণ কর। DO-কে DO-র সমান করিয়া A-বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত কর। AB, BC, AC যুক্ত কর। এখন, ABC অভীষ্ট ত্রিভুজ হইল।

পূর্ববর্তী সম্পাদ্যের মত করিয়া প্রমাণ কর।

অনুশীলনী (বিবিধ) 29

1. কোন ত্রিভুজের তিনটি কৌণিক বিন্দু হইতে সমদূরবর্তী একটি বিন্দু নির্ণয় কর।

2. কোন ত্রিভুজের তিনটি বাহু হইতে সমদূরবর্তী একটি বিন্দু নির্ণয় কর।

(B. S. E. 1957)

3. BC একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা এবং A একটি নির্দিষ্ট বহিঃস্থ বিন্দু ; A-বিন্দু দিয়া এমন একটি সরলরেখা টান যাহা BC-র সহিত কোন নির্দিষ্ট P-কোণের সমান একটি কোণ উৎপন্ন করে।

4. সমবাহু ত্রিভুজের পরিসীমা দেওয়া আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

5. সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষ হইতে ভূমির উপর পাতিত লম্বের দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে ; ত্রিভুজ অঙ্কিত কর।

6. সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও অপর একটি বাহুর সমষ্টি বা অন্তর এবং তৃতীয় বাহু দেওয়া আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

7. ভূমি সংলগ্ন কোণদ্বয় এবং উন্নতি দেওয়া আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

8. ভূমি, উন্নতি ও ভূমির সমদ্বিখণ্ডক মধ্যমা দেওয়া আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

9. ABC কোণের মধ্যে P একটি নির্দিষ্ট বিন্দু ; AB এবং BC দ্বারা ছিন্ন এমন একটি সরলরেখা টান যাহা P-বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হইবে।

10. a, $b-c$ এবং B নির্দিষ্ট, ABC ত্রিভুজ অঙ্কিত কর।

11. ভূমি-সংলগ্ন একটি কোণ, শীর্ষ হইতে ভূমির উপর লম্ব এবং অপর বাহুদ্বয়ের সমষ্টি দেওয়া আছে ; ত্রিভুজ অঙ্কিত কর।

12. ভূমি, ভূমি-সংলগ্ন একটি কোণ এবং শীর্ষ হইতে ভূমির উপর লম্ব দেওয়া আছে ; ত্রিভুজ অঙ্কিত কর।

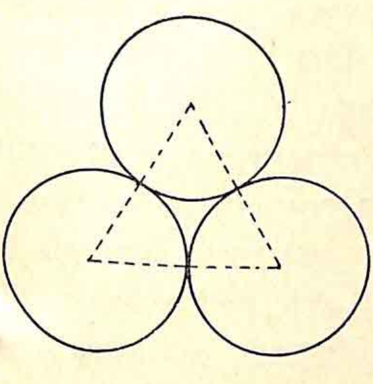
13. ভূমি, শিরঃকোণ এবং অপর দুই বাহুর (1) সমষ্টি, (2) অন্তর দেওয়া আছে ; ত্রিভুজ অঙ্কিত কর।

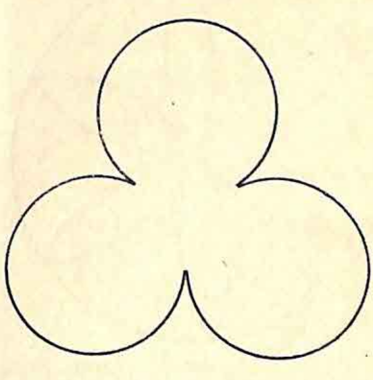
জ্যামিতিক চিত্রের সাহায্যে বিবিধ নকশা (ডিজাইন) অঙ্কন

জ্যামিতির সংজ্ঞা শিক্ষার সঙ্গে সঙ্গে বিবিধ সামতলিক ক্ষেত্রের, যেমন, সমবাহু ত্রিভুজ, আয়তক্ষেত্র, বর্গক্ষেত্র, সুষম ষড়্‌ভুজ, বৃত্ত, অর্ধবৃত্ত প্রভৃতির অঙ্কন প্রণালীর সহিত পরিচয় হইয়া থাকে। ব্যবহারিক ক্ষেত্রে ঐ সমস্ত চিত্রের সাহায্যে ভিন্ন ভিন্ন ডিজাইন বা নমুনা অঙ্কন করা যায়। আলপনা, সূচীশিল্প, শাড়ীর পাড়, মন্দির প্রভৃতির নির্মাণকার্যে, অলঙ্কার তৈরি প্রভৃতি কারুশিল্পে নানারূপ জ্যামিতিক ডিজাইনের ব্যবহারিক প্রয়োগ দেখা যায়। অপেক্ষাকৃত সরল ডিজাইনে মাত্র সরলরৈখিক ক্ষেত্রের ব্যবহার হইয়া থাকে এবং জটিল ডিজাইনে ঋজুরেখ ও বক্ররেখ উভয়বিধ চিত্রেরই প্রয়োগ হইয়া থাকে।

এই সমস্ত ডিজাইন অঙ্কনের সময় অঙ্কনের শুদ্ধতার প্রতি বিশেষ দৃষ্টি রাখিতে হইবে, নতুবা ডিজাইনের বিভিন্ন অংশের সুষমতা এবং প্রতিসমতা ব্যাহত হইবে, ফলে ডিজাইনের সৌন্দর্যও নষ্ট হইয়া যাইবে।

নিম্নে কয়েকটি সরল ডিজাইন এবং উহাদের অঙ্কন প্রণালী বর্ণিত হইতেছে। ডিজাইন অঙ্কিত হইলে যে দাগগুলি থাকিবে না সেইগুলি বিন্দুময় রেখা (dotted line) দ্বারা অঙ্কন করা হইবে।



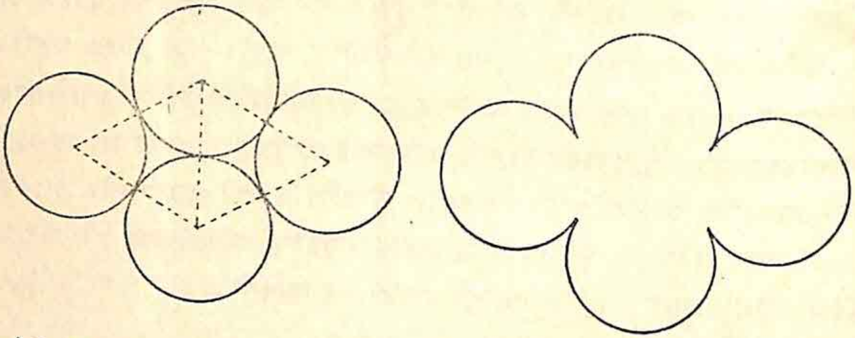


সুবিধামত যে কোন বাহুবিশিষ্ট একটি সমবাহু ত্রিভুজ আঁক। অতঃপর ত্রিভুজের কৌণিক বিন্দু তিনটিকে কেন্দ্র করিয়া ঐ ত্রিভুজের বাহুর অর্ধপরিমিত ব্যাসার্ধ লইয়া তিনটি বৃত্তচাপ এমন ভাবে আঁক যেন উহারা উক্ত ত্রিভুজটির বাহু পর্যন্ত প্রসারিত হয়।

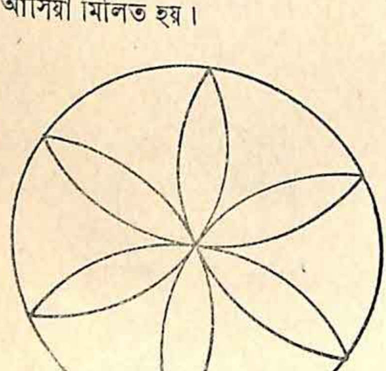
এখন ত্রিভুজটির বাহুর দাগ মুছিয়া ফেলিলে ডিজাইনটি কিরূপ হইল লক্ষ্য কর।

প্রশ্ন : 3 সেন্টিমিটার বাহুবিশিষ্ট একটি সমবাহু ত্রিভুজের সাহায্যে পূর্ব চিত্রের অনুরূপ একটি চিত্র অঙ্কিত কর।

যে কোন দৈর্ঘ্যের একটি সরলরেখা লইয়া উহার উভয় পার্শ্বে দুইটি সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত কর। ইহাতে একটি চতুর্ভুর্জ উৎপন্ন হইল। এখন এই চতুর্ভুজের চারিটি



কৌণিক বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া এবং চতুর্ভুজের বাহুর অর্ধপরিমিত ব্যাসার্ধ লইয়া এমন চারিটি বৃত্তচাপ অঙ্কিত কর যেন উহারা উক্ত চতুর্ভুজের বাহুচতুষ্টয়ের মধ্যবিন্দুতে আসিয়া মিলিত হয়।



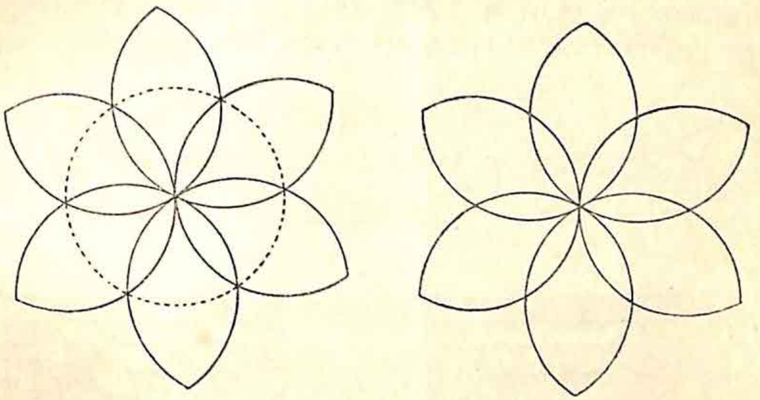
এখন চতুর্ভুজের বাহুর দাগ মুছিয়া ফেল। লক্ষ্য কর ডিজাইনটি কিরূপ আকার ধারণ করিল।

প্রশ্ন : 4 সেন্টিমিটার বাহুবিশিষ্ট দুইটি সমবাহু ত্রিভুজের সাহায্যে উপরের চিত্রের অনুরূপ একটি চিত্র অঙ্কন কর।

যে কোন ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। বৃত্তপরিধির উপর যে কোন বিন্দু চিহ্নিত কর। এখন ঐ বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া উক্ত ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ আঁক যাহা বৃত্তপরিধিকে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করে। এইরূপে অঙ্কিত চাপ ও পরিধির ছেদবিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া একই ব্যাসার্ধ লইয়া আরও পাঁচটি চাপ অঙ্কিত করিয়া যাও। দেখ ছয়টি দলবিশিষ্ট একটি ফুলের নকশা (design) উৎপন্ন হইয়াছে।

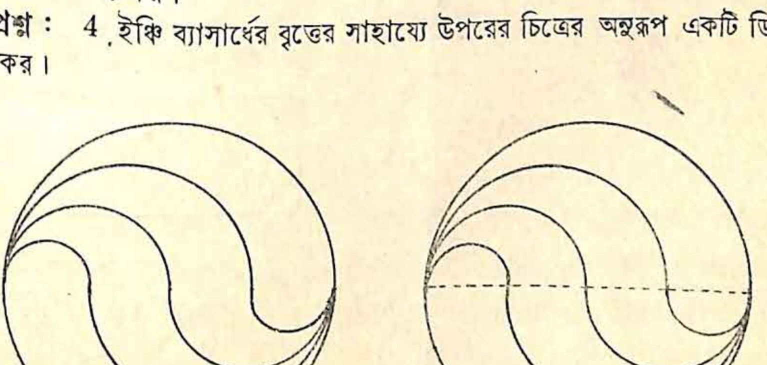
প্রশ্ন : $1\frac{1}{2}''$ ব্যাসার্ধের বৃত্তের সাহায্যে উপরের চিত্রের অনুরূপ একটি চিত্র আঁক।

যে কোন ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর যেন পরিধিটি বিন্দু-চিহ্ন দ্বারা দেখান হয়। এখন উপরের চিত্রের প্রণালীতে বৃত্তের পরিধিকে ছয় ভাগে বিভক্ত কর এবং প্রত্যেক বিভাগ-বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া পূর্ব ব্যাসার্ধের অর্ধপরিমিত ব্যাসার্ধ লইয়া ছয়টি



চাপ অঙ্কিত কর যেন দুই দুইটি চাপ পরিধির বহির্দেশে আসিয়া মিলিত হয়। অঙ্কন শেষ হইলে প্রথমোক্ত বৃত্ত-পরিধির দাগগুলি মুছিয়া ফেল। কেমন সুন্দর একটি ডিজাইন অঙ্কিত হইল লক্ষ্য কর।

প্রশ্ন : 4 ইঞ্চি ব্যাসার্ধের বৃত্তের সাহায্যে উপরের চিত্রের অনুরূপ একটি ডিজাইন অঙ্কন কর।

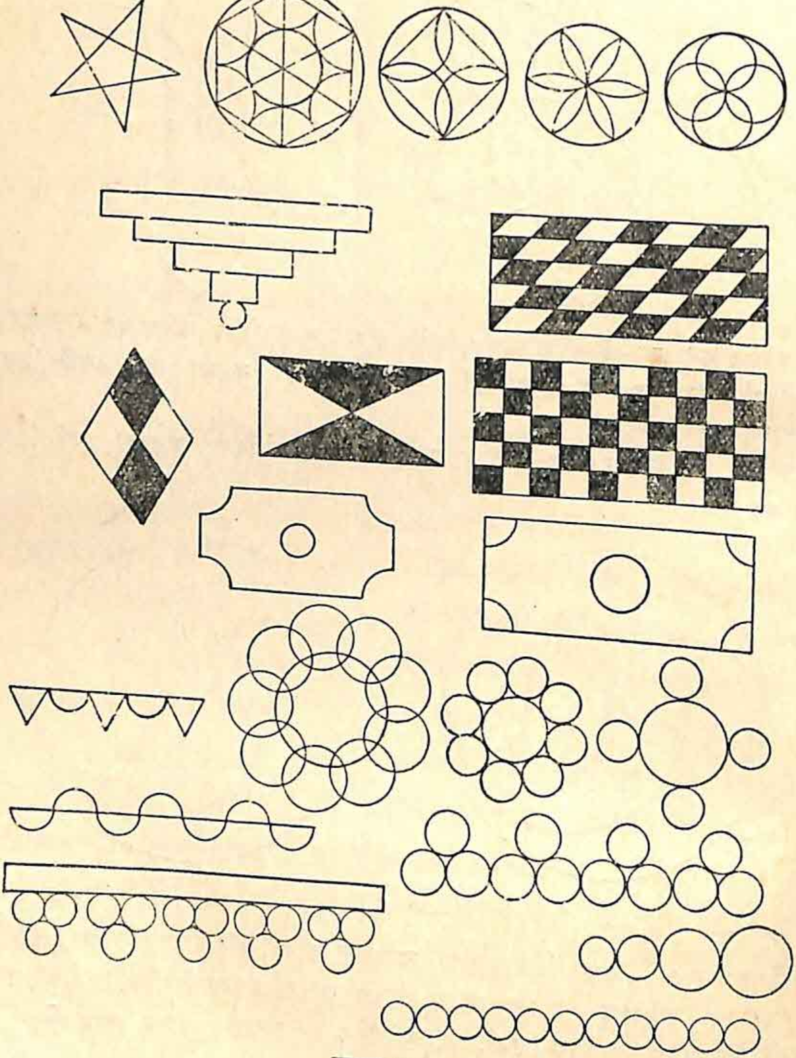


যে কোন দৈর্ঘ্যের (ধর 2″) একটি সরলরেখা লও এবং উহার উপর $\frac{1}{2}''$ অন্তর তিনটি দাগ দেও। এখন, দ্বিতীয় দাগটিকে কেন্দ্র করিয়া 1″ ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কন কর। অতঃপর বাঁ দিক হইতে আরম্ভ করিয়া সরলরেখাটির উপর $\frac{1}{2}''$, 1″, $1\frac{1}{2}''$ ব্যাসের উপর উপরের দিকে তিনটি অর্ধবৃত্ত আঁক। অনুরূপ ভাবে ডান দিক হইতে

আরম্ভ করিয়া $\frac{1}{2}''$, $1''$, $1\frac{1}{2}''$ ব্যাসের উপর নীচের দিকে তিনটি অর্ধবৃত্ত আঁক। এখন, প্রথমোক্ত রেখাটি মুছিয়া ফেলিয়া ডিজাইনটি কিরূপ হইল লক্ষ্য কর।

প্রশ্ন : $2{\cdot}4''$ একটি সরলরেখার সাহায্যে উপরের চিত্রের অনুরূপ একটি চিত্র আঁক।

সরলরেখা, ঋজুরেখ ক্ষেত্র, বৃত্তচাপ, বৃত্ত প্রভৃতির সাহায্যে সুদৃশ্য ডিজাইন অঙ্কন করা যায়। বিভিন্ন শিল্পকার্যে ব্যবহৃত কয়েকটি নমুনা নিম্নে দেখান হইল।



পাটীগণিত

নবম শ্রেণীর পাঠ্যাংশ

প্রথম অধ্যায়

মেট্রিক প্রণালী ও দশমিক মুদ্রা

1. মেট্রিক প্রণালী—দৈর্ঘ্য, ওজন এবং অর্থ বিষয়ক পরিমাপে যে সমস্ত এককাবলী ব্যবহৃত হয় তাহাদের পরস্পরের মধ্যে বিভিন্ন সম্বন্ধে বিদ্যমান থাকিলে উহাদের লঘূকরণাদি সময় ও শ্রম সাপেক্ষ। কিন্তু বিভিন্ন এককের মধ্যে যদি এরূপ সম্বন্ধ থাকে যে প্রতি একক উহার নিম্নতর এককের 10 গুণ, তাহা হইলে মিশ্র যোগ, বিয়োগ, গুণ, ভাগ প্রক্রিয়া অমিশ্র যোগ, বিয়োগ, গুণ, ভাগ প্রক্রিয়ার মতই সহজ হয় এবং দশমিক বিন্দু ডান দিকে বা বাঁ দিকে সরাইয়া অতি সহজেই লঘূকরণ প্রক্রিয়া সম্পন্ন করা যায়।

ঊনবিংশ শতাব্দীতে ফরাসী বিপ্লবের পরে ফ্রান্স দেশে প্রথমতঃ এইরূপ একটি প্রণালীর প্রচলন হয়। ইহার নাম **মেট্রিক প্রণালী** (Metric system)। এই প্রণালীতে রৈখিক পরিমাণের মূল একক **মিটার** (Metre), যাহা হইতে প্রণালীটির উক্তরূপ নাম হইয়াছে।

1957 খৃষ্টাব্দের এপ্রিল মাসের প্রথম তারিখ হইতে ভারতরাষ্ট্রে দশমিক মুদ্রা প্রচলিত হইয়াছে। দৈর্ঘ্য পরিমাপেও মেট্রিক পদ্ধতির প্রচলন আরম্ভ হইয়াছে। আশা করা যায়, শীঘ্রই সমস্ত পরিমাপে একমাত্র মেট্রিক পদ্ধতির প্রচলন থাকিবে।

2. দৈর্ঘ্য ও ওজন বিষয়ক এককাবলীতে অংশ এবং গুণ বুঝাইবার জন্য মৌলিক এককের পূর্বে নিম্নলিখিত শব্দ কয়টি ব্যবহৃত হইয়া থাকে, যথা :—

মাইক্রো (micro)	$=\frac{1}{1000000}$ অংশ
মিলি (milli মিলি)	$=\frac{1}{1000}$ অংশ
সেন্টি (centi সে.)	$=\frac{1}{100}$ অংশ
ডেসি (deci ডেসি)	$=\frac{1}{10}$ অংশ
	একক
ডেকা (deca ডেকা)	$=$ 10 গুণ
হেক্টো (hecto হে.)	$=$ 100 গুণ
কিলো (kilo কি.)	$=$ 1000 গুণ
মিরিয়া (myria মিরি.)	$=$10000 গুণ

রৈখিক পরিমাণ

3. মিটার। পৃথিবীর পরিধির এক-চতুর্থাংশের (মেরু হইতে বিষুবরেখা পর্যন্ত) কোটি ভাগের এক ভাগ দৈর্ঘ্যকে এক মিটার বলিয়া কল্পনা করা হইয়াছিল। এই কল্পনা অনুসারে 1 মিটার $=39{\cdot}37079\ldots$ ইঞ্চি। আরও সূক্ষ্মভাবে হিসাব করিলে উহা $39{\cdot}370113\ldots$ ইঞ্চি হয়।

ষ্ট্যাণ্ডার্ড মিটার হিসাবে তুলনার উদ্দেশ্যে প্লাটিনাম-ইরিডিয়ামে প্রস্তুত একটি দণ্ডে এই মূল মাপ (মিটার) চিহ্নিত করিয়া ফ্রান্সের অন্তর্বর্তী সেভ্রেস্-এর আন্তর্জাতিক ওজন ও মাপ কমিটি'র গবেষণাগারে ঐ দণ্ডটি রক্ষিত হইয়াছে।

মিটার শব্দটির সহিত ডেসি, সেন্টি, মিলি উপসর্গ তিনটি যোগ করিয়া যথাক্রমে মিটারের দশাংশ, শতাংশ এবং সহস্রাংশ জ্ঞাপন করা হয় এবং উহার সহিত ডেকা, হেক্টো, কিলো এবং মিরিয়া যোগ করিয়া যথাক্রমে মিটারের 10, 100, 1000 এবং 10000 গুণ জ্ঞাপন করা হয়। মিটারের নিযুতাংশকে অথবা মিলি মিটারের সহস্রাংশকে মাইক্রন (micron) বলে।

রৈখিক পরিমাণের এককাবলী

1000 মাইক্রন	=1 মিলিমিটার	($\frac{1}{1000}$ মিটার)
10 মিলিমিটার	=1 সেন্টিমিটার	($\frac{1}{100}$ মিটার)
10 সেন্টিমিটার	=1 ডেসিমিটার	($\frac{1}{10}$ মিটার)
10 ডেসিমিটার	=1 **মিটার**	
10 মিটার	=1 ডেকামিটার	(10 মিটার)
10 ডেকামিটার	=1 হেক্টোমিটার	(100 মিটার)
10 হেক্টোমিটার	=1 কিলোমিটার	(1000 মিটার)
10 কিলোমিটার	=1 মিরিয়ামিটার	(10000 মিটার)

দৈর্ঘ্যের প্রাথমিক একক **মিটার**।

4. মেট্রিক প্রণালীতে ক্রমিক একক-সমূহের মধ্যে দশমিক সংখ্যার অঙ্কসমূহের পরস্পরের সম্বন্ধের অনুরূপ সম্বন্ধ বর্তমান। সুতরাং দশমিকের সাহায্যে যে কোন পরিমাপকে উচ্চতর বা নিম্নতর এককে পরিণত করা যায়, যথা—

(1) 123456789000 মাইক্রন
=123456789 মিলিমিটার =12345678·9 সেন্টি মি.
=1234567·89 ডেসিমিটার =123456·789 মিটার
=12345·6789 ডেকামিটার =1234·56789 হেক্টো মি,
=123·456789 কিলোমিটার =12·3456789 মিরিয়া মি.

(2) 1 মিটার 2 ডেসিমিটার 3 সেন্টিমিটার 4 মিলিমিটার 5 মাইক্রন
=1234005 মাইক্রন
=1234·005 মিলিমিটার =123·4005 সেন্টিমিটার
=12·34005 ডেসিমিটার =1·234005 মিটার, ইত্যাদি।

5. বর্তমানে প্রচলিত এককের ও মেট্রিক এককের পরস্পর সম্পর্ক বুঝাইবার জন্য একটি পরিবর্তন তালিকা দেওয়া হইল ঃ

1 কি. মি.	=0·62 মাইল	1 মাইল	=1·61 কি. মি.;
1 মিটার	=1·09 গজ ;	1 গজ	=0·91 মিটার
1 মিলি মি.	=0·04 ইঞ্চি ;	1 ইঞ্চি	=25·4 মিলি মি.।

উদা. 4. এক কিলোগ্রাম চিনির মূল্য 1 টাকা 10 নয়া পয়সা হইলে 12·5 কিলোগ্রামের মূল্য কত ?

1 টাকা 10 নয়া পয়সা = 110 নয়া পয়সা।

∴ নির্ণেয় মূল্য = 110 × 12·5 ন. প. = 1375 ন. প.

= 13 টাকা 75 নয়া পয়সা।

প্রশ্নমালা 1

1. নিম্নলিখিত রাশিগুলির প্রত্যেকটিকে (*i*) কিলোমিটার, (*ii*) মিটার ও (*iii*) সেন্টিমিটারে প্রকাশ কর :

(1) 8 কি. মি. 3 হে. মি. 2 মি. 5 ডেসি মি.।

(2) 2 মিরি. মি. 7 মি. 4 সে. মি.।

2. নিম্নমিখিত রাশিগুলির প্রত্যেকটিকে (*i*) কিলোগ্রাম, (*ii*) গ্রাম ও (*iii*) ডেসিগ্রামে পরিণত কর :

(1) 5 কি. গ্রা. 3 হে. গ্রা. 3 ডেকা গ্রা. 3 গ্রা.।

(2) 8 কি. গ্রা. 7 ডেকা গ্রা. 6 গ্রা. 5 সে. গ্রা. 4 মিলি. গ্রা.।

3. মিশ্র আকারে প্রকাশ কর :

(1) 1346 গ্রা. (2) 4326 সে. গ্রা. (3) 820345 মিলি গ্রা.

(4) 25·234 কি. মি. (5) 125·302 মি.

(6) 6709021004 মাইক্রন (7) 4·3256 হে. মি.

4. 24 টাকা 37 নয়া পয়সায় কত নয়া পয়সা ?

5. 2709 নয়া পয়সাকে টাকা নয়া পয়সায় পরিণত কর।

6. যোগ কর :

(1)

মি.	ডেসি মি.	সে. মি.	মিলি মি.
8	2	4	3
3	9	2	5
4	7	4	2

(2)

গ্রা.	ডেসি গ্রা.	সে. গ্রা.	মিলি গ্রা.
8	7	6	5
4	5	6	7
3	0	0	2

(3)

টাকা	নয়া পয়সা
2	12
15	87
24	31
37	26

(4)

টাকা	নয়া পয়সা
25	13
139	48
48	97
5	41

7. বিয়োগ কর :

(1)

টাকা	নয়া পয়সা
25	7
19	14

(2)

টাকা	নয়া পয়সা
73	
49	17

8. 15 টাকা 19 ন. প. কে 38 দ্বারা গুণ কর।

9. 2 মিরি মি. 3 কি. মি. 4 হে. মি. 5 ডেকা. মি. 8 মি. 6 ডেসি মি. 7 সে. মিটারকে 45 দ্বারা গুণ কর।

10. 5 কি. গ্রা. 6 ডেকা গ্রা. 7 গ্রামকে 65 দ্বারা গুণ কর।

11. 77 টাকা 70 ন. প.কে 37 দ্বারা ভাগ কর।

12. 8 মি. 7 ডেসি. মি. 6 সে. মি. 5 মিলিমিটারকে 50 দ্বারা ভাগ কর।

13. একটি কলমের মূল্য 14 ন. প. হইলে, 12 ডজন কলমের মূল্য কত?

14. একটি চক্রের পরিধি 2 মিটার 4 সেন্টিমিটার। 33·66 কিলোমিটার অতিক্রম করিতে চাকাটি কতবার ঘুরিবে?

15. একটি চাকা 15 কিলোমিটার অতিক্রম করিতে 1250 বার ঘোরে; ঐ চাকাটির পরিধি কত?

16. এক একটি ঘোড়া দৈনিক 8 কিলোগ্রাম 4 হে. গ্রাম 2 ডেকা গ্রা. ছোলা খায়; 10টি ঘোড়ার সপ্তাহে কত কিলোগ্রাম ছোলা লাগে?

17. এক ব্যক্তি প্রতি সেকেণ্ডে 1 মি. 2 ডেসি মি. 5 সে. মি. যায়; এক ঘন্টায় সে কত কিলোমিটার যাইতে পারে?

18. 1 কিলোগ্রাম চাউলের মূল্য 62 নয়া পয়সা হইলে, 248 টাকায় কত কুইণ্টাল চাউল পাওয়া যাইবে?

19. একখানা পাথরের ওজন 1 মিরি গ্রা. 7 কি. গ্রা. 5 হে. গ্রা. হইলে, কতখানা পাথরের ওজন 7 কুইণ্টাল?

20. 1 মিটার = 1·09 গজ হইলে, 1 মাইলে কত মিটার ?

21. ক প্রতি সেকেণ্ডে 1 মিটার এবং খ প্রতি ঘণ্টায় 6 কিলোমিটার যায়। উহারা উভয়ে একস্থান হইতে একই দিকে রওনা হইলে 30 মিনিট পরে পরস্পরের ব্যবধান কত হইবে ?

22. পৃথিবীর পরিধির $\frac{1}{40000}$ অংশ 1 কিলোমিটারের সমান হইলে, পৃথিবীর পরিধি কত মাইল ? (1 কি. মি. = 0·62 মাইল)

23. দুইটি স্থানের দূরত্ব 18 কিলোমিটার। 1 মিটার = 1·09 গজ হইলে, উক্ত দূরত্ব মাইল, গজে প্রকাশ কর।

24. 1 কিলোমিটার 0·62 মাইলের সমান হইলে, 5 মাইল ও 8 কিলোমিটারের অন্তর গজে প্রকাশ কর।

---

8. মেট্রিক প্রণালীর বর্গ পরিমাণের এককাবলী :

বর্গ পরিমাণ

100 বর্গ মিলিমিটার = 1 বর্গ সেন্টিমিটার
100 বর্গ সেন্টিমিটার = 1 বর্গ ডেসিমিটার
100 বর্গ ডেসিমিটার = 1 বর্গ মিটার
100 বর্গ মিটার = 1 বর্গ ডেকামিটার
100 বর্গ ডেকামিটার = 1 বর্গ হেক্টোমিটার
100 বর্গ হেক্টোমিটার = 1 বর্গ কিলোমিটার
100 বর্গ কিলোমিটার = 1 বর্গ মিরিয়ামিটার

মেট্রিক প্রণালীতে বর্গ মিটারকে ক্ষেত্রফলের একক ধরা হয়।

1 বর্গ ডেকামিটারকে 1 **আর** (Are) বলা হয়। সুতরাং 1 আর = 100 বর্গ-মিটার।

কিন্তু 1 আর = 100 সেন্টি-আর
সুতরাং 1 সেন্টি-আর = 1 বর্গ মিটার
100 আর = 1 হেক্টার।

9. **মেট্রিক এবং ইংলণ্ডীয় বর্গ পরিমাণের এককাবলীর পরস্পর সম্বন্ধ :**

1 আর = 120 বর্গ গজ (প্রায়) = $\frac{1}{40}$ একর (প্রায়) ;

1 সেন্টি-আর = $1\frac{1}{5}$ বর্গ গজ (প্রায়) ; 1 হেক্টার = $2\frac{1}{2}$ একর (প্রায়)।

10. **মেট্রিক প্রণালার ঘন পরিমাণের এককাবলী :**

ঘন পরিমাণ

1000 ঘন মিলিমিটার = 1 ঘন সেন্টিমিটার
1000 ঘন সেন্টিমিটার = 1 ঘন ডেসিমিটার
1000 ঘন ডেসিমিটার = 1 ঘন মিটার
1000 ঘন মিটার = 1 ঘন ডেকামিটার
1000 ঘন ডেকামিটার = 1 ঘন হেক্টোমিটার
1000 ঘন হেক্টোমিটার = 1 ঘন কিলোমিটার
1000 ঘন কিলোমিটার = 1 ঘন মিরিয়া মিটার

কাঠের গুঁড়ি প্রভৃতি বৃহদাকার দ্রব্যাদির ঘন পরিমাণ (solidity) নির্ণয় করিবার জন্য 1 ঘন মিটারকে একক ধরা হয়। এই একককে **ষ্টেয়ার** (Stere) বলে।

1 ষ্টেয়ার = 1 ঘন মিটার = 10 ডেসিষ্টেয়ার = 1·308 ··· ঘন গজ।
10 ষ্টেয়ার = 1 ডেকাষ্টেয়ার = 13·08 ··· ঘন গজ।

11. **লিটার।** তরল পদার্থের ঘন পরিমাণ অর্থাৎ ধারকত্ব (capacity) নির্ণয় করিবার জন্য ঘন সেন্টিমিটারকে এককরূপে ব্যবহার করা হয়। 1 ঘন ডেসিমিটার বা 1000 ঘন সেন্টিমিটারকে **লিটার** বলা হয়। 1000 লিটার = 1 ঘন মিটার।

10 মিলিলিটার = 1 সেন্টিলিটার
10 সেন্টিলিটার = 1 ডেসিলিটার
10 ডেসিলিটার = 1 লিটার, ইত্যাদি।

12. মেট্রিক ও ইংলণ্ডীয় বিভিন্ন এককের পরস্পর সম্বন্ধ সংক্ষেপে এইরূপ :

(1) দৈর্ঘ্যের একক **মিটার** = 39·37 ··· ইঞ্চি ($39\frac{3}{8}$ ইঞ্চি প্রায়)।

(2) বর্গ পরিমাণ বা ক্ষেত্রফলের একক **বর্গ মিটার**।

(3) ঘন পরিমাণের একক **ষ্টেয়ার** = 1 ঘন মিটার।

(4) ধারকত্বের একক **লিটার (1** ঘন ডেসিমিটার)।

(5) গুরুত্ব বা ওজনের একক **গ্রাম** = 1 ঘন সেন্টিমিটার জলের ওজন
= $15\frac{1}{2}$ গ্রেন (প্রায়)
= ·0022 ··· পাউণ্ড (এভ.)।

13. বর্তমান পদ্ধতি ও মেট্রিক পদ্ধতির পরস্পর সম্বন্ধ :

দৈর্ঘ্য। 1 কিলোমিটার = 0·62 মাইল ; 1 মাইল = 1·61 কিলো. মি.
1 মিটার = 1·09 গজ ; 1 গজ = 0·91 মিটার
1 সেন্টিমিটার = 0·39 ইঞ্চি ; 1 ইঞ্চি = 25·4 মিলিমিটার
1 মিলিমিটার = 0·04 ইঞ্চি

বর্গ পরিমাণ।	1 বর্গ কিলোমিটার	= 0·39 বর্গ মাইল
	1 বর্গ মাইল	= 2·59 বর্গ কিলোমিটার
	1 হেক্টার	= 10000 ব. মি. = 2·47 একর
	1 একর	= 0·40 হেক্টার
	1 বর্গ মিটার	= 1·20 বর্গ গজ
	1 বর্গ গজ	= 0·84 বর্গ মিটার
ঘন পরিমাণ।	1 ঘন মিটার	= 1·31 ঘন গজ
	1 ঘন গজ	= 0·76 ঘন মিটার
ধারকত্ব।	1 লিটার	= 0·22 ইম্পিরিয়াল গ্যালন
	1 ইম্পিরিয়াল গ্যালন	= 4·55 লিটার

ওজন।	1 মেট্রিক টনে (Tonne)	=0·98 টন
	1 টন	=1·02 মেট্রিক টনে
	1 কুইণ্টাল	=1·97 হন্দর
	1 হন্দর	=0·51 কুইণ্টাল
	1 কুইণ্টাল	=2·68 মণ
	1 মণ	=0·37 কুইণ্টাল
	1 কিলোগ্রাম	=1·07 সের =86 তোলা
	1 সের	=0·93 কিলোগ্রাম
	1 কিলোগ্রাম	=2·20 পাউণ্ড
	1 পাউণ্ড	=0·45 কিলোগ্রাম
	1 গ্রাম	=0·09 তোলা
	1 তোলা	=11·66 গ্রাম

উদা. 1. 25 বর্গ কিলোমিটার 6 বর্গ ডেকামিটার 5 বর্গ মিটারকে বর্গ মিটারে পরিণত কর।

এস্থলে প্রত্যেক এককের জন্য দুইটি করিয়া অঙ্ক ধরিতে হইবে। একটি অঙ্ক থাকিলে উহার বাঁদিকে একটি শূন্য ধরিবে এবং কোন ঘরে অঙ্ক না থাকিলে দুইটি শূন্য ধরিতে হইবে। বর্গ এককের সমস্ত একক সম্বন্ধেই এই নিয়ম খাটিবে।

প্রদত্ত রাশি =	বর্গ কি. মি.	বর্গ. হে. মি.	বর্গ ডেকা মি.	বর্গ মিটার
	(25)	× ×	× 6	× 5

= 25000605 বর্গ মিটার।

আরও সহজভাবে সামান্য মানসিক প্রক্রিয়ার সাহায্যে উক্ত অঙ্কটি করা যায়। রাশিটিকে যে এককে পরিণত করিতে হইবে সেই এককে কোন অঙ্ক থাকিলে প্রথমতঃ সেই অঙ্কটি বা অঙ্ক দুইটি স্থাপন কর (অঙ্ক না থাকিলে দুইটি শূন্য স্থাপন কর) এবং ক্রমশঃ বাঁ দিকে পরবর্তী উচ্চতর এককের অঙ্ক স্থাপন করিয়া যাও। কোন এককের ঘরে একটি মাত্র অঙ্ক থাকিলে উহার বাঁ দিকে একটি শূন্য বসাও। অন্তর্বর্তী কোন এককের ঘরে অঙ্ক না থাকিলে তথায় দুইটি শূন্য বসাও।

উক্ত নিয়মে প্রত্যেক এককের জন্য তিন তিনটি অঙ্ক স্থাপন করিয়া গেলে ঘন রাশির লঘূকরণও সহজতর হইবে।

ঘন এককের লঘূকরণে ক্ষুদ্রতম একক ভিন্ন পরবর্তী প্রত্যেক এককের জন্য তিনটি করিয়া অঙ্ক ধরিতে হইবে। একটি অঙ্ক থাকিলে উহার বাম দিকে দুইটি শূন্য ধরিবে এবং কোন ঘরে অঙ্ক না থাকিলে তথায় তিনটি শূন্য ধরিতে হইবে।

উদা. 2. 13 ঘন কি. মি. 128 ঘন হে. মি. 7 ঘন ডেকা. মি.-কে ঘন মিটারে পরিবর্তিত কর।

13 ঘন কি. মি. 128 ঘন হে. মি. 7 ঘন ডেকা. মি.

= 13128007000 ঘন মি.।

উদা. 3. 8 কি. লি. 5 হে. লি. 4 ডেকা লি. 6 লি. 3 ডেসি লি. 2 সে. লি. 1 মিলি লিটারকে লিটারে পরিণত কর।

প্রদত্ত রাশি = 8546321 মিলি. লি. = 8546·321 লিটার।

উদা. 4. 7 হে. লি. 3 ডেকা লি. 5 লি. 2 সে. লিটারকে 24 দ্বারা গুণ কর।

প্রদত্ত গুণ্য রাশি = 73502 সে. লি.

∴ নির্ণেয় গুণফল = 73502 × 24 সে. লি. = 1764048 সে. লি.

= 1 মিরি. লি. 7 কি. লি. 6 হে. লি. 4 ডেকা লি. 4 ডেসি লি. 8 সে. লি.।

প্রশ্নমালা 2

1. 25 বর্গ কি. মি. 5 বর্গ ডেকামিটারকে বর্গ মিটারে পরিণত কর।
2. 12038756 বর্গ সে. মি.-কে বর্গ ডেকামিটারে পরিবর্তিত কর।
3. 3 ঘন মি. 326 ঘন ডেসি মি. 34 ঘন সে. মি.-কে ঘন সেন্টিমিটারে পরিবর্তিত কর।
4. 23456789 ঘন সেন্টিমিটারকে ঘন মিটারে পরিণত কর।
5. 6 হেক্টার 5 আর-কে সেন্টি-আরে পরিণত কর।
6. এক লিটার এবং এক ষ্টেয়ারে কত ঘন সেন্টিমিটার ?
7. এক লিটার জলের ওজন কত গ্রাম ? (1 ঘন সেন্টিমিটার জলের ওজন 1 গ্রাম)
8. 4·5 ডেকা লিটারে কত ঘন মিলিমিটার ?
9. 2·75 হেক্টারকে বর্গ মিটারে পরিবর্তিত কর।
10. 38·37500078 ঘন কিলোমিটারকে ঘনমিটারে পরিবর্তিত কর।

দ্বিতীয় অধ্যায়

সামান্য ভগ্নাংশ

(পুনরালোচনা)

1. পুনরালোচনার জন্য কতিপয় বিশিষ্ট উদাহরণ ও একটি প্রশ্নমালা প্রদত্ত হইল।

উদা. 1. সরল কর : $\frac{3}{8} \div \frac{5}{16}$ এর $1\frac{1}{4}$

$\frac{3}{8} \div \frac{5}{16}$ এর $1\frac{1}{4} = \frac{3}{8} \div \frac{5}{16}$ এর $\frac{5}{4}$

$= \frac{3}{8} \div \frac{25}{64} = \frac{3}{8} \times \frac{64}{25} = \frac{24}{25}.$

(দ্বিতীয় প্রণালী) $\frac{3}{8} \div \frac{5}{16}$ এর $1\frac{1}{4} = \frac{3}{8} \div (\frac{5}{16} \times \frac{5}{4})$

$= \frac{3}{8} \times \frac{16}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{24}{25}.$

উদা. 2. সরল কর : $\frac{1}{4} - [\frac{1}{8} - \{\frac{1}{16} - (\frac{1}{32} - \overline{\frac{1}{64} + \frac{1}{128}})\}]$

$\frac{1}{4} - [\frac{1}{8} - \{\frac{1}{16} - (\frac{1}{32} - \overline{\frac{1}{64} + \frac{1}{128}})\}]$

$= \frac{1}{4} - [\frac{1}{8} - \{\frac{1}{16} - (\frac{1}{32} - \frac{3}{128})\}]$

$= \frac{1}{4} - [\frac{1}{8} - \{\frac{1}{16} - \frac{1}{128}\}]$

$= \frac{1}{4} - [\frac{1}{8} - \frac{7}{128}] = \frac{1}{4} - \frac{9}{128} = \frac{23}{128}$, উত্তর।

উদা. 3. সরল কর : $2\frac{1}{2}(3\frac{1}{4} - 2\frac{1}{2}) \div 3\frac{1}{8}$ এর $\frac{2}{5}$

প্রদত্ত রাশি $= \frac{5}{2}(\frac{13}{4} - \frac{5}{2}) \div \frac{25}{8}$ এর $\frac{2}{5}$

$= \frac{5}{2}(\frac{13-10}{4}) \div \frac{25}{8}$ এর $\frac{2}{5}$

$= \frac{5}{2}$ এর $\frac{3}{4} \times \frac{8}{25} \times \frac{5}{2}$

$= \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}.$

উদা. 4. সরল কর : $\frac{2}{3} \div \frac{4}{9}$ এর $7\frac{1}{2} + 999\frac{494}{495} \times 99$

প্রদত্ত রাশি $= \frac{2}{3} \times \frac{9}{4} \times \frac{2}{15} + (1000 - \frac{1}{495}) \times 99$

$= \frac{1}{5} + 99000 - \frac{1}{495} \times 99$

$= \frac{1}{5} + 99000 - \frac{1}{5} = 99000$

উদা. 5. সরল কর : $\frac{1}{2} \div \frac{2}{3}$ এর $\frac{3}{4} \div \frac{4}{5} \times \frac{12 \text{ টা. } 36 \text{ ন. প.}}{5 \text{ টা. } 15 \text{ ন. প.}}$

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = \frac{1}{2} \div \frac{2}{3} \text{ এর } \frac{3}{4} \div \frac{4}{5} \times \frac{1236 \text{ ন. প.}}{515 \text{ ন. প.}}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{5}{4} \times \frac{1236}{515}$$

$$= 3.$$

উদা. 6. সরল কর : $1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{1 + \frac{1}{3}}} + \dfrac{3\frac{1}{2} \div 2\frac{1}{2} \times 1\frac{1}{2}}{3\frac{1}{2} \div 1\frac{1}{2} \text{ এর } 2\frac{1}{2}} \div 5\frac{1}{4}$

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{3}{4}} + \frac{\frac{7}{2} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{2}}{\frac{7}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{5}} \div \frac{21}{4}$$

$$= 1 + \frac{4}{7} + \frac{21}{10} \times \frac{15}{14} \times \frac{4}{21}$$

$$= 1\frac{4}{7} + \frac{3}{7} = 2.$$

উদা. 7. সরল কর : $\dfrac{16\frac{7}{8}}{19\frac{2}{7}} \times \dfrac{6\frac{7}{11}}{12{\cdot}437 - 3{\cdot}312} \div \frac{8}{9}(2\frac{3}{11} + \frac{13}{22})$

$$\times \frac{1 \text{ টা. } 48 \text{ ন. প.}}{37 \text{ ন. প.}}$$

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = \frac{\frac{135}{8}}{\frac{135}{7}} \times \frac{\frac{73}{11}}{9{\cdot}125} \div \frac{8}{9}(\frac{25}{11} + \frac{13}{22}) \times \frac{148}{37}$$

$$= (\frac{135}{8} \times \frac{7}{135}) \times \frac{\frac{73}{11}}{9\frac{1}{8}} \div \frac{8}{9} \text{ এর } \frac{63}{22} \times 4$$

$$= \frac{7}{8} \times \frac{73}{11} \times \frac{8}{73} \times \frac{9}{8} \times \frac{22}{63} \times 4 = 1.$$

উদা. 8. $\frac{5}{10}, \frac{6}{20}, \frac{45}{40}$ এর গ. সা. গু. ও ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

$$\frac{5}{10} = \frac{1}{2}, \quad \frac{6}{20} = \frac{3}{10}, \quad \frac{45}{40} = \frac{9}{8}$$

$$\text{নির্ণেয় গ. সা. গু.} = \frac{1, 3, 9\text{-এর গ. সা. গু.}}{2, 10, 8\text{-এর ল. সা. গু.}} = \frac{1}{40}$$

$$\text{এবং নির্ণেয় ল. সা. গু.} = \frac{1, 3, 9\text{-এর ল. সা. গু.}}{2, 10, 8\text{-এর গ. সা. গু.}} = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$$

উদা. 9. এক ব্যক্তি তাহার গন্তব্য পথের $\frac{3}{7}$ অংশ নৌকাযোগে, $\frac{2}{5}$ অংশ ট্রেনে এবং 12 মাইল হাঁটিয়া গেল। তাহার গন্তব্য পথের দূরত্ব কত ?

নৌকাযোগে ও ট্রেনে যাওয়া হয় গন্তব্য পথের $(\frac{3}{7}+\frac{2}{5})$ বা $\frac{29}{35}$ অংশ।

সুতরাং অবশিষ্ট $(1-\frac{29}{35})$ বা $\frac{6}{35}$ অংশের দূরত্ব $=12$ মাইল

$\therefore$ গন্তব্য পথের দূরত্ব $=12$ মাইল $\div\frac{6}{35}=12\times\frac{35}{6}$ মাইল $=70$ মাইল।

প্রশ্নমালা 3

সরল কর :

1. $5\frac{3}{5} \text{ এর } \frac{5}{7}\div\frac{5}{16}\div\frac{3}{8} \text{ এর } \frac{16}{21}$

2. $5\frac{5}{7}\div(3\frac{2}{5}+4\frac{3}{10}) \text{ এর } 2\frac{3}{11}$

3. $6\frac{1}{2}+4-\frac{1}{8}\times\frac{4}{5}\div(3\div2-\frac{1}{3})$

4. $\left(1+\dfrac{1+\frac{1}{5}}{5}\right)\div\left(1+\dfrac{5}{1+\frac{1}{5}}\right)$

5. $\left\{\dfrac{2\frac{1}{4}-1\frac{5}{6}\times\frac{2}{3}}{3\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}+1\frac{3}{36}}-\dfrac{1}{2\frac{1}{2}}\right\}\div\dfrac{15\frac{3}{4}}{26\frac{1}{4}}$

6. $\dfrac{3+\frac{5}{3} \text{ এর } \dfrac{21}{7\frac{3}{5}}-\dfrac{1}{4}-\dfrac{1\frac{2}{3}}{2\frac{1}{2}}}{10-5 \text{ এর } \frac{151}{228}}$

7. $\dfrac{5\frac{1}{2}\times\frac{2}{9}\times2\frac{4}{7}-1\div(\frac{1}{5}+\frac{1}{2})}{1-\frac{3}{14}\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\dfrac{\frac{1}{20}}{\frac{3}{20}}\right)}$

8. $\dfrac{3\frac{3}{4}\div2\frac{2}{3} \text{ এর } \frac{3}{4}}{3\frac{3}{4}\div2\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}}+\dfrac{2\frac{2}{5} \text{ এর } \frac{1}{6}}{3 \text{ এর } \frac{3}{5}}$

9. $\dfrac{7\frac{1}{3}}{3\frac{11}{15}}-1\frac{3}{4}+\frac{20}{21}-\frac{5}{7}\div3\frac{3}{5} \text{ এর } \frac{5}{36}\times\dfrac{1\frac{3}{4}}{3\frac{1}{3}}$

10. $\dfrac{2\frac{13}{16} \text{ এর } \frac{1}{3}}{\frac{3}{5} \text{ এর } \frac{5}{18}\div5\frac{1}{6}}\div1\frac{15}{16} \text{ এর } \frac{1}{5}$

11. $\dfrac{2\frac{3}{4}}{5\frac{1}{6}} \text{ এর } \frac{3}{4}(\frac{7}{9}+\frac{1}{12})\div\dfrac{5\frac{7}{8}}{7\frac{1}{4}} \text{ এর } \dfrac{29}{47}$

12. $2-\dfrac{5}{3+\dfrac{1}{2-\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}}}}$

13. $8-8\times\dfrac{2\frac{1}{5}-1\frac{2}{7}}{2-\dfrac{1}{6-\frac{1}{6}}}$

14. প্রমাণ কর : $2-\dfrac{4}{5-\dfrac{9}{7-1\frac{7}{9}}}=\dfrac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}}$

15. সরল কর : $2\frac{3}{4} \text{ এর } \frac{3}{4}(\frac{7}{9}+\frac{1}{12})\div\dfrac{2 \text{ শি. } 5 \text{ পে.}}{3 \text{ শি. } 11 \text{ পে.}} \text{ এর } \dfrac{5\frac{7}{8}}{7\frac{1}{4}}$

16. সরল কর : $\frac{5\frac{5}{8}}{7\frac{3}{7}}$ এর $\frac{6\frac{7}{11}}{9\frac{1}{8}} \div \frac{8}{9}\left(2\frac{3}{11} + \frac{13}{22}\right)$ এর $\frac{90 \text{ ন. প.}}{1 \text{ টা. } 50 \text{ ন. প.}}$

17. 18 টা. 36 নয়া পয়সার ($\frac{2}{3} \div \frac{4}{5}$ এর $\frac{6}{7} \div 1\frac{3}{4}$) এর মান নির্ণয় কর।

গ. সা. গু. ও ল. সা. গু. নির্ণয় কর :

18. $\frac{3}{13}, \frac{12}{5}, 3\frac{3}{4}$

19. $\frac{10}{8}, \frac{25}{30}, \frac{40}{12}$

20. $\frac{6}{11}, \frac{15}{22}, \frac{25}{33}$

21. $\frac{15}{24}, \frac{30}{32}, \frac{100}{16}$

22. 8 টা. 5 নয়া পয়সাকে 9 টা. 20 নয়া পয়সার ভগ্নাংশে পরিণত কর।

23. একটি খুঁটির $\frac{1}{2}$ অংশ মাটির নীচে, $\frac{1}{3}$ অংশ জলের মধ্যে এবং 10 ফুট জলের উপরে আছে। খুঁটিটির দৈর্ঘ্য কত? [C. U. 1921]

24. আমার নিকট যত ছিল তাহার $\frac{3}{4}$ এর $\frac{4}{15}$ অংশ খরচ করিয়া আমার নিকট এখন 1 টাকা 20 নয়া পয়সা আছে। আমার নিকট কত ছিল?

25. পাঁচ পুত্র মিলিয়া পিতার ঋণ শোধ করিল। জ্যেষ্ঠ $\frac{1}{3}$ অংশ এবং অন্যান্য ভ্রাতা অবশিষ্ট ঋণ সমান অংশে শোধ করিল। ইহাতে জ্যেষ্ঠ অপেক্ষা প্রত্যেক ভ্রাতাকে 840 টাকা কম দিতে হইল। ঋণের পরিমাণ নির্ণয় কর।

(S. F. W. B. 1956)

26. একটি পাত্রের $\frac{2}{3}$ অংশ জলে পূর্ণ ছিল। উহা হইতে 5 গ্যালন জল তুলিয়া লইলে দেখা গেল উহার $\frac{3}{5}$ অংশ জলপূর্ণ আছে। ঐ পাত্রে কত জল ধরে?

27. এক ফলবিক্রেতা একজন ক্রেতাকে তাহার নিকট যত কমলালেবু ছিল তাহার $\frac{1}{4}$ অংশ বিক্রয় করিল; অপর একজন ক্রেতাকে অবশিষ্টের $\frac{4}{15}$ অংশ বিক্রয় করিল। যদি এখনও তাহার নিকট 33টি কমলালেবু থাকে, তবে তাহার নিকট প্রথমে কতটি কমলালেবু ছিল নির্ণয় কর। (S. F. W. B. 1953)

28. আমার নিকট যত অর্থ আছে, প্রথমতঃ তাহার $\frac{1}{4}$ অংশ, তৎপর অবশিষ্টের $\frac{2}{3}$ অংশ, অতঃপর অবশিষ্টের $\frac{1}{2}$ এবং সমগ্রের $\frac{1}{16}$ অংশ খরচ করিবার পর আমার নিকট সমগ্রের কত অংশ রহিল?

29. জলপূর্ণ একটি বালতির ওজন 28 সের; যখন বালতির এক-চতুর্থাংশ জলে পূর্ণ থাকে, তখন ইহার ওজন হয় 19 সের। যখন দুই-তৃতীয়াংশ জলে পূর্ণ থাকিবে তখন ইহার ওজন কত হইবে? (S. F. W. B. 1957. Compart.)

তৃতীয় অধ্যায়

দশমিক ভগ্নাংশ

1. ষষ্ঠ, সপ্তম ও অষ্টম শ্রেণীতে দশমিক ভগ্নাংশের বিশদ আলোচনা হইয়া থাকে। পুনরালোচনার জন্য মাত্র কতিপয় উদাহরণ ও একটি প্রশ্নমালা প্রদত্ত হইল।

উদা. 1. সরল কর : $12{\cdot}367 - 8{\cdot}4037 + {\cdot}2018 - 1{\cdot}00128$

প্রদত্ত রাশি $= 12{\cdot}367 + {\cdot}2018 - 8{\cdot}4037 - 1{\cdot}00128$

$= 12{\cdot}5688 - 9{\cdot}40498 = 3{\cdot}16382.$

$$\begin{array}{r} 12{\cdot}367 \\ {\cdot}2018 \\ \hline 12{\cdot}5688 \\ 9{\cdot}40498 \\ \hline 3{\cdot}16382 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 8{\cdot}4037 \\ 1{\cdot}00128 \\ \hline 9{\cdot}40498 \end{array}$$

উদা. 2. ${\cdot}0256$ কে ${\cdot}00032$ দ্বারা গুণ কর।

$$\begin{array}{r} {\cdot}0256 \\ {\cdot}00032 \\ \hline 512 \\ 768 \\ \hline {\cdot}000008192 \end{array}$$

এস্থলে গুণ্য ও গুণকের দশমিকাংশের অঙ্কসংখ্যা $4 + 5 = 9$; কিন্তু গুণফলে মাত্র 4টি অঙ্ক আছে। সুতরাং বাকী 5 স্থান শূন্য দ্বারা পূর্ণ করিয়া দশমিক বিন্দু স্থাপন করা হইয়াছে।

$\therefore$ নির্ণেয় গুণফল $= {\cdot}000008192$

উদা. 3. $34{\cdot}3$ কে 25 দ্বারা ভাগ কর।

$$\begin{array}{l} 25\ )\ 34{\cdot}3\ (\ 1{\cdot}372 \\ \quad\ \ 25 \\ \quad\ \ \overline{\ 93} \\ \quad\ \ \ 75 \\ \quad\ \ \overline{\ 180} \\ \quad\ \ \ 175 \\ \quad\ \ \overline{\quad 50} \\ \quad\ \ \quad 50 \\ \quad\ \ \quad \overline{\times} \end{array}$$

ভাগফল $= 1{\cdot}372$

ভাজক অখণ্ড সংখ্যা হইলে সাধারণ ভাগের ন্যায় প্রক্রিয়া করিয়া যাইবে এবং ভাজ্যের অখণ্ডাংশ শেষ হইলেই ভাগফলে দশমিক বিন্দু বসাইবে।

উক্তরূপে ভাগ করিয়া কিছু অবশিষ্ট থাকিলে ঐ অবশিষ্টের ডানদিকে ক্রমশঃ এক একটি শূন্য নামাইয়া ভাগশেষ শূন্য না হওয়া পর্যন্ত অথবা ভাগফলে নির্দিষ্ট দশমিক স্থান পর্যন্ত অঙ্কগুলি নির্ণীত না হওয়া পর্যন্ত পূর্বোক্ত নিয়মানুসারে ভাগ করিয়া যাইবে।

2. কোন ভাগ অঙ্কে ভাজক দশমিকযুক্ত সংখ্যা হইলে উহার দশমিকাংশে যে কয়টি অঙ্ক থাকে 1-এর ডান দিকে ততটি শূন্য বসাইয়া যে সংখ্যা হয় তাহা দ্বারা প্রদত্ত ভাজ্য-ভাজক উভয়কে গুণ করিলে যে দুইটি সংখ্যা উৎপন্ন হইবে উহাদের ভাগফল এবং প্রদত্ত ভাজ্য-ভাজকের ভাগফল অভিন্ন হইবে।

এই প্রক্রিয়ায় ভাজক একটি অখণ্ড সংখ্যায় পরিণত হইবে। ভাজ্যেরও অনুরূপ পরিবর্তন হইবে অর্থাৎ ভাজকের দশমিকাংশে যে কয়টি অঙ্ক, ভাজ্যের দশমিক বিন্দুটিও তত ঘর ডান দিকে সরিয়া যাইবে। ভাজ্যে ততটি অঙ্ক না থাকিলে যে কয়টি অঙ্কের অভাব হইবে সেই কয়টি স্থান শূন্য দিয়া পূর্ণ করিয়া লইতে হইবে। ভাজ্য পূর্ণসংখ্যা হইলে ভাজকের দশমিকাংশে যে কয়টি অঙ্ক ভাজ্যের ডান দিকে ততটি শূন্য বসাইতে হইবে। অতঃপর অখণ্ড সংখ্যা দ্বারা দশমিকের ভাগের প্রণালীতে ভাগকার্য করিয়া যাইতে হইবে।

উদা. 4. 16 কে ·256 দ্বারা ভাগ কর।

$16 \div \cdot 256 = 16000 \div 256$

```
256)16000(62·5
    1536
    ----
     640
     512
    ----
    1280
    1280
    ----
       ×
```

ভাগফল = 62·5

উদা. 5. 9·75 কে ·00025 দ্বারা ভাগ কর।

$9\cdot 75 \div \cdot 00025 = 975000 \div 25$

```
25)97'5'000(39000
   75
   ---
   225
   225
   ---
     ×
```

ভাগফল = 39000.

উদা. 6. ·03096 কে 7·2 দ্বারা ভাগ কর।

$$\cdot 03096 \div 7\cdot 2 = \cdot 3096 \div 72$$

```
72)·3'0'9'6(·0043
    288
     216
     216
      ×
```

ভাগফল = ·0043.

3. সামান্য ভগ্নাংশের দশমিকে পরিবর্তন।

সামান্য ভগ্নাংশের লবকে হর দ্বারা ভাগ করিয়া তুল্যমান দশমিক ভগ্নাংশে পরিবর্তিত করা যায়।

উদা. 7. $\frac{2}{5}$ কে তুল্যমান দশমিক ভগ্নাংশে পরিবর্তিত কর।

$\frac{2}{5} = 2 \div 5$

```
5 )2,0 (·4
   2 0
```

$\therefore \frac{2}{5} = \cdot 4$

উদা. 8. $5\frac{3}{8}$ কে তুল্যমান দশমিকে পরিবর্তিত কর।

$$5\frac{3}{8} = \frac{43}{8} = 43 \div 8$$

```
8)43(5·375
  40
   30
   24
    60
    56
     40
     40
      ×
```

পূর্ণ সংখ্যা 5 কে পৃথক রাখিয়া $\frac{3}{8}$ কে পূর্বোক্ত প্রকারে দশমিকে পরিবর্তিত করিয়া দশমিকের বাম দিকে পূর্ণ সংখ্যার স্থানে 5 রাখিলেও হয়।

$\therefore 5\frac{3}{8} = 5\cdot 375$

4. দশমিক ভগ্নাংশের সামান্য ভগ্নাংশে পরিবর্তন।

উদা. 9. ·4, ·75, ·123, ·008 ও 12·15 কে সামান্য ভগ্নাংশে পরিবর্তিত কর।

$\cdot 4 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$; $\cdot 75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$; $\cdot 123 = \frac{123}{1000}$;

$\cdot 008 = \frac{8}{1000} = \frac{1}{125}$; $12\cdot 15 = 12\frac{15}{100} = 12\frac{3}{20}$.

5. দশমিকের গ. সা. গু. ও ল. সা. গু.।

উদা. 10. 1·6, ·24 ও ·036 এর গ. সা. গু. ও ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

1·6 = 1·600 ; ·24 = ·240 ; ·036 = ·036.

1600, 240, 36 এর গ. সা. গু. = 4 এবং ল. সা. গু. = 14400.

∴ নির্ণেয় গ. সা. গু. = ·004 এবং ল. সা. গু. = 14·400 = 14·4.

দ্রষ্টব্য। সামান্য ভগ্নাংশে পরিবর্তিত করিয়াও দশমিক ভগ্নাংশের গ. সা. গু. ও ল. সা. গু. নির্ণয় করা যায়।

6. দশমিকের সরলতা সম্পাদন।

উদা. 11. সরল কর : $\dfrac{1{\cdot}4 - {\cdot}362}{{\cdot}31 + {\cdot}123 - {\cdot}0005}$

$$\frac{1{\cdot}4 - {\cdot}362}{{\cdot}31 + {\cdot}123 - {\cdot}0005} = \frac{1{\cdot}038}{{\cdot}433 - {\cdot}0005} = \frac{1{\cdot}038}{{\cdot}4325} = \frac{10380}{4325} = 2{\cdot}4.$$

উদা. 12. সরল কর :

$$({\cdot}5 + {\cdot}75) \times (2{\cdot}5 - {\cdot}4) \div \left({\cdot}125 + \frac{1}{4{\cdot}8}\right)$$

প্রদত্ত রাশি $= \left(\dfrac{5}{10} + \dfrac{75}{100}\right) \times \left(\dfrac{25}{10} - \dfrac{4}{10}\right) \div \left(\dfrac{125}{1000} + \dfrac{1}{\frac{48}{10}}\right)$

$= (\frac{1}{2} + \frac{3}{4}) \times (\frac{5}{2} - \frac{2}{5}) \div (\frac{1}{8} + \frac{10}{48}) = \frac{5}{4} \times \frac{21}{10} \div \frac{16}{48}$

$= \frac{5}{4} \times \frac{21}{10} \times \frac{48}{16} = \frac{63}{8} = 7{\cdot}875.$

প্রশ্নমালা 4

সরল কর :

1. $2{\cdot}618 - {\cdot}009 - 4{\cdot}6 + 3{\cdot}12 + {\cdot}005 - {\cdot}134$

2. $(2{\cdot}61 + 1{\cdot}39) + (3{\cdot}268 - 2{\cdot}9) - ({\cdot}016 - {\cdot}009)$

3. $({\cdot}01 - {\cdot}001) + (1{\cdot}9 - {\cdot}26) - ({\cdot}014 + {\cdot}026)$

4. $503{\cdot}08 \times 391{\cdot}06$ **5.** $802{\cdot}004 \times {\cdot}0098$ **6.** ${\cdot}00032 \times 5{\cdot}2568$

7. $11{\cdot}00246 \times {\cdot}00008$ **8.** $1{\cdot}1 \times 1{\cdot}01 \times 1{\cdot}001$ **9.** ${\cdot}125 \times 1{\cdot}25 \times 12{\cdot}5$

সরল কর :

10. $({\cdot}12)^2 + (1{\cdot}2)^2 + (12)^2$ **11.** $({\cdot}16)^2 \times {\cdot}08 + ({\cdot}6)^3 - ({\cdot}05)^2$

ভাগফল নির্ণয় কর :

12. $388{\cdot}8 \div 72$ 13. $7{\cdot}46 \div 8$ 14. $506898 \div {\cdot}1701$

15. $1{\cdot}525 \div {\cdot}25$ 16. $3{\cdot}48223 \div {\cdot}0047$ 17. $31{\cdot}2 \div {\cdot}0325$

দশমিকের পঞ্চম স্থান পর্যন্ত ভাগফল নির্ণয় কর :

18. ${\cdot}4208 \div 7$ 19. $10{\cdot}01 \div 390{\cdot}625$

সরল কর :

20. $5{\cdot}54605 \div {\cdot}05 + {\cdot}84 \times 8{\cdot}4$

21. $({\cdot}0075 \times 2{\cdot}1) \div {\cdot}175 + 11{\cdot}8 \div {\cdot}152 \times 30{\cdot}4 \times 29{\cdot}5$

22. 42·567 হইতে 5·32 কত বার বিয়োগ করা যায় ?

23. কোন্ সংখ্যাকে 0·225 দ্বারা গুণ করিলে গুণফল 126 হইবে ?

24. $\frac{13}{16}$ ও $7\frac{17}{40}$ কে দশমিকে পরিবর্তিত কর।

25. সামান্য ভগ্নাংশে পরিবর্তিত কর : ·225, ·0075, 83·0025

গ. সা. গু. ও ল. সা. গু. নির্ণয় কর :

26. 2·5, ·75 27. ·4, 1·2, ·24

28. ·12, 60, ·03, ·006 29. 8, 6·4, ·128, ·32

30. কোন্ বৃহত্তম সংখ্যা দ্বারা 3·5 ও 2·38 কে ভাগ করিলে ভাগফল দুইটি অখণ্ড সংখ্যা হইবে ?

31. চারিটি ঘণ্টা একত্র বাজিয়া যথাক্রমে 1·2, 1·6, 1·8 ও 2·2 সেকেণ্ড অন্তর বাজিতে লাগিল ; কতক্ষণ পরে উহারা পুনরায় একত্র বাজিবে ?

সরল কর :

32. $\dfrac{12{\cdot}32 - 7{\cdot}56}{20{\cdot}35 + 3{\cdot}45}$ 33. $\dfrac{{\cdot}06 + {\cdot}5}{{\cdot}94 - {\cdot}8} + \dfrac{2{\cdot}5 \times {\cdot}6}{9 \div 1{\cdot}8}$

34. $\dfrac{{\cdot}64 \times {\cdot}64 - {\cdot}36 \times {\cdot}36}{{\cdot}64 - {\cdot}36}$ 35. $\dfrac{1{\cdot}59 \times 15{\cdot}9 - {\cdot}41 \times 4{\cdot}1}{15{\cdot}9 - 4{\cdot}1}$

36. $\dfrac{{\cdot}727 \times {\cdot}727 - {\cdot}273 \times {\cdot}273}{{\cdot}727 - {\cdot}273}$ 37. $\dfrac{2{\cdot}79 \times 2{\cdot}79 - {\cdot}21 \times {\cdot}21}{2{\cdot}79 - {\cdot}21}$

38. $\dfrac{{\cdot}2 \times {\cdot}6 \times ({\cdot}0134 - {\cdot}005) + {\cdot}01 \times {\cdot}072}{{\cdot}8 \times {\cdot}018}$

39. $\dfrac{({\cdot}0104 - {\cdot}002) \text{ এর } {\cdot}12 + {\cdot}36 \times {\cdot}002}{{\cdot}12 \times {\cdot}12}$ 40. $\dfrac{\frac{2}{3} \div \frac{3}{4} \text{ এর } \frac{5}{6}}{\frac{2}{3} \div \frac{3}{4} \times \frac{5}{6}} - \dfrac{7{\cdot}7 \times {\cdot}12}{2{\cdot}1}$

আবৃত্ত দশমিক

7. সামান্য ভগ্নাংশকে দশমিকে পরিবর্তিত করিবার সময় দেখা গিয়াছে যে লবকে হর দ্বারা ভাগ করিবার সময় কোন কোন স্থলে ভাগ মিলিয়া যায় এবং কোন কোন স্থলে ভাগ মিলিয়া যায় না। যথা, $\frac{5}{16}=\cdot3125$ (এস্থলে $5\div16$ এই ভাগ মিলিয়া যায়); কিন্তু $\frac{5}{11}=\cdot454545\cdots$ (এস্থলে $5\div11$ এই ভাগ মিলিয়া যায় না এবং ভাগকার্য যতদূর ইচ্ছা প্রসারিত করা যায়)।

সামান্য ভগ্নাংশকে দশমিকে পরিবর্তিত করিলে যদি এক বা ততোধিক স্থান পর্যন্ত ভাগফল দশমিকাকারে সম্প্রসারিত হইবার পর আর অবশিষ্ট না থাকে, তবে উক্ত ভগ্নাংশের তুল্যমান দশমিক **সসীম** (Terminating), আর যদি সর্বদাই কিছু না কিছু অবশিষ্ট থাকিয়া যায় তবে উক্ত দশমিক **অসীম** (Nonterminating)। উপরের উদাহরণ দুইটি হইতে দেখা যায়, $\frac{5}{16}=\cdot3125$, সুতরাং এস্থলে $\cdot3125$ দশমিকটি সসীম; $\frac{5}{11}=\cdot454545\cdots$, সুতরাং এস্থলে $\cdot454545\cdots$ দশমিকটি অসীম।

8. কোন ভগ্নাংশের হরের উৎপাদকে 2 বা 5, বা 2 ও 5, বা উহাদের যে কোন শক্তি থাকিলে ভগ্নাংশের তুল্যমান দশমিক সসীম। কিন্তু কোন ভগ্নাংশের হরে 2 ও 5 ব্যতীত অন্য মৌলিক উৎপাদক থাকিলে ঐ ভগ্নাংশ দশমিকে পরিবর্তিত হইলে সসীম হইতে পারে না, উহা অবশ্যই অসীম হইবে, অর্থাৎ ভগ্নাংশটির লবকে হর দিয়া ভাগ করিলে ভাগফলে দশমিকাংশের অঙ্কসংখ্যা কখনও শেষ হইবে না এবং লক্ষ্য করিলে দেখা যাইবে যে কোন কোন স্থলে দশমিকাংশে এক বা একাধিক অঙ্ক পুনঃপুনঃ আসিতে থাকিবে। এইরূপ দশমিককে **পৌনঃপুনিক** বা **আবৃত্ত দশমিক** (Recurring, circulating, repeating or periodic decimal) বলে এবং দশমিকাংশে যে অঙ্ক বা অঙ্কসমূহ পুনঃপুনঃ আসিতে থাকে তাহা পুনঃপুনঃ না লিখিয়া একটি অঙ্ক হইলে ঐ অঙ্কের উপর এবং একাধিক অঙ্ক হইলে ঐ অঙ্কসমূহের প্রথম ও শেষটির উপর আবৃত্ত বিন্দু বসান হইয়া থাকে।

উদা. 1. $\frac{2}{3}$ কে দশমিকে পরিবর্তিত কর।

$$3 \,|\, \underline{2\cdot00000}$$
$$\cdot66666\cdots$$
$$\therefore\ \frac{2}{3}=\cdot\dot{6}$$

2 কে 3 দিয়া ভাগ করিবার সময় ভাগফলে দশমিক বিন্দুর পরে পুনঃপুনঃ 6 নামিতেছে এবং প্রতিবারেই 2 অবশিষ্ট রহিয়াছে; সুতরাং দশমিক

বিন্দুর পর অনেকগুলি 6 না বসাইয়া একটি 6 এর উপরে আবৃত্ত বিন্দু বসান হইয়াছে।

উদা. 2. $\frac{3}{22}$ কে দশমিকে পরিবর্তিত কর।

```
22 ) 3 0 ( ·13636···
     2 2
     ---
       8 0
       6 6
       -----
       1 4 0
       1 3 2
       -----
           8 0
           6 6
           -----
           1 4 0
           1 3 2
           -----
               8
```

এস্থলে ভাগফলে দশমিকাংশে 1 এর পরে '36' পুনঃপুনঃ আসিতেছে এবং ভাগশেষ '8' ও '14' পর্যায়ক্রমে থাকিতেছে; সুতরাং '36' এর উপরে আবৃত্ত বিন্দু বসান হইয়াছে।

$\therefore \ \frac{3}{22} = \cdot 1\dot{3}\dot{6}$.

উদা. 3. $\frac{5}{7}$ কে দশমিকে পরিবর্তিত কর।

$\frac{5}{7} = \cdot 714285714285714285 \cdots = \cdot\dot{7}1428\dot{5}$.

এস্থলে '714285' পুনঃপুনঃ আসিতেছে বলিয়া প্রথম অঙ্ক 7 এর উপর এবং শেষ অঙ্ক 5 এর উপর আবৃত্ত বিন্দু বসান হইয়াছে।

উদা. 4. $12\frac{4}{37}$ কে দশমিকে পরিবর্তিত কর।

$12\frac{4}{37} = 12 + \frac{4}{37} = 12 + \cdot\dot{1}0\dot{8} = 12\cdot\dot{1}0\dot{8}$.

উদা. 5. $\frac{\cdot 03}{2\cdot 2}$ এর মান দশমিকে প্রকাশ কর।

$\frac{\cdot 03}{2\cdot 2} = \frac{\cdot 3}{22} = \cdot 01\dot{3}\dot{6}$.

আবৃত্ত দশমিক মাত্রই অসীম ; কিন্তু সমস্ত অসীম দশমিকই আবৃত্ত নহে। আবৃত্ত নহে অথচ অসীম এরূপ দশমিককে **অনাবৃত্ত অসীম দশমিক** (Non-recurring non-terminating decimal) বলে। এই শ্রেণীর দশমিককে তুল্যমান ভগ্নাংশে পরিবর্তিত করা যায় না।

9. আবৃত্ত দশমিকের যে অংশ (অঙ্ক বা অঙ্কসমূহ) পুনঃপুনঃ আসিতে থাকে তাহাকে **আবৃত্ত** (Recurring) অংশ এবং দশমিক বিন্দুর পরে যে অংশ (অঙ্ক

বা অঙ্কসমূহ) পুনঃপুনঃ আসে না তাহাকে **তদবস্থ** বা **অনাবৃত্ত** (Non-recurring) অংশ বলে।

$\cdot 24\dot{5}1\dot{8}$ এর '24' অনাবৃত্তাংশ এবং '518' আবৃত্তাংশ। অনাবৃত্ত অংশবিহীন আবৃত্ত দশমিককে **বিশুদ্ধ** (Pure) এবং অনাবৃত্ত অংশযুক্ত আবৃত্ত দশমিককে **মিশ্র** (Mixed) আবৃত্ত দশমিক বলে। $\cdot\dot{7}$, $\cdot\dot{2}\dot{5}$ —বিশুদ্ধ আবৃত্ত দশমিক এবং $\cdot 2\dot{7}$, $\cdot 0\dot{3}2\dot{5}$—মিশ্র আবৃত্ত দশমিক।

কোন আবৃত্ত দশমিককে উহার আবৃত্তাংশের ও অনাবৃত্তাংশের স্থান ও অঙ্কসংখ্যা পরিবর্তিত করিয়া অন্য আকারে প্রকাশ করা যায়। যথা—

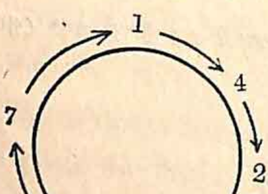
(1) $\cdot\dot{6} = \cdot\dot{6}\dot{6} = \cdot 6\dot{6}6\dot{6} = = \cdot 66\dot{6}666\dot{6}$;

(2) $\cdot 2\dot{3}57\dot{4} = \cdot 23\dot{5}74\dot{3} = \cdot 235\dot{7}435743\dot{5}$, ইত্যাদি।

10. (1) $\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}$ ও $\frac{6}{7}$ কে দশমিকে পরিবর্তন কর।

$\frac{1}{7} = \cdot\dot{1}4285\dot{7}$; $\frac{2}{7} = \cdot\dot{2}8571\dot{4}$; $\frac{3}{7} = \cdot\dot{4}2857\dot{1}$

$\frac{4}{7} = \cdot\dot{5}7142\dot{8}$; $\frac{5}{7} = \cdot\dot{7}1428\dot{5}$; $\frac{6}{7} = \cdot\dot{8}5714\dot{2}$



লক্ষ্য করিলে দেখা যাইবে যে, যে সকল ভগ্নাংশের হর 7 তাহাদের তুল্যমান দশমিকগুলি বিশুদ্ধ আবৃত্ত এবং প্রত্যেকটিতেই 1, 4, 2, 8, 5, 7 এই ছয়টি অঙ্ক আছে। এই অঙ্ক ছয়টিকে চক্রাকারে রাখিয়া 1, 2, 4, 5, 7 ও 8 হইতে আরম্ভ করিয়া তীর প্রদর্শিত ক্রমে ছয়টি করিয়া অঙ্ক লইলে যথাক্রমে, $\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}$ ও $\frac{6}{7}$ এর তুল্যমান দশমিক প্রথম ও শেষ অঙ্কের উপর আবৃত্ত বিন্দু বসাইয়া) প্রাপ্ত হওয়া যায়।

(2) $\frac{1}{13}, \frac{2}{13}, \frac{3}{13}, \frac{4}{13}, \frac{5}{13}, \frac{6}{13}, \frac{7}{13}, \frac{8}{13}, \frac{9}{13}, \frac{10}{13}, \frac{11}{13}$ ও $\frac{12}{13}$ কে দশমিকে পরিবর্তিত কর।

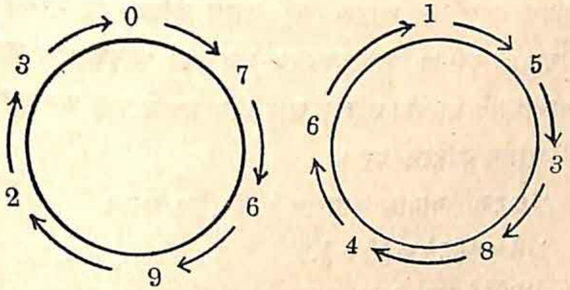
$\frac{1}{13} = \cdot\dot{0}7692\dot{3}$
$\frac{2}{13} = \cdot\dot{1}5384\dot{6}$
$\frac{3}{13} = \cdot\dot{2}3076\dot{9}$
$\frac{4}{13} = \cdot\dot{3}0769\dot{2}$

$\frac{5}{13} = \cdot\dot{3}8461\dot{5}$
$\frac{6}{13} = \cdot\dot{4}6153\dot{8}$
$\frac{7}{13} = \cdot\dot{5}3846\dot{1}$
$\frac{8}{13} = \cdot\dot{6}1538\dot{4}$

$\frac{9}{13} = \cdot\dot{6}9230\dot{7}$
$\frac{10}{13} = \cdot\dot{7}6923\dot{0}$
$\frac{11}{13} = \cdot\dot{8}4615\dot{3}$
$\frac{12}{13} = \cdot\dot{9}2307\dot{6}$

লক্ষ্য করিলে দেখা যায় যে, যে সকল ভগ্নাংশের হর 13, তাহাদের তুল্য দশমিকগুলি বিশুদ্ধ আবৃত্ত এবং উহাদিগকে দুইটি শ্রেণীতে ভাগ করা যাই পারা যায়।

একটি শ্রেণীতে $\frac{1}{13}$, $\frac{3}{13}$, $\frac{4}{13}$, $\frac{9}{13}$, $\frac{10}{13}$ ও $\frac{12}{13}$; উহাদের তুল্যমান দশমি প্রত্যেকটিতেই 0, 7, 6, 9, 2, 3 এই ছয়টি অঙ্ক আছে। এই অঙ্ক ছয়টি চক্রাকারে রাখিয়া, 0, 2, 3, 6, 7 ও 9 হইতে আরম্ভ করিয়া তীর প্রদর্শিত ক্র ছয়টি করিয়া অঙ্ক লইলে যথাক্রমে $\frac{1}{13}$, $\frac{3}{13}$, $\frac{4}{13}$, $\frac{9}{13}$, $\frac{10}{13}$ ও $\frac{12}{13}$ এর তুল্যমান দশ (প্রথম ও শেষ অঙ্কের উপর আবৃত্ত বিন্দু বসাইয়া) প্রাপ্ত হওয়া যায়।



দ্বিতীয় শ্রেণীতে $\frac{2}{13}$, $\frac{5}{13}$, $\frac{6}{13}$, $\frac{7}{13}$, $\frac{8}{13}$ ও $\frac{11}{13}$; উহাদের তুল্যমান দশমিকে প্রত্যেকটিতেই 1, 5, 3, 8, 4, 6 এই ছয়টি অঙ্ক আছে। এই অঙ্ক ছয়টি চক্রাকারে রাখিয়া 1, 3, 4, 5, 6 ও 8 হইতে আরম্ভ করিয়া তীর প্রদর্শিত ক্র ছয়টি করিয়া অঙ্ক লইলে যথাক্রমে $\frac{2}{13}$, $\frac{5}{13}$, $\frac{6}{13}$, $\frac{7}{13}$, $\frac{8}{13}$ ও $\frac{11}{13}$ এর তুল্যমান দশমি (প্রথম ও শেষ অঙ্কের উপর আবৃত্ত বিন্দু বসাইয়া) প্রাপ্ত হওয়া যায়।

উদা. 1. $\frac{27}{7}$ ও $\frac{15}{13}$ কে দশমিকে পরিবর্তিত কর।

$\frac{27}{7} = 3\frac{6}{7} = 3{\cdot}\dot{8}5714\dot{2}$; $\frac{15}{13} = 1\frac{2}{13} = 1{\cdot}\dot{1}5384\dot{6}$.

উদা. 2. $\frac{19}{70}$ ও $\frac{3}{1300}$ কে দশমিকে পরিবর্তিত কর।

$$\frac{19}{70} = \frac{19}{7} \times \frac{1}{10} = 2\frac{5}{7} \times \frac{1}{10} = \frac{2{\cdot}\dot{7}1428\dot{5}}{10} = {\cdot}2\dot{7}1428\dot{5} ;$$

$$\frac{3}{1300} = \frac{3}{13} \times \frac{1}{100} = \frac{{\cdot}\dot{2}3076\dot{9}}{100} = {\cdot}00\dot{2}3076\dot{9}.$$

আবৃত্ত দশমিককে সামান্য ভগ্নাংশে পরিবর্তন

11. বিশুদ্ধ আবৃত্ত দশমিককে সামান্য ভগ্নাংশে পরিবর্তিত করিতে হইলে, প্রদত্ত দশমিকের দশমিক ও আবৃত্ত বিন্দু ত্যাগ করিয়া যে সংখ্যা হয় তাহাকে লব এবং আবৃত্তাংশে যতটি অঙ্ক থাকে ততটি 9 পাশাপাশি রাখিয়া যে সংখ্যা হয় তাহাকে হর করিতে হয়।

উদা. 1. $\cdot\dot{7}$, $\cdot\dot{1}\dot{5}$, $\cdot\dot{0}2\dot{7}$ ইহাদিগকে সামান্য ভগ্নাংশে পরিবর্তিত কর।

$\cdot\dot{7}=\frac{7}{9}$, $\cdot\dot{1}\dot{5}=\frac{15}{99}=\frac{5}{33}$, $\cdot\dot{0}2\dot{7}=\frac{27}{999}=\frac{1}{37}$.

মিশ্র আবৃত্ত দশমিককে সামান্য ভগ্নাংশে পরিবর্তিত করিতে হইলে, প্রদত্ত দশমিকের দশমিক বিন্দু ও আবৃত্ত বিন্দু ত্যাগ করিয়া যে সংখ্যা হয় তাহা হইতে অনাবৃত্ত অংশ বিয়োগ করিয়া বিয়োগফলকে লব এবং আবৃত্তাংশে যতগুলি অঙ্ক থাকে ততগুলি '9' পাশাপাশি রাখিয়া তাহার ডানদিকে দশমিকের অনাবৃত্তাংশে যতটি অঙ্ক থাকে ততটি '0' স্থাপন করিতে হয়।

উদা. 2. $\cdot 1\dot{6}$ কে সামান্য ভগ্নাংশে পরিবর্তিত কর।

$\cdot 1\dot{6}=\frac{16-1}{90}=\frac{15}{90}=\frac{1}{6}$.

উদা. 3. $12\cdot\dot{0}1\dot{6}$ কে সামান্য ভগ্নাংশে পরিবর্তিত কর।

এস্থলে 12 পূর্ণসংখ্যা ; $\cdot\dot{0}1\dot{6}=\frac{16}{999}$; $\therefore\ 12\cdot\dot{0}1\dot{6}=12\frac{16}{999}$.

আবার, $12\cdot\dot{0}1\dot{6}=\frac{12016-12}{999}=\frac{12004}{999}=12\frac{16}{999}$.

উদা. 4. $\cdot 3\dot{4}2857\dot{1}$ কে সামান্য ভগ্নাংশে পরিবর্তিত কর।

$$\cdot 3\dot{4}2857\dot{1}=\frac{\cdot 3\dot{4}2857\dot{1}\times 10}{10}=\frac{3\cdot\dot{4}2857\dot{1}}{10}=\frac{3\frac{3}{7}}{10}=\frac{24}{70}=\frac{12}{35}.$$

উদা. 5. $\cdot\dot{9}$, $\cdot 6\dot{9}$, $\cdot 01\dot{9}$ ইহাদিগকে সামান্য ভগ্নাংশে পরিণত কর।

$\cdot\dot{9}=\frac{9}{9}=1$; $\cdot 6\dot{9}=\frac{69-6}{90}=\frac{63}{90}=\frac{7}{10}$.

$\cdot 01\dot{9}=\frac{19-1}{900}=\frac{18}{900}=\frac{1}{50}$.

দ্রষ্টব্য। $\cdot\dot{9}=1$, $\cdot 6\dot{9}=\frac{63}{90}=\frac{7}{10}=\cdot 7$, $\therefore\ \cdot 6\dot{9}=\cdot 7$

$\cdot 01\dot{9}=\frac{18}{900}=\frac{1}{50}=\cdot 02$, $\therefore\ \cdot 01\dot{9}=\cdot 02$.

সুতরাং আবৃত্ত দশমিকে যদি শুধু 9 আবৃত্ত হয়, তবে তাহার পূর্ব অঙ্কে 1 যোগ করিয়া আবৃত্তাংশ পরিত্যাগ করা যায়।

12. দশমিকের সরলতা সম্পাদন।

উদা. 1. সরল কর : $\dfrac{4{\cdot}\dot{4} - 2{\cdot}8\dot{3}}{1{\cdot}\dot{6} + 2{\cdot}\dot{6}2\dot{9}}$ [ঢাকা বোর্ড, 1947]

$$\frac{4{\cdot}\dot{4} - 2{\cdot}8\dot{3}}{1{\cdot}\dot{6} + 2{\cdot}\dot{6}2\dot{9}} = \frac{\frac{44-4}{9} - \frac{283-28}{90}}{\frac{16-1}{9} + \frac{2629-2}{999}} = \frac{\frac{40}{9} - \frac{255}{90}}{\frac{15}{9} + \frac{2627}{999}}$$

$$= \frac{\frac{400-255}{90}}{\frac{1665+2627}{999}} = \frac{\frac{145}{90}}{\frac{4292}{999}} = \frac{145}{90} \times \frac{999}{4292} = \frac{3}{8} = {\cdot}375$$

উদা. 2. সরল কর : $\dfrac{1\frac{1}{2} + 2\frac{2}{3} + 3\frac{3}{4}}{\frac{1}{1\frac{1}{2}} + \frac{1}{2\frac{2}{3}} + \frac{1}{3\frac{3}{4}}} \div \dfrac{{\cdot}2\dot{1}}{{\cdot}034\dot{8}}$

[ক. প্র. 1948 পরিপূরক]

$$\frac{1\frac{1}{2} + 2\frac{2}{3} + 3\frac{3}{4}}{\frac{1}{1\frac{1}{2}} + \frac{1}{2\frac{2}{3}} + \frac{1}{3\frac{3}{4}}} \div \frac{{\cdot}2\dot{1}}{{\cdot}034\dot{8}} = \frac{\left(\frac{3}{2} + \frac{8}{3} + \frac{15}{4}\right)}{\frac{2}{3} + \frac{3}{8} + \frac{4}{15}} \div \frac{\frac{19}{90}}{\frac{314}{9000}}$$

$$= \frac{\frac{95}{12}}{\frac{157}{120}} \div \left(\frac{19}{90} \times \frac{9000}{314}\right) = \frac{95}{12} \times \frac{120}{157} \div \frac{1900}{314}$$

$$= \tfrac{95}{12} \times \tfrac{120}{157} \times \tfrac{314}{1900} = 1,$$ উত্তর।

প্রশ্নমালা 5

1. নিম্নলিখিত ভগ্নাংশগুলিকে আবৃত্ত দশমিকে পরিবর্তিত কর :

(*i*) $\frac{5}{6}$, (*ii*) $\frac{5}{12}$, (*iii*) $5\frac{1}{110}$, (*iv*) $\frac{1}{555}$, (*v*) $\frac{1}{14}$.

2. সামান্য ভগ্নাংশে পরিবর্তিত কর :

(*i*) ${\cdot}\dot{1}\dot{5}$ (*ii*) ${\cdot}2\dot{3}\dot{6}$, (*iii*) $5{\cdot}2\dot{0}2\dot{7}$ (*iv*) $8{\cdot}002\dot{3}$

(*v*) ${\cdot}\dot{2}8571\dot{4}$ (*vi*) ${\cdot}0\dot{1}4285\dot{7}$ (*vii*) ${\cdot}\dot{6}1538\dot{4}$.

3. যোগফল নির্ণয় কর :

(*i*) $2{\cdot}1\dot{6}\dot{4} + 16{\cdot}0\dot{3}\dot{2} + 8{\cdot}\dot{1}$,

(*ii*) ${\cdot}2\dot{1} + {\cdot}1\dot{4}\dot{5} + 4{\cdot}\dot{2}61\dot{3}$.

4. বিয়োগফল নির্ণয় কর :

(*i*) ${\cdot}6\dot{3}1\dot{5} - {\cdot}097\dot{6}$,

(*ii*) ${\cdot}263 - {\cdot}15\dot{3}9\dot{7}$

5. গুণফল নির্ণয় কর :

(*i*) $.022 \times 3.\dot{9}\dot{1}$

(*ii*) $.07\dot{3} \times 2.\dot{7}\dot{2}$.

6. ভাগফল নির্ণয় কর :

(*i*) $.1\dot{9}\dot{0} \div .58\dot{3}$

(*ii*) $6.\dot{8}9\dot{1} \div 15.\dot{4}\dot{5}$.

সরল কর :

7. $$\frac{1.\dot{6} - .1\dot{6}}{1.\dot{6} + .1\dot{6}} + .\dot{1}\dot{8}$$

8. $$\frac{2.4\dot{6} - 2.3\dot{0}}{.\dot{3} + .1\dot{2}\dot{7}} + \frac{4\frac{1}{3}}{19}$$ [ক. প্র. 1912]

9. $$(1.4 - 0.362) \div (0.31 + 0.123 - 0.0005)$$ [ক. প্র. 1918]

10. $$\frac{(1.2)^2 \times (.05)^2 \div (.25)^2}{(.1)^2 - (.01)^2}$$

11. $$\frac{8}{3} \times \frac{0.8\dot{5}}{1.\dot{2}} \times 7.\dot{1}4285\dot{7} \times 1.875$$

12. $$\frac{0.\dot{5}\dot{2}}{0.\dot{1}5\dot{4}} \div \frac{26.\dot{2}\dot{6}}{4.\dot{9}0\dot{4}} + \frac{2}{1 + \frac{3}{1 - 0.\dot{3}}}$$ [ক. প্র. 1933]

13. $$\frac{.2 \times .2 \times .2 + .02 \times .02 \times .02}{.6 \times .6 \times .6 + .06 \times .06 \times .06}$$

14. $$\frac{.\dot{1}4285\dot{7} + .\dot{8}5714\dot{2}}{.\dot{5}7142\dot{8} - .\dot{4}2857\dot{1}}$$

15. $$\frac{1.5}{.075} \times \frac{3\frac{1}{4}}{1\frac{1}{2}} + \frac{1.875}{2.1} \times \frac{3.5}{3.75} - .1\dot{6}$$

16. $$\frac{15.\dot{6} + 7 - .\dot{3}}{3 \times 7.\dot{4} \times .25} + \left\{37 + \frac{3.7\dot{0}3\dot{7}}{100}\right\} \times .27$$ [ক. প্র. 1934]

17. $$\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{\frac{1}{4\frac{1}{2}} + \frac{1}{3\frac{1}{2}} - \frac{1}{2\frac{1}{2}}} \div \frac{.02\dot{8} \times .09 \times 3.5}{2.2\dot{6} \times .008 \times .1}$$ [ক. প্র. 1948]

18. $$\frac{6.27 \times 0.5}{(\frac{3}{4} \text{ এর } \frac{1}{2}) \times 8.36} \div \frac{(\frac{1}{10} \text{ এর } \frac{1}{4}) \times (21.\dot{3} \text{ এর } .75)}{(\frac{5}{6} \text{ এর } \frac{2}{3}) + 1.\dot{4}}$$ [ঢা. বো. 1936]

19. $$\frac{2.\dot{2}\dot{7} \text{ এর } 2.8}{1.3\dot{6}} + \left\{\frac{4.\dot{4} - 2.8\dot{3}}{1.\dot{3} + 2.62\dot{9}} \times 8.2\right\}$$ [ঢা. বো. 1934]

20. $$\frac{\frac{5\frac{2}{3} - 1\frac{3}{4} + 4\frac{6}{7}}{2\frac{1}{5} \text{ এর } 8\frac{1}{3} \div \frac{1}{3}} \div (.\dot{1}0\dot{8} \times .0\dot{8})}{(5\frac{7}{12} \times 7\frac{2}{5}) \div 22\frac{2}{5}}$$ [ক. প্র. 1939 পরিপূরক]

21. $$\frac{1.8\dot{3} + 2.041\dot{6} + .\dot{3} - 3\frac{1}{3}}{1.0025 + .0625 - 1\frac{1}{16}}$$ [ক. প্র. 1887]

22. $\dfrac{4{\cdot}75}{25{\cdot}2}$ এর $3\frac{1}{2} + 4$ এর $\dfrac{8{\cdot}\dot{8}}{{\cdot}25} \div \dfrac{35{\cdot}\dot{5}}{32{\cdot}7}$ [পাঞ্জাব প্র. 1927]

23. $\dfrac{1\frac{2}{3} + \frac{1}{2}}{6\frac{1}{2} \div \frac{3}{4}} \div \left({\cdot}625 \text{ এর } \dfrac{2\frac{2}{3}}{1\frac{2}{3}}\right) \times \dfrac{{\cdot}3\dot{5} \times {\cdot}05}{{\cdot}2\dot{3} \times 2{\cdot}5}$ এর $131{\cdot}25$ [পাঞ্জাব প্র. 1928]

24. $\dfrac{2\frac{2}{5}}{2 + \dfrac{1}{1 + \frac{1}{5}}}$ এর $1{\cdot}1\dot{3} \div \dfrac{1}{{\cdot}8680\dot{5}}$ [ক. প্র. 1946 পরিপূরক]

দশমিক ঘটিত মিশ্র রাশির মান নির্ণয়

13. উদাহরণের সাহায্যে দশমিক ঘটিত মিশ্র রাশির মান নির্ণয় করার প্রণালী প্রদর্শিত হইল।

উদা, 1. 1 টাকা 68 নয়া পয়সার ·875-এর মান নির্ণয় কর।

1 টা. 68 ন. প. = 168 ন. প., $\cdot 875 = \frac{875}{1000} = \frac{7}{8}$

∴ 1 টা. 68 ন. প. এর $\cdot 875 = 168 \times \frac{7}{8}$ ন. প.

= 147 ন. প. = 1 টা. 47 ন. প.

দ্বিতীয় প্রণালী

168 ন. প. × ·875 = 147·000 ন. প. = 147 ন. প. = 1 টা. 47 ন. প.

উদা. 2. 1 ছটাক 1 মণের কত দশমিক?

$\dfrac{1 \text{ ছটাক}}{1 \text{ মণ}} = \dfrac{1 \text{ ছটাক}}{640 \text{ ছটাক}} = \dfrac{1}{640} = {\cdot}0015625.$

উদা. 3. 3 পাউণ্ডের ·45 এর মান নির্ণয় কর।

3 পা. × ·45 = 1·35 পা. = 1 পা. (·35 × 20) শি. = 1 পা. 7 শি.

উদা. 4. সরল কর :

9 শি. 10 পে. এর $\cdot\dot{3}$ − 6 শি. 9 পে. এর ·25 + 1 পা. 7 পে. এর $\cdot 1\dot{6}$.

প্রদত্ত রাশি = 118 পে. × $\frac{1}{3}$ − 81 পে. × $\frac{1}{4}$ + 247 পে. × $\frac{15}{90}$

= $\frac{118}{3}$ পে. − $\frac{81}{4}$ পে. + $\frac{247}{6}$ পে.

= $\frac{472-243+494}{12}$ পে. = $60\frac{1}{4}$ পে. = 5 শি. 1 ফা.

প্রশ্নমালা 6

মান নির্ণয় কর (মিশ্র রাশিতে পরিণত কর):

1. 3 পাউণ্ডের ·45

2. 4 পা. 6 শি. 8 পে. এর ·2625.

3. 1 মাইল 6 ফার্লং-এর $\cdot\dot{7}1428\dot{5}$

4. 7 পা. 16 শি. 3 পে.-এর 1·28

5. 1 পা. 5 শি.-এর $\dfrac{(3{\cdot}47)^2-(2{\cdot}53)^2}{\cdot 94}$ [ঢা. বো. 1940]

6. 46 পাউণ্ডের $\dfrac{\cdot 49}{2{\cdot}1}$ এর $\dfrac{(3\frac{1}{3}-2\frac{1}{2})\div\frac{5}{6} \text{ এর } \frac{3}{8}}{2\frac{2}{3}\div(\frac{1}{2}+\frac{1}{4})}$ [এলা. প্র. 1901]

প্রথম রাশিকে দ্বিতীয় রাশির দশমিক রূপে প্রকাশ কর:

7. 1 ছটাক ; 1 মণ

8. 1 পেনি ; 1 পাউণ্ড

9. 1 মিনিট ; 1 ঘন্টা

10. 1 গজ 1 ফুট 10 ইঞ্চি ; 11 গজ 10 ইঞ্চি

11. 1 পাউণ্ড 12 আউন্স ; 1 হন্দর

12. 1 পাউণ্ড ; 1 টন

13. $5\frac{1}{2}$ বর্গ গজ ; 1 একর

14. 7 মণ 5 সেরের $\frac{2}{3}$; $9\frac{1}{2}$ মণ

15. 2 হন্দর 2 কোয়ার্টারের ·16 + 2·6 হন্দরের $\cdot 1\dot{6}$ কে 1 টনের দশমিক রূপে প্রকাশ কর।

16. 7 শি. 6 পে. এর $\frac{3}{8}$ + 5 শি. এর 1·25 − 9 শি. 2 পে. এর $\cdot 5\dot{4}\dot{5}$ কে 10 পাউণ্ডের দশমিকে প্রকাশ কর।

সরল কর:

17. $\dfrac{\frac{3}{5}}{1+\dfrac{2}{3+\frac{2}{3}}}+\dfrac{5\frac{6}{7}}{2\frac{5}{6}}\div\frac{6}{7}\div 5+\dfrac{25 \text{ পা. } 13 \text{ শি. } 4 \text{ পে.}}{8 \text{ পা. } 10 \text{ শি.}}$ এর $\dfrac{0{\cdot}003}{0{\cdot}07}$

18. $\dfrac{(\cdot 01)^3+(\cdot 02)^3+(\cdot 03)^3}{(\cdot 001+\cdot 002+\cdot 003)^2}-\cdot 0208\dot{3}\div\dfrac{2 \text{ পা. } 3 \text{ শি.}}{25 \text{ পা. } 16 \text{ শি.}}$ এর $\frac{1}{2}$. [ক. প্র. 1938]

19. $\dfrac{2{\cdot}75}{5{\cdot}1\dot{6}}$ এর $\frac{3}{4}(\frac{7}{9}+\frac{1}{12})\div\dfrac{2 \text{ টা. } 90 \text{ ন. প.}}{4 \text{ টা. } 70 \text{ ন. প.}}$ এর $\dfrac{5{\cdot}875}{7{\cdot}25}$

চতুর্থ অধ্যায়

আসন্নমান

1. কার্যক্ষেত্রে অধিকাংশ স্থলেই দেখা যায় যে কোন বস্তুর মূল্য, পরিমাপ বা ওজন সঠিক নির্ণয় করা যায় না ; সুতরাং কার্যতঃ সঠিক মূল্য, পরিমাপ বা ওজনের কাছাকাছি কোন পরিমাণ গ্রহণ করা হইয়া থাকে। ধর, কোন মজুরের সাপ্তাহিক বেতন 15 টাকা ; তাহাকে 4 দিনের বেতন দিতে হইবে। প্রকৃতপক্ষে সে কত পাইবে ? পাটীগণিতের সাধারণ নিয়ম অনুসারে তাহার 4 দিনের বেতন হইবে $\frac{15 \text{ টা.} \times 4}{7} = \frac{60}{7}$ টা. $= 8$ টা. $57\frac{1}{7}$ ন. প.। 8 টা. 57 ন. প. দেওয়া যাইতে পারে, কিন্তু $\frac{1}{7}$ ন. প. কি ভাবে দেওয়া যাইবে ? $\frac{1}{7}$ ন. প. অর্থাৎ একটি নয়া পয়সার সাত ভাগের এক ভাগ দেওয়া কার্যতঃ অসম্ভব। এক্ষেত্রে 8 টা. 57 ন.প. দেওয়া হইলে প্রকৃত প্রাপ্য অপেক্ষা সে কম পায় $\frac{1}{7}$ ন. প.। কিন্তু যদি 8 টা. 58 ন. প. দেওয়া হয় তাহা হইলে প্রকৃত প্রাপ্য অপেক্ষা সে বেশী পায় $\frac{6}{7}$ ন. প.। এই অল্পতা বা আধিক্য উভয়কেই কিন্তু ভুল (Error) বলিয়া ধরা যাইতে পারে।

যে কোন বিষয়েই হউক না কেন ভুলের মাত্রা যত কম হয় বিশুদ্ধতার মাত্রা ততই বেশী হয়—ইহাই সাধারণ নিয়ম। এখন, 8 টা. $57\frac{1}{7}$ ন. প. স্থলে ৪ টা. 57 ন. প. দিলে ভুলের মাত্রা হয় $\frac{1}{7}$ ন. প. ; কিন্তু 8 টা. 58 ন. প. দিলে ভুলের মাত্রা হয় $\frac{6}{7}$ ন. প.। $\frac{6}{7}$ অপেক্ষা $\frac{1}{7}$ ক্ষুদ্রতর, সুতরাং মজুরটিকে 8 টা. 57 ন. প. দেওয়াই যুক্তিসঙ্গত। এই ভাবে সঠিক উত্তরের পরিবর্তে যথাসম্ভব নিকটতম মান নির্ণয় করাকে **আসন্নমান** (Approximation) নির্ণয় করা বলে। 8 টা. $57\frac{1}{7}$ ন. প.কে আসন্ন ন. প. পর্যন্ত উত্তর নির্ণয় করিয়া ফল হইল 8 টা. 57 ন. প.।

আবার ধর, কোন মজুরের সাপ্তাহিক মজুরী 16 টাকা হইলে 1 দিনের মজুরী কত দেওয়া উচিত স্থির করিতে হইবে। পাটীগণিতের নিয়মে মজুরের সঠিক প্রাপ্য হয় $\frac{16}{7}$ টাকা $= 2$ টা. $28\frac{4}{7}$ ন. প.। এস্থলে 2 টা. 28 ন. প. দিলে কম দেওয়া হয়

উদা. 1. $\frac{2}{39}$-এর চারি দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্নমান নির্ণয় কর।

$$\begin{array}{r|l} 39 & 200 \;(\,\cdot 0512{,}8 \\ & \underline{195} \\ & \;\;50 \\ & \;\;\underline{39} \\ & \;\;110 \\ & \;\;\;\underline{78} \\ & \;\;\;320 \\ & \;\;\;\underline{312} \\ & \;\;\;\;\;8 \end{array}$$

∴ নির্ণেয় উত্তর = ·0513.

উদা. 2. এমন একটি দশমিক নির্ণয় কর যাহা $\frac{355}{113}$-এর $\frac{1}{100000}$-এর মধ্যে থাকিবে। [ক. প্র. 1911]

$\frac{1}{100000} = \cdot 00001$; সুতরাং $\frac{355}{113}$-এর আসন্নমান পাঁচ দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় করিতে হইবে। এখন $\frac{355}{113} = 3\cdot 14159{,}2 = 3\cdot 14159$.

উদা. 3. 17·3816 ফুটের তিনটি সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত আসন্নমান নির্ণয় কর।

তিনটি সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত 17·3816 ফুটের মান = 17·4 ফুট।

প্রশ্নমালা 7

তিন দশমিক ও চারি দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্নমান লিখ :

1. 1·25687 **2.** 10·14169 **3.** ·01825
4. ·00368 **5.** 123·00953 **6.** ·20986

নিম্নলিখিত সংখ্যাগুলির তিনটি সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত আসন্নমান লিখ :

7. 2·3168 **8.** 12·591 **9.** ·35814
10. ·035897 **11.** ·006916 **12.** 29·518
13. ·43987 **14.** 26189 **15.** 43281

নিম্নলিখিত সংখ্যাগুলির আসন্ন সহস্র পর্যন্ত মান লিখ :

16. 23186 **17.** 107826 **18.** 79941

চারি দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্নমান নির্ণয় কর :

19. $\frac{3}{7}$ **20.** $\frac{51}{19}$ **21.** $\frac{9}{127}$ **22.** $1 \div \cdot 023$

23. $\frac{14}{17}$-এর অযুতাংশ পর্যন্ত আসন্নমান নির্ণয় কর।

24. এমন একটি দশমিক নির্ণয় কর যাহা $\frac{75}{31}$-এর $\frac{1}{1000}$-এর মধ্যে থাকিবে।

$\frac{4}{7}$ ন. প., কিন্তু 2 টাকা 29 ন. প. দিলে বেশী দেওয়া হয় $\frac{3}{7}$ ন. প.। যেহেতু $\frac{4}{7}$ অপেক্ষা $\frac{3}{7}$ ক্ষুদ্রতর সুতরাং 2 টা. 29 ন. প. দেওয়াই উচিত।

2. কোন রাশির সঠিক উত্তরের পরিবর্তে আসন্নমান নির্ণয় করিতে হইলে রাশিটির শেষ এককের ভগ্নাংশ $\frac{1}{2}$ অথবা $\frac{1}{2}$ অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে উহাকে ত্যাগ করিয়া শেষ এককের সহিত 1 যোগ করিতে হয়, আর ভগ্নাংশটি $\frac{1}{2}$ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইলে উহা ত্যাগ করিতে হয়।

দশমিক ভগ্নাংশের কোনও নির্দিষ্ট দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্নমান নির্ণয় করিতে হইলে উক্ত নির্দিষ্ট দশমিক স্থানের পরবর্তী অঙ্ক 5 বা 5 অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে নির্দিষ্ট স্থানের অঙ্কের সহিত 1 যোগ করিতে হয় এবং 5 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর অঙ্ক থাকিলে উহা ত্যাগ করিতে হয়। 4·2376182-এর দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্নমান হইবে 4·24 (দুই দশমিক স্থানের অঙ্ক 3-এর পরবর্তী অঙ্ক 7 আছে বলিয়া 3-এর সহিত 1 যোগ করিয়া 4 করা হইয়াছে); কিন্তু এক দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্নমান হইবে 4·2 (এক দশমিক স্থানের অঙ্ক 2-এর পরবর্তী অঙ্ক 3 আছে বলিয়া 2-এর সহিত কিছু যোগ করা হয় নাই)।

3. সার্থক অঙ্ক। 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 এই নয়টি অঙ্ককে **সার্থক অঙ্ক** (Significant figures) বলে। দুইটি সার্থক অঙ্কের মধ্যে এক বা একাধিক শূন্য থাকিলে উক্ত শূন্য বা শূন্যগুলিও সার্থক অঙ্ক হিসাবে পরিগণিত হইয়া থাকে। পূর্ণ-সংখ্যাবিহীন দশমিক ভগ্নাংশের দশমিক বিন্দুর পরের শূন্য বা শূন্যসমূহ সার্থক অঙ্ক নহে। পূর্ণসংখ্যা বা দশমিক ভগ্নাংশের শেষ শূন্য বা শূন্যসমূহ কখনও সার্থক অঙ্ক হয় কখনও সার্থক অঙ্ক হয় না।

10·304859-এর পাঁচটি সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত আসন্নমান 10·305 ; কিন্তু পাঁচ দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্নমান 10·30486। ·10304859-এর পাঁচটি সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত অথবা পাঁচ দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্নমান উভয়ই ·10305। ·0010304859-এর পাঁচটি সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত আসন্নমান ·0010305, কিন্তু পাঁচ দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্নমান ·00103। ·235297-এর পাঁচটি সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত বা পাঁচ দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্নমান উভয়ই ·23530 (এ স্থলে 0 সার্থক অঙ্ক)। 432886-এর তিনটি সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত বা সহস্র পর্যন্ত আসন্নমান উভয়ই

পঞ্চম অধ্যায়

চলিত নিয়ম

1. একাংশ। কোন রাশিকে কতিপয় পূর্ণসংখ্যক সমান অংশে বিভক্ত করিলে প্রত্যেকটি অংশকে উহার **একাংশ** বা **সমাংশ** (Aliquot Part) বলে। কোন রাশির একাংশকে সেই রাশির ভগ্নাংশে আনয়ন করিলে উৎপন্ন ভগ্নাংশের লব 1 হইবে এবং রাশিটিকে যত অংশে বিভক্ত করা হয় তত পূর্ণ সংখ্যাটি উহার হর হইবে।

2. একাংশ নির্ণয়। কোন রাশি তজ্জাতীয় অপর কোন বৃহত্তর রাশির একাংশ কি না নির্ণয় করিতে হইলে, ক্ষুদ্রতর রাশিটিকে বৃহত্তর রাশির ভগ্নাংশে আনয়ন করিবে ; প্রাপ্ত ভগ্নাংশকে লঘিষ্ঠ আকারে পরিণত করিলে যদি উহার লব 1 হয়, তবে ক্ষুদ্রতর রাশিটি বৃহত্তর রাশিটির একাংশ হইবে।

3. চলিত নিয়ম বা সাঙ্কেতিক। কোন রাশির মূল্য, ওজন প্রভৃতি একাংশের সাহায্যে নির্ণয় করিবার প্রণালীকে চলিত নিয়ম বা সাঙ্কেতিক (Practice) বলে।

নিম্নলিখিত উদাহরণসমূহ হইতে চলিত নিয়মের সমাধান প্রক্রিয়া দেখিয়া লইবে।

উদা. 1. একটি দ্রব্যের মূল্য 2 পা. 12 শি. 8 পে. হইলে, 24টি দ্রব্যের মূল্য কত ?

	পা.	শি.	পে.	
	24	0	0	= প্রতিটি 1 পা. দরে 24টির মূল্য
			2	
	48	0	0	= " 2 পা. দরে 24টির মূল্য
10 শি. = 1 পা. এর $\frac{1}{2}$	12	0	0	= " 10 শি. " "
2 শি. = 10 শি. এর $\frac{1}{5}$	2	8	0	= " 2 শি. " "
8 পে. = 2 শি. এর $\frac{1}{3}$	0	16	0	= " 8 পে. " "
	63	4	0	= " 2 পা. 12 শি. 8 পে. দরে 24টি দ্রব্যের মূল্য।

উদা. 2. যদি প্রতি বস্তায় 2 মণ 6 সের 4 ছটাক চাউল ধরে এবং প্রতি মণ চাউলের মূল্য 18 টাকা হয় তবে 28 বস্তা চাউলের মূল্য নির্ণয় কর।

টা. 18·00 = 1 মণের মূল্য
2
36·00 = 2 " "
5 সের = 1 মণের $\frac{1}{8}$ | 2·25 = 5 সেরের মূল্য
1 সের 4ছ. = 5 সেরের $\frac{1}{4}$ | 0·5625 = 1 সের 4 ছটাকের মূল্য

টা. 38·8125 = প্রতি বস্তার মূল্য
4
টা. 155·2500 = 4 বস্তার মূল্য
7
টা. 1086·75 = 28 বস্তার মূল্য

উদা. 3. 1 কিলোগ্রাম চিনির মূল্য 1 টাকা 16 ন. প. হইলে 7 কিলোগ্রাম 6 হেক্টোগ্রাম চিনির মূল্য নির্ণয় কর।

টা. 1·16 = 1 কিলোগ্রামের মূল্য
7
8·12 = 7 " " "
5 হে. গ্রা. = 1 কি. গ্রামের $\frac{1}{2}$ | 0·58 = 5 হে. গ্রামের "
1 হে. গ্রা. = 5 হে. গ্রামের $\frac{1}{5}$ | 0·116 = 1 " " " "

8·816 = 7 কি. গ্রা. 6 হে. গ্রামের মূল্য
= 8 টা. 82 ন. প. (আসন্ন)

দ্রষ্টব্য। এরূপ প্রশ্নের সমাধানের জন্য সাধারণ গুণের প্রয়োগই যথেষ্ট। এস্থলে 1 টা. 16 ন. প. = 1·16 টাকা ; 7 কিলোগ্রাম 6 হে. গ্রাম = 7·6 কি. গ্রা.

∴ নির্ণেয় মূল্য = 1·16 × 7·6 টাকা
= 8·816 টাকা
= 8 টা. 82 ন. প. (আসন্ন)

উদা. 4. প্রতি 100 গজ রাস্তা প্রস্তুত করিতে 210 টাকা খরচ হইলে 1 মাইল 80 গজ রাস্তা প্রস্তুত করিতে কত খরচ হইবে ?

	টা. 210·00 = 100 গজের খরচ
	17
50 গজ = 100 গজের $\frac{1}{2}$	3570·00 = 1700 " "
10 গজ = 50 গজের $\frac{1}{5}$	105·00 = 50 " "
	21·00 = 10 " "
	টা. 3696·00 = 1 মাইলের খরচ
50 গজ = 100 গজের $\frac{1}{2}$	105·00 = 50 গজের খরচ
25 গজ = 50 গজের $\frac{1}{2}$	52·50 = 25 " "
5 গজ = 25 গজের $\frac{1}{5}$	10·50 = 5 " "
	টা. 3864·00 = 1 মাইল 80 গজের খরচ।

প্রশ্নমালা 8

নিম্নলিখিত মূল্য ও ওজনগুলি চলিত নিয়মে নির্ণয় কর :

1. 15টি দ্রব্যের মূল্য, প্রতিটি 5টা. 19 ন. প. হিসাবে।
2. 120টি দ্রব্যের মূল্য, প্রতিটি 2 পা. 8 শি. 4 পে. হিসাবে।
3. 345টি দ্রব্যের মূল্য, প্রতিটি 20 পা. 18 শি. 3 পে. হিসাবে।
4. $484\frac{1}{2}$ টন দ্রব্যের মূল্য প্রতি টন 8 পা. 10 শি. 10 পে. হিসাবে।
5. 140 বস্তা চাউলের ওজন, প্রতি বস্তা 2 মণ 8 সের 10 ছটাক হিসাবে।
6. 425 গাঁট কাপড়ের ওজন, প্রতি গাঁট 15 মণ 33 সের 12 ছটাক হিসাবে।
7. 1 একর জমির মূল্য, প্রতি বর্গ-গজ 2 টাকা 37 নয়া পয়সা হিসাবে।
8. প্রতিমণ 20 টাকা দরে 32 সের 8 ছটাক চাউলের মূল্য কত ?
9. প্রতি মণ 23 টাকা 50 নয়া পয়সা দরে 7 মণ 16 সের 4 ছটাক চাউলের মূল্য নির্ণয় কর।

10. গড়ে প্রতি বস্তায় 2 মণ 15 সের ময়দা ধরিলে এবং প্রতি মণ ময়দার মূল্য 20 টাকা 20 নয়া পয়সা হইলে 18 বস্তা ময়দার মূল্য কত ?

11. গড়ে প্রতি বিঘা জমিতে 35 মণ 15 সের করিয়া ধান উৎপন্ন হইলে, 10 বিঘা 12 কাঠা 4 ছটাক জমিতে কত ধান উৎপন্ন হইবে ? (উত্তর আসন্ন ছটাক পর্যন্ত)

12. প্রতি 100 গজ রাস্তা প্রস্তুত করিতে 225 টাকা খরচ লাগিলে 1 মাইল $32\frac{1}{2}$ গজ রাস্তা প্রস্তুত করিবার খরচ কত নির্ণয় কর।

ষষ্ঠ অধ্যায়

বর্গমূল ও ঘনমূল

1. কোন রাশিকে সেই রাশির দ্বারা গুণ করিলে যে গুণফল হয় তাহাকে ঐ রাশির **বর্গ** (Square) বলে এবং প্রথমোক্ত রাশিটিকে দ্বিতীয় **রাশির** অর্থাৎ গুণফলের **বর্গমূল** (Square root) বলে।

$3 \times 3 = 9$, এস্থলে 3 এর বর্গ 9 এবং 9 এর বর্গমূল 3.

কোন সংখ্যার বামদিকে $\sqrt{}$ এইরূপ চিহ্ন দ্বারা বর্গমূল সূচিত করা হয়। যথা, $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{25} = 5$, $\sqrt{64} = 8$, ইত্যাদি।

সমস্ত সংখ্যারই বর্গমূল সম্পূর্ণরূপে নির্ণয় করা যায় না। যে সকল সংখ্যার বর্গমূল সম্পূর্ণরূপে নির্ণয় করা যায় তাহাদিগকে **পূর্ণবর্গ** (Perfect Square) সংখ্যা বলে, যথা—36, 81, 100, 144, ইত্যাদি।

2. উৎপাদক সাহায্যে অখণ্ড পূর্ণবর্গ সংখ্যার বর্গমূল নির্ণয়। উৎপাদক সাহায্যে অনতিবৃহৎ পূর্ণবর্গ সংখ্যার বর্গমূল নির্ণয় করা সুবিধাজনক। যে সংখ্যাটির বর্গমূল নির্ণয় করিতে হইবে তাহাকে মৌলিক উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিতে হয় এবং দুই দুইটি সমান উৎপাদকের স্থলে এক একটি উৎপাদক লইয়া উহাদিগকে গুণ করিতে হয়। লব্ধ গুণফল নির্ণেয় বর্গমূল।

উদা. 1. 196 এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

$196 = 7 \times 7 \times 2 \times 2 \quad \therefore \quad \sqrt{196} = 7 \times 2 = 14.$

কোন পূর্ণবর্গ সংখ্যার ডানদিকে যুগ্ম সংখ্যক শূন্য থাকিলে, মাত্র ঐ সংখ্যার বর্গমূল নির্ণয় করিয়া প্রদত্ত সংখ্যায় যতগুলি শূন্য থাকিবে পূর্বলব্ধ বর্গমূলের ডানদিকে উহার অর্ধসংখ্যক শূন্য বসাইবে।

উদা. 2. 64000000 এর বর্গমূল নির্ণয় কর। $\sqrt{64} = 8.$

সুতরাং $\sqrt{64000000} = 8000.$

1 হইতে 400 এর মধ্যে যে সমস্ত পূর্ণবর্গ সংখ্যা আছে নামতার সাহায্যে মুখে মুখেই তাহাদের বর্গমূল নির্ণয় করা যায়, যেমন, সাত সাতে 49, সুতরাং $\sqrt{49} = 7$, পনর পনরম্ 225, $\therefore \sqrt{225} = 15$, ইত্যাদি।

যে সংখ্যার সর্বদক্ষিণের অঙ্কটি 0, 2, 3, 7 অথবা 8 তাহা পূর্ণবর্গ নহে। সংখ্যার সর্বদক্ষিণে অন্ততঃ দুইটি অথবা যুগ্মসংখ্যক শূন্য থাকিলে সংখ্যাটি পূর্ণবর্গ হইলেও হইতে পারে।

উদা. 3. 128 কে কোন্ ক্ষুদ্রতম সংখ্যা দ্বারা গুণ করিলে গুণফল একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা হইবে ?

$$128 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^2 \times 2^2 \times 2^2 \times 2$$

128 এর উৎপাদক-সমূহে আর একটি 2 থাকিলে প্রত্যেক প্রকার উৎপাদক যুগ্মসংখ্যক বার হইত। সুতরাং 128কে 2 দ্বারা গুণ করিলে গুণফল একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা হইবে। $\therefore$ নির্ণেয় উত্তর $= 2.$

উদা. 4. 768 কে কোন্ ক্ষুদ্রতম সংখ্যা দ্বারা ভাগ করিলে ভাগফল একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা হইবে ?

$$768 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$$
$$= 2^2 \times 2^2 \times 2^2 \times 2^2 \times 3$$

768 এর উৎপাদক-সমূহ হইতে 3 উৎপাদকটি ত্যাগ করিলে বাকী উৎপাদকগুলি যুগ্মসংখ্যক বার থাকে। সুতরাং 768 কে 3 দ্বারা ভাগ করিলে ভাগফল একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা হইবে। $\therefore$ নির্ণেয় উত্তর $= 3.$

প্রশ্নমালা 9

উৎপাদক সাহায্যে বর্গমূল নির্ণয় কর :

1. 625 2. 784 3. 1024 4. 160000

5. কোন্ ক্ষুদ্রতম সংখ্যা দ্বারা 512 কে গুণ করিলে গুণফল একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা হইবে ?

6. কোন্ ক্ষুদ্রতম সংখ্যা দ্বারা 2450 কে ভাগ করিলে ভাগফল একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা হইবে ?

7. এমন একটি লঘিষ্ঠ পূর্ণবর্গ সংখ্যা নির্ণয় কর যাহা 12, 16 এবং 20 এর প্রত্যেকটি দ্বারা বিভাজ্য।

8. 12, 18 ও 30 এর প্রত্যেকটি দ্বারা বিভাজ্য লঘিষ্ঠ পূর্ণবর্গ সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

9. কোন্ বৃহত্তম পূর্ণবর্গ সংখ্যা দ্বারা 48, 112 এবং 160 এর প্রত্যেকটি বিভাজ্য ?

10. কোন্ বৃহত্তম সংখ্যা দ্বারা 2000 কে ভাগ করিলে ভাগফল 1 ভিন্ন ক্ষুদ্রতম পূর্ণবর্গ সংখ্যা হইবে ?

11. একদল সৈন্যকে 15, 20 অথবা 25 সারিতে সাজান হয়। আবার এমন ভাবেও সাজান যায় যে উহাদিগকে যতগুলি সারিতে সাজান যায় প্রত্যেক সারিতে ততজন সৈন্য থাকে। ন্যূনপক্ষে ঐ দলে কত সৈন্য আছে ?

---

3. সাধারণ নিয়মে বর্গমূল নির্ণয়ের প্রণালী উদাহরণ দ্বারা দেখান হইল।

উদা. 1. 4937284 এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

$$\begin{array}{rl}
 & 4\ \overline{93}\ \overline{72}\ \overline{84}\ \big(\ 2222 \\
 & 4 \\
(2\times 2=)4\ 2 & \big)\ \overline{93} \\
 & 84 \\
(22\times 2=)44\ 2 & \big)\ \overline{972} \\
 & 884 \\
(222\times 2=)444\ 2 & \big)\ \overline{8884} \\
 & 8884 \\
\end{array}$$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল = 2222.

প্রদত্ত সংখ্যাটি পূর্ণবর্গ না হইলে কিছু অবশিষ্ট থাকিবে। ঐরূপ স্থলে পূর্বলব্ধ বর্গমূলের ডানদিকে দশমিক বিন্দু স্থাপন করিয়া অবশিষ্টের ডানদিকে দুইটি শূন্য বসাইয়া পূর্ববৎ প্রক্রিয়া দ্বারা বর্গমূলের সম্প্রসারণ করা যাইতে পারে।

নির্দিষ্ট দশমিক স্থান পর্যন্ত উত্তর নির্ণীত না হওয়া পর্যন্ত প্রতি অবশিষ্টের ডানদিকে দুইটি শূন্য বসাইয়া পূর্ববৎ প্রক্রিয়া করিয়া যাইতে হয়।

উদা. 2. দশমিকের দুই স্থান পর্যন্ত 624 এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

$$
\begin{array}{r|l}
 & 6\overline{24} \;(\; 24{\cdot}97 \\
 & 4 \\
\hline
44 & 224 \\
 & 176 \\
\hline
489 & 4800 \\
 & 4401 \\
\hline
4987 & 39900 \\
 & 34909 \\
\hline
 & 4991
\end{array}
$$

∴ নির্ণেয় বর্গমূল $= 24{\cdot}97$.

উদা. 3. $170{\cdot}485249$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

$$
\begin{array}{r|l}
 & \overleftarrow{\;} \; \overrightarrow{\;} \\
 & 1\;\overline{70}\;{\cdot}\overline{48}\;\overline{52}\;\overline{49} \;(\; 13{\cdot}057 \\
 & 1 \\
\hline
23 & 70 \\
 & 69 \\
\hline
2605 & 14852 \\
 & 13025 \\
\hline
26107 & 182749 \\
 & 182749 \\
\hline
\end{array}
$$

∴ নির্ণেয় বর্গমূল $= 13{\cdot}057$.

উদা. 4. তৃতীয় দশমিক স্থান পর্যন্ত ·036 এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

$$
\begin{array}{r|l}
 & \overrightarrow{\cdot\overline{03}\ \overline{60}} \;\; (\cdot 189 \\
 & 1 \\
\hline
28 & 260 \\
 & 224 \\
\hline
369 & 3600 \\
 & 3321 \\
\hline
 & 279
\end{array}
$$

∴ নির্ণেয় বর্গমূল = ·189.

দ্রষ্টব্য : 1, ·1 এবং ·01এর বর্গমূল নির্ণয়ের প্রণালী লক্ষ্য কর।

$\sqrt{1} = 1.$

$$
\begin{array}{r|l}
 & \cdot\overline{10} \;\; (\cdot 316\cdots \\
 & 9 \\
\hline
61 & 100 \\
 & 61 \\
\hline
626 & 3900 \\
 & 3756 \\
\hline
 & 144
\end{array}
$$

$\sqrt{\cdot 1} = \cdot 316\cdots$।

$$
\begin{array}{l}
\cdot\overline{01} \;\; (\cdot 1 \\
1 \\
\hline
\end{array}
$$

∴ $\sqrt{\cdot 01} = \cdot 1.$

উদা. 5. $\frac{64}{81}$এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

$$\sqrt{\frac{64}{81}} = \frac{\sqrt{64}}{\sqrt{81}} = \frac{8}{9}.$$

4. মিশ্র ভগ্নাংশের বর্গমূল নির্ণয় করিতে হইলে প্রথমতঃ উহাকে অপ্রকৃত ভগ্নাংশে পরিণত করিয়া পূর্বোক্ত নিয়মে বর্গমূল নির্ণয় করিতে হইবে।

উদা. 6. $1\frac{104}{121}$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

$$\sqrt{1\frac{104}{121}} = \sqrt{\frac{225}{121}} = \frac{\sqrt{225}}{\sqrt{121}} = \frac{15}{11} = 1\frac{4}{11}.$$

5. প্রদত্ত ভগ্নাংশটির হর পূর্ণবর্গ না হইলে লব ও হরকে এমন একটি সংখ্যা দ্বারা (সাধারণতঃ লঘিষ্ঠ) গুণ করিয়া লইতে হয় যাহাতে হর একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যায় পরিণত হয়। তারপর সাধারণ নিয়মে লব্ধ ভগ্নাংশের লবের বর্গমূল নির্ণয় করিয়া উহাকে হরের বর্গমূল দ্বারা ভাগ করিতে হয়। ভাগফল নির্ণেয় বর্গমূল। অথবা,

ভগ্নাংশটিকে প্রথমে দশমিকে পরিবর্তিত কর। পরিবর্তিত দশমিকটিকে, অসীম হইলে যত স্থান পর্যন্ত বর্গমূল নির্ণয় করিতে হইবে, পরিবর্তিত দশমিকে তাহার দ্বিগুণ স্থান থাকিলেই চলিতে পারে।

উদা. 7. দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত $\frac{1}{7}$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

$\sqrt{\frac{1}{7}} = \sqrt{\frac{1\times 7}{7\times 7}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{49}} = \frac{\sqrt{7}}{7}$

$= \frac{2{\cdot}64}{7} = {\cdot}37.$

অথবা, $\sqrt{\frac{1}{7}} = \sqrt{{\cdot}1428\cdots}$

$= {\cdot}37.$

উদা. 8. কোন সৈন্যাধ্যক্ষ তাহার সৈন্যদলকে বর্গাকারে সাজাইতে গিয়া দেখিল যে 335250 সৈন্যের 9 জন অবশিষ্ট থাকে। প্রথম সারিতে কত জন সৈন্য ছিল? [ক. প্র. 1911]

নির্ণেয় সৈন্যসংখ্যা $= \sqrt{335250-9} = \sqrt{335241} = 579.$

উদা. 9. একদলে যতগুলি বালক ছিল প্রত্যেকে তত নয়া পয়সা খরচ করায় মোট 144 টাকা খরচ হইল; ঐ দলে কত বালক ছিল?

144 টাকা = 14400 ন. প.

যতগুলি বালক প্রত্যেকে তত নয়া পয়সা দেওয়ায় মোট খরচ হইল 14400 ন. প.

$\therefore$ নির্ণেয় বালকের সংখ্যা $= \sqrt{14400} = 120$

6. উৎপাদক সাহায্যে পূর্ণঘন সংখ্যার ঘনমূল নির্ণয়। পূর্ণঘন সংখ্যাকে মৌলিক উৎপাদকে পরিণত করিয়া তিন তিনটি একই উৎপাদকের পরিবর্তে একটি করিয়া লও। ঐরূপ সংখ্যা একটি হইলে সেইটি এবং একাধিক হইলে উহাদের গুণফল নির্ণেয় ঘনমূল হইবে।

উদা. 1. 1728 এর ঘনমূল নির্ণয় কর।

$1728 = 2\times 2\times 2\times 2\times 2\times 2\times 3\times 3\times 3$

$\therefore \sqrt[3]{1728} = 2\times 2\times 3 = 12$

সামান্য ভগ্নাংশের লবের ঘনমূলের নীচে হরের ঘনমূল রাখিলে যে ভগ্নাংশ উৎপন্ন হয় তাহাই প্রদত্ত ভগ্নাংশের ঘনমূল। ঘনমূল নির্ণয় করিবার পূর্বে মিশ্র ভগ্নাংশকে অপ্রকৃত ভগ্নাংশে পরিণত করিয়া লইতে হয়।

উদা. 2. $1\frac{61}{64}$ এর ঘনমূল নির্ণয় কর।

$\sqrt[3]{1\frac{61}{64}} = \sqrt[3]{\frac{125}{64}} = \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{64}} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}.$

প্রশ্নমালা 10

বর্গমূল নির্ণয় কর :

1. 27225 2. 119025 3. 1002001 4. ·097344

5. ·00099856 6. 81·757764 7. $\frac{169}{256}$ 8. $4\frac{285}{529}$ 9. $28\cdot\dot{4}$

তৃতীয় দশমিক স্থান পর্যন্ত বর্গমূল নির্ণয় কর :

10. 50, 95, 531·065, 3·14159.

11. যতজন চাঁদা-দাতা প্রত্যেকে তত নয়া পয়সা করিয়া চাঁদা দেওয়ায় কোন স্মৃতি-ভাণ্ডারে 156 টাকা 25 নয়া পয়সা চাঁদা উঠিল। চাঁদা-দাতার সংখ্যা কত?

12. কোন স্থানে যতজন লোক ছিল প্রত্যেকে তত 10 ন. প. করিয়া চাঁদা দেওয়ায় মোট 9610 টাকা চাঁদা উঠিল। কত লোক চাঁদা দিয়াছিল?

13. এক থান রেশমী কাপড়ের মূল্য 84 পা. 4 পে.। ঐ থানে যত গজ কাপড় ছিল প্রতি গজের মূল্য তত পেন্স হইলে, থানখানিতে কত গজ কাপড় ছিল?

14. 2819042 হইতে কোন্ ক্ষুদ্রতম অখণ্ড সংখ্যা বিয়োগ করিলে বিয়োগফল একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা হইবে?

15. কোন বাগানে যতগুলি সারি, প্রত্যেক সারিতে ততগুলি গাছ আছে। বাগানে মোট 5776-টি গাছ থাকিলে কতটি সারি আছে? [বো. প্র. 1873]

16. কোন বিদ্যালয়ে 576 জন ছাত্র আছে। ঐ বিদ্যালয়ে যতগুলি শ্রেণী আছে প্রত্যেক শ্রেণীতে ততগুলি ছাত্র। প্রত্যেক শ্রেণীর ছাত্রসংখ্যা কত?

17. এক সৈন্যাধ্যক্ষ তাহার সৈন্যদলকে সম্পূর্ণ বর্গাকারে সাজাইতে গিয়া দেখিলেন যে 24 জন সৈন্য বেশী হয়। সৈন্যসংখ্যা 15400 হইলে, প্রতি সারিতে কত সৈন্য ছিল? [ক. প্র. 1927]

18. একদল সৈন্যকে 15, 20 অথবা 25 সারিতে সাজান যায়, আবার উহাদিগকে পূর্ণ-বর্গাকারেও সাজান যায়। সৈন্যসংখ্যা 4000 এর অনধিক হইলে এবং উহাদিগকে পূর্ণ-বর্গাকারে সাজাইলে প্রথম সারিতে কত জন সৈন্য থাকিবে?

19. উৎপাদক সাহায্যে ঘনমূল নির্ণয় কর : 729, 3375, 4096.

সপ্তম অধ্যায়

বর্গ পরিমাণ ও ঘন পরিমাণ

বর্গ পরিমাণ

1. বর্গ পরিমাণ (Square Measure).

সপ্তম ও অষ্টম শ্রেণীতে বর্গ পরিমাণ বিষয়ক অঙ্ক শিক্ষা দেওয়া হয়। এস্থলে পুনরালোচনার জন্য মাত্র কতিপয় বিশিষ্ট উদাহরণ ও একটি প্রশ্নমালা প্রদত্ত হইল।

2. (i) **আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ।**

(ii) **বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = বাহুর বর্গ।**

(iii) **চারি দেওয়ালের ক্ষেত্রফল = পরিসীমা × উচ্চতা**

= 2(দৈর্ঘ্য + প্রস্থ) × উচ্চতা।

উদা. 1. একখানি ঘরের দৈর্ঘ্য 15 মিটার এবং প্রস্থ 10 মি. 5 ডেসি মি. ; উহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

10 মি. 5 ডেসি মি. = 10·5 মি.

নির্ণেয় ক্ষেত্রফল = (15 × 10·5) বর্গ মিটার

= 157·5 বর্গ মিটার।

উদা. 2. একটি আয়তাকার জমির ক্ষেত্রফল 5 হেক্টো আর। ইহার প্রস্থ 62·5 মিটার হইলে, দৈর্ঘ্য কত ?

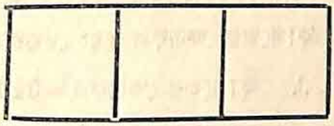
5 হে. আর = 50000 বর্গ মিটার ;

∴ নির্ণেয় দৈর্ঘ্য = (50000 ÷ 62·5) মিটার

= (500000 ÷ 625) = 800 মিটার।

উদা. 3. কোন আয়তাকার ক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য বিস্তারের তিন গুণ। ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল 30 একর হইলে, উহার দৈর্ঘ্য ও বিস্তার কত?

30 একর $=30\times4840$ বর্গগজ।



দৈর্ঘ্য বিস্তারের তিন গুণ বলিয়া ক্ষেত্রটিকে আড়াআড়িভাবে বিস্তারের সমান্তরাল রেখা টানিয়া সমান তিন ভাগে ভাগ করিলে প্রত্যেক ভাগ এক একটি বর্গক্ষেত্র হইবে যাহার বাহু ক্ষেত্রটির বিস্তারের সমান এবং প্রত্যেক ভাগের ক্ষেত্রফল $=\frac{30\times4840}{3}$ বর্গগজ $=48400$ বর্গগজ।

∴ প্রত্যেক বর্গাকার অংশের বাহু $=\sqrt{48400}$ গজ $=220$ গজ।

∴ বিস্তার $=220$ গজ এবং দৈর্ঘ্য $=220\times3$ গজ $=660$ গজ।

উদা. 4. 21 গজ দীর্ঘ 15 গজ বিস্তৃত একখানি উঠান 9 ইঞ্চি বর্গ টালি দ্বারা ঢাকিতে কতখানা টালির প্রয়োজন হইবে? [ক. প্র. 1947 পরিপূরক]

উঠানের ক্ষেত্রফল $=21\times15$ বর্গগজ $=21\times15\times9$ বর্গফুট।

1 খানি টালির ক্ষেত্রফল $=\frac{9}{12}\times\frac{9}{12}$ বর্গফুট $=\frac{9}{16}$ বর্গফুট।

∴ নির্ণেয় টালির সংখ্যা $=(21\times15\times9)\div\frac{9}{16}$

$$=21\times15\times9\times\frac{16}{9}=5040.$$

দ্রষ্টব্য ঃ কোন ক্ষেত্রকে গালিচা, মাদুর, পাথর প্রভৃতি দ্বারা ঢাকিতে হইলে গালিচা, মাদুর, পাথর প্রভৃতির ক্ষেত্রফল ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফলের সমান হওয়া আবশ্যক।

উদা. 5. কোন ঘরের মেঝে ঢাকিতে 6 ফুট দীর্ঘ 2 ফুট বিস্তৃত 30 খানা গালিচার প্রয়োজন হয়। ঐ ঘরের দৈর্ঘ্য 20 ফুট হইলে বিস্তার কত?

1 খানা গালিচার ক্ষেত্রফল $=6\times2$ বর্গফুট $=12$ বর্গফুট।

ঘরের মেঝের ক্ষেত্রফল $=12\times30$ বর্গফুট;

কিন্তু ঘরের দৈর্ঘ্য $=20$ ফুট;

∴ নির্ণেয় বিস্তার $=(12\times30)\div20$ ফুট $=18$ ফুট।

উদা. 6. একখানি ঘরের দৈর্ঘ্য 15 ফুট, বিস্তার 12 ফুট এবং উচ্চতা 10 ফুট; 1 ফুট 3 ইঞ্চি চওড়া কাগজ দিয়া চারি দেওয়াল মুড়িতে হইলে কত গজ কাগজের

প্রয়োজন হইবে এবং প্রতি গজ কাগজের মূল্য 12 নয়া পয়সা হইলে মোট খরচই বা কত লাগিবে ?

চারি দেওয়ালের ক্ষেত্রফল $= 2(15+12) \times 10$ বর্গফুট $= 540$ বর্গফুট।
কাগজের ক্ষেত্রফল এবং দেওয়ালের ক্ষেত্রফল সমান ;

$\therefore$ কাগজের ক্ষেত্রফল $= 540$ বর্গফুট।

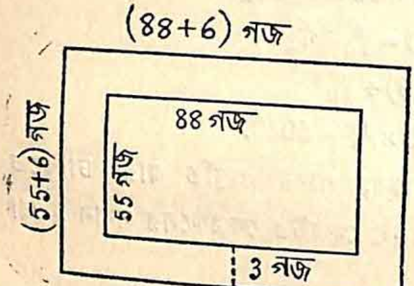
কাগজের প্রস্থ $= 1$ ফু. 3 ই. $= 1\frac{1}{4}$ ফুট $= \frac{5}{4}$ ফুট।

$\therefore$ কাগজের দৈর্ঘ্য $= (540 \div \frac{5}{4})$ ফুট $= 540 \times \frac{4}{5}$ ফু. $= 432$ ফুট $= 144$ গজ ;
এবং নির্ণেয় ব্যয় $= 12$ ন. প. $\times 144 = 1728$ ন. প. $= 17{\cdot}28$ টাকা।

উদা. 7. এক একর পরিমিত একখানি জমির দৈর্ঘ্য 88 গজ। উহার বহির্দেশে চারিদিকে 9 ফুট চওড়া পথ আছে। ঐ পথের ক্ষেত্রফল কত ?

জমির ক্ষেত্রফল $= 1$ একর $= 4840$ বর্গগজ ; দৈর্ঘ্য 88 গজ ;

$\therefore$ জমির বিস্তার $= (4840 \div 88)$ গজ $= 55$ গজ।



পথের বিস্তার $= 9$ ফুট $= 3$ গজ।

পথ সমেত জমির দৈর্ঘ্য $= (88 + 2 \times 3)$ গজ $= 94$ গজ।

এবং বিস্তার $= (55 + 2 \times 3)$ গজ $= 61$ গজ।

$\therefore$ উহার ক্ষেত্রফল $= 94 \times 61$ বর্গগজ $= 5734$ বর্গগজ।

কিন্তু জমির ক্ষেত্রফল $= 4840$ বর্গগজ।

$\therefore$ পথের ক্ষেত্রফল $= (5734 - 4840)$ বর্গগজ $= 894$ বর্গগজ।

নিম্নলিখিত সূত্রের সাহায্যে আয়তক্ষেত্রের ভিতরের দিকের বা বাহিরের দিকের চারি ধারের পথের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা যায়।

দৈর্ঘ্যকে L, প্রস্থকে B, পথের বিস্তারকে D ধরিলে,—

(1) ক্ষেত্রের বাহিরের পথের ক্ষেত্রফল $= 2\{(L+D)+(B+D)\} \times D$;

(2) ক্ষেত্রের ভিতরের পথের ক্ষেত্রফল $= 2(\{L-D)+(B-D)\} \times D$.

উদা. 7.-এর পথ বাহিরের দিকে হইলে,

পথের ক্ষেত্রফল $= 2\{(88+3)+(55+3)\} \times 3$ বর্গগজ

$= 894$ বর্গগজ।

পথটি ভিতরের দিকে হইলে,

পথের ক্ষেত্রফল হইত $2\{(88-3)+(55-3)\} \times 3$ বর্গগজ $= 822$ বর্গগজ।

উদা. 8. 36 ফুট দীর্ঘ 19 ফুট বিস্তৃত একখানি ঘরের দেওয়াল 12 ইঞ্চি পুরু এবং এই ঘরের চারিদিকে 9 ফুট চওড়া একটি বারান্দা আছে। প্রতি বর্গগজ 40 ন. প. দরে বারান্দায় পাথর বসাইবার খরচ কত নির্ণয় কর।

ঘরের দৈর্ঘ্যের ও বিস্তারের বহির্দেশের মাপ যথাক্রমে $(36+1\times2)$ ফু. বা 38 ফু. ও $(19+1\times2)$ ফু. বা 21 ফুট। বারান্দার বিস্তার 9 ফুট।

∴ বারান্দার ক্ষেত্রফল $= 2\{(38+9)+(21+9)\} \times 9$ বর্গফুট

$= 2(47+30) \times 9$ বর্গফুট

$= 2 \times 77 \times 9$ বর্গফুট

$= 2 \times 77$ বর্গগজ $= 154$ বর্গগজ

∴ বারান্দায় পাথর বসাইবার খরচ $= 40$ ন. প. $\times 154$

$= 6160$ ন. প. $= 61\cdot60$ টাকা।

উদা. 9. একখানি ঘরের দৈর্ঘ্য 12 ফুট, বিস্তার 8 ফুট এবং উচ্চতা 10 ফুট। প্রতি বর্গফুট 4 ন. প. দরে 6 ফুট উচ্চ, 4 ফুট বিস্তৃত দুইটি দরজা এবং 5 ফুট উচ্চ, 3 ফুট বিস্তৃত চারিটি জানালা বাদে চারি দেওয়াল চুনকাম করিবার ব্যয় কত?

চারি দেওয়ালের ক্ষেত্রফল $= 2(12+8) \times 10$ বর্গফুট $= 400$ বর্গফুট।

দুইটি দরজা ও চারিটি জানালার ক্ষেত্রফল

$= (6\times4)\times2$ বর্গফুট $+ (5\times3)\times4$ বর্গফুট $= 108$ বর্গফুট।

∴ দেওয়ালের যে অংশে চুনকাম করিতে হইবে তাহার ক্ষেত্রফল

$= (400-108)$ বর্গফুট $= 292$ বর্গফুট।

∴ নির্ণেয় ব্যয় $= 4$ ন. প. $\times 292 = 11$ টা. 68 ন. প.

প্রশ্নমালা 11

1. একটি বর্গক্ষেত্রের বাহু 25 মিটার 5 ডেসি মিটার ; উহার ক্ষেত্রফল কত ?

2. একটি আয়তাকার ঘরের দৈর্ঘ্য 16 মিটার এবং প্রস্থ 12 মিটার 8 ডেসি মিটার। উহার ক্ষেত্রফল কত বর্গ মিটার ?

3. 7·5 মিটার দীর্ঘ ও 6 মিটার প্রশস্ত একখানি ঘরের মেঝে 5 ডেসি মিটার দীর্ঘ এবং 4 ডেসি মিটার প্রশস্ত পাথর দিয়া ঢাকিতে কয়খানা পাথরের প্রয়োজন ?

4. একটি বর্গাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 12·1 একর ; উহার পরিসীমা কত ?

5. একখানি ঘরের দৈর্ঘ্য 20 ফুট ও বিস্তার 12 ফুট। 4 ফুট দীর্ঘ, 2 ফুট 6 ইঞ্চি বিস্তৃত কয়খানি মাদুর দ্বারা উহার মেঝে ঢাকা যাইবে ?

6. একখানি ঘরের দৈর্ঘ্য 20 ফুট এবং বিস্তার 13 ফুট 6 ইঞ্চি ; ইহার মেঝে কার্পেট দিয়া মুড়িতে হইলে 5 ফুট দীর্ঘ ও 3 ফুট বিস্তৃত কতখানা কার্পেটের প্রয়োজন হইবে ?

7. 1 গজ বিস্তারবিশিষ্ট কার্পেটের প্রতি গজের মূল্য 3 টা. 75 ন. প. হইলে, ঐ কার্পেট দ্বারা 16 ফুট দীর্ঘ ও 12 ফুট বিস্তৃত ঘরের মেঝে ঢাকিতে কত ব্যয় হইবে ?

8. একখানি ঘর কার্পেট দিয়া ঢাকিতে 75 টাকা ব্যয় হইল। যদি ঘরখানির দৈর্ঘ্য 4 মিটার বেশী হইত, তাহা হইলে ব্যয় হইত 100 টাকা। ঘরের দৈর্ঘ্য কত ?

9. বর্গাকার একখানি মাঠের ক্ষেত্রফল 8·1 একর। ঘণ্টায় 4 মাইল বেগে মাঠের চতুর্দিকে ঘুরিয়া আসিতে একটি লোকের কত সময় লাগিবে ?

10. একটি বর্গাকার মাঠের ক্ষেত্রফল 10 একর 884 বর্গগজ ; প্রতি গজ 40 ন. প. দরে ইহার চারিদিকে বেড়া দেওয়ার খরচ কত ?

11. কোন আয়তাকার ক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য বিস্তারের চারিগুণ ; উহার ক্ষেত্রফল 90 একর হইলে দৈর্ঘ্য কত নির্ণয় কর। [ঢা. বো. 1932]

12. আয়তাকার একটি উঠানের দৈর্ঘ্য বিস্তারের তিনগুণ ; উহাকে $1\frac{1}{2}$ ফুট বর্গ 2028 খানা পাথর দিয়া ঢাকা যায় ; উঠানের দৈর্ঘ্য কত ?

[ক. প্র. 1912 অতিরিক্ত]

13. 7 গজ দীর্ঘ, 16 ফুট বিস্তৃত একখানি ঘর কার্পেট দিয়া মুড়িতে 56 গজ কার্পেট লাগিল ; কার্পেটের বিস্তার কত ?

14. একখানি ঘরের দৈর্ঘ্য বিস্তারের তিনগুণ ; প্রতি বর্গগজ 7 টা. 50 ন. প. দরে ঘরখানিকে কার্পেট দিয়া মুড়িতে 1102 টা. 50 ন. প. ব্যয় হইল। ঘরের দৈর্ঘ্য ও বিস্তার নির্ণয় কর।

15. 200 গজ বাহুবিশিষ্ট একটি বর্গাকার ক্ষেত্র চতুর্দিকে (বাহির দিকে) 20 ফুট বিস্তৃত পথ দ্বারা পরিবেষ্টিত। প্রতি 100 বর্গ ফুটে 2 টা. 50 ন. প. দরে পথটি বাঁধাইবার ব্যয় কত ?

16. একটি বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা 48 ফুট দীর্ঘ ও 16 ফুট বিস্তৃত আয়তক্ষেত্রের পরিসীমার সমান। 18 ইঞ্চি দীর্ঘ, 8 ইঞ্চি বিস্তৃত কতখানা পাথর দ্বারা বর্গক্ষেত্রটিকে বাঁধান যাইতে পারে ?

17. 100 ফুট দীর্ঘ, 80 ফুট বিস্তৃত একটি উঠানের ভিতরে চারিদিক দিয়া 8 ফুট বিস্তৃত একটি পথ আছে। পথের ক্ষেত্রফল এবং প্রতি বর্গগজ 35 ন. প. হিসাবে পথ বাঁধাইবার খরচ নির্ণয় কর।

18. একটি আয়তাকার উঠানের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ যথাক্রমে 50 গজ ও 30 গজ। ইহার মধ্যে বিপরীত বাহুর মধ্য দিয়া 6 ফুট চওড়া ছুইটি রাস্তা এবং চতুর্দিকে 6 ফুট চওড়া রাস্তা আছে ; অবশিষ্টাংশ ঘাসে ঢাকা। পথ বাঁধাইবার খরচ প্রতি বর্গফুট 1 শি. 8 পে. এবং ঘাস লাগাইবার খরচ প্রতি বর্গগজ 3 শি. হইলে, উঠানটি প্রস্তুত করিতে মোট কত ব্যয় হইবে ?

19. একটি টেনিস কোর্টের দৈর্ঘ্য বিস্তারের দেড়গুণ। প্রতি বর্গগজ 5 আনা দরে ইহাকে সমতল করিবার ব্যয় 1470 টাকা। প্রতি গজ লোহার রেলিংএর মূল্য 4 টাকা হইলে কোর্টটির চতুর্দিকে রেলিং দিতে কত ব্যয় হইবে ?

20. বর্গাকার একটি খেলার মাঠের ভিতরে চারিদিক দিয়া 9 ফুট চওড়া একটি রাস্তা আছে। যদি রাস্তাটির ক্ষেত্রফল 3 একর হয় তবে সমস্ত মাঠের ক্ষেত্রফল কত, একর ও বর্গগজে নির্ণয় কর। [U. P. 1926]

21. 1 গজ প্রশস্ত একটি কার্পেট 1 গজ দীর্ঘ, 1 ফুট বিস্তৃত, 6 ইঞ্চি উচ্চ এই মাপের 20টি সিঁড়ির ধাপ ঢাকিয়া উপরে ও নীচে 1 ফুট করিয়া বেশী রহিয়াছে। প্রতি বর্গফুট 4 টা. 50 ন. প. হিসাবে কার্পেটখানির মূল্য কত ?

22. একখানি ঘরের দৈর্ঘ্য 15 ফুট, বিস্তার 12 ফুট এবং উচ্চতা 10 ফুট ; 1 ফুট 3 ইঞ্চি চওড়া কাগজ দিয়া চারি দেওয়াল মুড়িতে হইলে কত গজ কাগজের প্রয়োজন হইবে ?

23. 16 ফুট বর্গ একখানি ঘরের চারি দেওয়াল প্রতি বর্গগজ 50 ন.প. হারে কাগজ দিয়া মুড়িতে 40 টাকা ব্যয় লাগিল। ঘরখানির উচ্চতা কত ?

24. 32 ফুট দীর্ঘ, 20 ফুট বিস্তৃত, 13 ফুট 6 ইঞ্চি উচ্চ একখারি ঘরের চারি দেওয়াল প্রতি 100 বর্গফুট 6·25 টাকা হারে চুনকাম করিবার ব্যয় কত ?

25. যে ঘরের দৈর্ঘ্য বিস্তারের দ্বিগুণ, প্রতি বর্গগজ 5 শি. দরে তাহার মেঝে কার্পেট দিয়া মুড়িবার খরচ 6 পা. 2 শি. 6 পে. এবং প্রতি বর্গগজ 9 পেনি দরে চারি দেওয়াল রং করিবার খরচ 2 পা. 12 শি. 6 পে.। ঘরের উচ্চতা কত ?

26. একখানি ঘরের দৈর্ঘ্য $22\frac{1}{2}$ ফুট, বিস্তার 12 ফুট এবং উচ্চতা 11 ফুট। প্রতি বর্গগজ 8 ন. প. দরে $8\frac{1}{2}$ ফুট $\times$ 4 ফুট মাপের দুইটি দরজা এবং 4 ফুট $\times$ $2\frac{1}{2}$ ফুট মাপের চারিটি জানালা বাদে চারি দেওয়াল চুনকাম করিবার ব্যয় কত ?

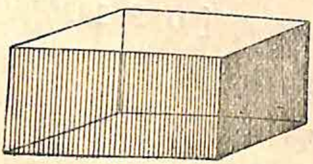
27. একখানি ঘরের দৈর্ঘ্য 22 ফুট, বিস্তার 18 ফুট এবং উচ্চতা 20 ফুট। ইহার চারি দেওয়াল 21 ইঞ্চি বিস্তৃত কাগজ দিয়া মুড়িতে হইবে। প্রতি 12 গজ কাগজের মূল্য 2·50 টাকা হইলে, দেওয়াল মুড়িবার ব্যয় কত ?

28. ঘণ্টায় 3 মাইল বেগে কোন আয়তাকার মাঠের একটি ধার অতিক্রম করিতে 5 মিনিট সময় লাগে এবং চারি ধার ঘুরিয়া আসিতে 14 মিনিট সময় লাগে। মাঠের ক্ষেত্রফল কত একর ?

[ঢাকা বোর্ড 1946]

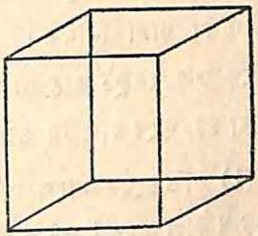
ঘন পরিমাণ

1. যাহার দৈর্ঘ্য, বিস্তার ও বেধ আছে, তাহাকে **ঘন** (solid) বলে।



যে ঘনের ছয়টি পৃষ্ঠ বা তল আছে, যাহার দুই দুইটি সম্মুখবর্তী পৃষ্ঠ বা তল সমান্তরাল এবং যাহার সমস্ত ধারের কোণগুলি সমকোণ, তাহাকে **আয়তঘন** বা **সমকোণী চৌপল** (parallelepiped) বলে।

আয়তঘনের দৈর্ঘ্য, বিস্তার ও বেধ পরস্পর সমান হইলে তাহাকে **ঘনক** (cube) বলে। সুতরাং ঘনকের ছয়টি তল বা পৃষ্ঠ সমান ক্ষেত্রফল-বিশিষ্ট এবং প্রত্যেকটি বর্গাকার।



ঘনক্ষেত্রের পৃষ্ঠ বা তলসমূহ দ্বারা অধিকৃত স্থান পরিমাণকে **ঘনফল** বা **ঘনপরিমাণ** (volume) বলে।

ক্ষেত্রফল নির্ণয় করিতে যেমন রৈখিক এককের বর্গ-পরিমিত ক্ষেত্রফলকে একক ধরিতে হয়, ঘনফল নির্ণয় করিতেও সেইরূপ রৈখিক এককের ঘনক (cube)-কে একক ধরিতে হয়।

2. আয়তঘনের ঘনফল = দৈর্ঘ্য × বিস্তার × বেধ ; সুতরাং আয়তঘনের ঘনফলকে যে কোন একটি মাত্রা (দৈর্ঘ্য, বিস্তার বা বেধের যে কোন একটি) দ্বারা ভাগ করিলে অপর দুইটি মাত্রাবিশিষ্ট আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল পাওয়া যায় এবং ঘনফলকে দুই মাত্রাবিশিষ্ট আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল দ্বারা ভাগ করিলে তৃতীয় মাত্রা পাওয়া যায়।

ঘনকের ঘনফলের ঘনমূল নির্ণয় করিলে ছয়টি বর্গাকার ক্ষেত্রের যে কোন একটির বাহু পাওয়া যায়।

উদা. 1. কোন আয়তঘনের দৈর্ঘ্য, বিস্তার ও বেধের পরিমাণ যথাক্রমে 4 ফুট, 2 ফুট 6 ইঞ্চি এবং 1 ফুট 3 ইঞ্চি ; ইহার ঘনফল কত ?

নির্ণেয় ঘনফল $= 4 \times 2\frac{1}{2} \times 1\frac{1}{4}$ ঘনফুট $= 4 \times \frac{5}{2} \times \frac{5}{4}$ ঘনফুট

$= \frac{25}{2}$ ঘনফুট $= 12$ ঘনফুট 864 ঘনইঞ্চি।

উদা. 2. একটি আয়তঘনের ঘনফল 7 ঘনফুট 864 ঘনইঞ্চি, দৈর্ঘ্য 4 ফুট, বিস্তার 1 ফুট 3 ইঞ্চি ; উহার বেধ কত ?

ঘনফল $= 7$ ঘনফুট 864 ঘনইঞ্চি $= 7\frac{1}{2}$ ঘনফুট $= \frac{15}{2}$ ঘনফুট।

দৈর্ঘ্য $= 4$ ফুট এবং বিস্তার $= 1\frac{1}{4}$ ফুট $= \frac{5}{4}$ ফুট ;

$\therefore$ নির্ণেয় বেধ $= \{\frac{15}{2} \div (4 \times \frac{5}{4})\}$ ফুট $= \frac{15}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{3}{2}$ ফুট $= 1$ ফুট 6 ইঞ্চি।

উদা. 3. ঢাকনি সমেত একটি কাঠের বাক্সের বহির্দেশের দৈর্ঘ্য, বিস্তার ও উচ্চতা যথাক্রমে 3 ফুট 4 ইঞ্চি, 2 ফুট 4 ইঞ্চি এবং 1 ফুট 5 ইঞ্চি। উহা $\frac{1}{2}$ ইঞ্চি পুরু তক্তা দ্বারা নির্মিত। (1) বাক্সটির ভিতরের ঘনফল কত? (2) বাক্সটি নির্মাণে কত ঘনফুট কাঠ লাগিয়াছে? (3) যদি প্রতি ঘনফুট কাঠের ওজন 864 আউন্স হয়, তবে বাক্সটির ওজন কত?

(1) ভিতরের মাপে বাক্সটির দৈর্ঘ্য, বিস্তার ও বেধ যথাক্রমে 3 ফুট 3 ইঞ্চি, 2 ফুট 3 ইঞ্চি এবং 1 ফুট 4 ইঞ্চি বা $3\frac{1}{4}$ ফুট, $2\frac{1}{4}$ ফুট এবং $1\frac{1}{3}$ ফুট।

∴ বাক্সটির ভিতরের ঘনফল $= 3\frac{1}{4} \times 2\frac{1}{4} \times 1\frac{1}{3}$ ঘনফুট $= 9\frac{3}{4}$ ঘনফুট।

(2) কাঠের ঘনফল $= (3\frac{1}{3} \times 2\frac{1}{3} \times 1\frac{5}{12})$ ঘনফুট $- 9\frac{3}{4}$ ঘনফুট

$= (11\frac{1}{54} - 9\frac{3}{4})$ ঘনফুট $= 1\frac{29}{108}$ ঘনফুট।

(3) বাক্সটির ওজন $= 1\frac{29}{108}$ ঘনফুট কাঠের ওজন

$= \frac{137}{108} \times 864$ আউন্স $= 68$ পাউণ্ড 8 আউন্স।

উদা. 4. 20 ফুট দীর্ঘ, 16 ফুট বিস্তৃত একখানি ঘর 3 ফুট বিস্তৃত দেওয়াল দ্বারা বেষ্টিত; দেওয়াল 11 ফুট উচ্চ হইলে, 9 ইঞ্চি দীর্ঘ, 3 ইঞ্চি বিস্তৃত ও 2 ইঞ্চি পুরু কতগুলি ইষ্টকের প্রয়োজন হইবে?

দেওয়ালের তলদেশের ক্ষেত্রফল $= \{(20+3)+(16+3) \times 3 \times 2$ বর্গফুট

$= 42 \times 3 \times 2$ বর্গফুট।

∴ দেওয়ালের ঘনফল $= 42 \times 3 \times 2 \times 11$ ঘনফুট।

প্রত্যেক ইষ্টকের ঘনফল $= \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{6}$ ঘনফুট $= \frac{1}{32}$ ঘনফুট।

∴ নির্ণেয় ইষ্টকের সংখ্যা $= 42 \times 3 \times 2 \times 11 \times 32 = 88704$।

প্রশ্নমালা 12

নিম্নলিখিত দৈর্ঘ্য, বিস্তার ও বেধবিশিষ্ট আয়তঘনের ঘনফল নির্ণয় কর:

1. দৈর্ঘ্য 12 মিটার, বিস্তার 10 মিটার, বেধ 7 মিটার।
2. দৈর্ঘ্য 4 ফুট 6 ইঞ্চি, বিস্তার 4 ফুট, বেধ 2 ফুট 6 ইঞ্চি।
3. কোন ঘনকের প্রত্যেক ধার 2 ফুট 4 ইঞ্চি, উহার ঘনফল কত?

4. কোন আয়তঘনের ঘনফল 75 ঘনফুট ; উহার দৈর্ঘ্য ও বিস্তার যথাক্রমে 10 ফুট ও 3 ফুট ; বেধ কত ?

5. কোন ঘনকের ঘনফল $42\frac{7}{8}$ ঘনফুট ; ইহার প্রত্যেক ধারের দৈর্ঘ্য কত ?

6. একখানি ঘরের দৈর্ঘ্য ও বিস্তার যথাক্রমে 10 ফুট 6 ইঞ্চি ও 8 ফুট ; উহাতে 840 ঘনফুট বায়ু ধরিলে, ঘরের উচ্চতা কত নির্ণয় কর।

7. একটি চৌবাচ্চার দৈর্ঘ্য 5 ফুট, বিস্তার 4 ফুট ও গভীরতা $3\frac{1}{2}$ ফুট ; এক ঘনফুট জলের ওজন 1000 আউন্স হইলে ঐ চৌবাচ্চায় কত পাউণ্ড জল ধরে ?

8. 4 ফুট দীর্ঘ, $4\frac{1}{2}$ ইঞ্চি বিস্তৃত ও $2\frac{1}{2}$ ইঞ্চি পুরু এক খণ্ড লৌহের ওজন কত ? (1 ঘনফুট লৌহের ওজন 480 পাউণ্ড)।

9. ঘনকাকার একটি পাত্রের প্রত্যেক ধারের দৈর্ঘ্য 4 ফুট ; প্রতি ঘনফুটে $6\frac{1}{4}$ গ্যালন জল ধরিলে পাত্রটিতে কত গ্যালন জল ধরে ?

10. একখানি ঘরে 3150 ঘনফুট বায়ু ধরে ; উহার উচ্চতা 10 ফুট 6 ইঞ্চি হইলে মেঝের ক্ষেত্রফল কত ?

11. 3 ঘনফুট লৌহ হইতে 2 ফুট দীর্ঘ, 1 ফুট 6 ইঞ্চি বিস্তৃত, $\frac{1}{8}$ ইঞ্চি পুরু কতখানা পাত নির্মাণ করা যায় ?

12. কোনও স্থানের বার্ষিক বৃষ্টিপাতের পরিমাণ 14 ইঞ্চি ; প্রতি ঘনফুট জলের ওজন 1000 আউন্স হইলে, ঐ স্থানে প্রতি একরে কত টন বৃষ্টিপাত হয় নির্ণয় কর।

13. একখানি ইটের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে 9 ইঞ্চি, $4\frac{1}{2}$ ইঞ্চি ও 3 ইঞ্চি হইলে, 45 ফুট দীর্ঘ, 6 ফুট উচ্চ ও 1 ফুট $1\frac{1}{2}$ ইঞ্চি পুরু দেওয়াল নির্মাণ করিতে কত ইটের প্রয়োজন হইবে ?

14. একখানি ঘরের দৈর্ঘ্য বিস্তারের দ্বিগুণ এবং উচ্চতার তিনগুণ। ঘরখানিতে 4500 ঘনফুট বায়ু ধরিলে, ঘরের মেঝের ক্ষেত্রফল কত ?

15. 2·56 মিটার গভীর কোন চৌবাচ্চার দৈর্ঘ্য উহার বিস্তারের 3 গুণ এবং উহাতে 3000 লিটার জল ধরে। উহার দৈর্ঘ্য ও বিস্তার কত ?

অষ্টম অধ্যায়

ঐকিক নিয়ম

1. ঐকিক নিয়মের কোন নিজস্ব প্রশ্ন নাই। ইহা একটি সাহায্যকারী নিয়মমাত্র। পাটীগণিতে নানা বিষয়ক প্রশ্নের সমাধানে এই নিয়মটি প্রযোজ্য।

উদা. 1. এক মাসের মধ্যে 2 মাইল রাস্তা প্রস্তুত করিতে 400 মজুরের প্রয়োজন ; ঐ সময়ের মধ্যে 5 মাইল রাস্তা প্রস্তুত করিতে হইলে কত মজুরের প্রয়োজন হইবে ?

2 মাইল রাস্তা প্রস্তুত করিতে লাগে 400 মজুর,

∴ 1 " " " " " $\frac{400}{2}$ মজুর,

∴ 5 " " " " " $\frac{400 \times 5}{2} = 1000$ মজুর।

উদা. 2. 10 জন লোক যে কাজ 12 দিনে করিতে পারে, 15 জন লোক সেই কাজ কত দিনে করিবে ?

10 জন লোকে যে কাজটি করে 12 দিনে

1 " " সেই " " 12×10 দিনে

∴ 15 " " " " " $\frac{12 \times 10}{15} = 8$ দিনে।

উদা. 3. 12 জন লোক যে কাজ 21 দিনে করে, কতজন লোক সেই কাজ 14 দিনে করিবে ?

21 দিনে যে কাজটি করে 12 জন লোকে,

1 " সেই " " 12×21 জন লোকে,

∴ 14 " " " " $\frac{12 \times 21}{14} = 18$ জন লোকে।

উদা. 4. কোন সম্পত্তির $\frac{3}{8}$ অংশের মূল্য 9000 টাকা ; ঐ সম্পত্তির $\frac{5}{12}$ অংশের মূল্য কত ?

সম্পত্তির $\frac{3}{8}$ অংশের মূল্য $= 9000$ টাকা

∴ সমস্ত সম্পত্তির মূল্য $= 9000 \times \frac{8}{3}$ টাকা,

∴ সম্পত্তির $\frac{5}{12}$ অংশের মূল্য $= 9000 \times \frac{8}{3} \times \frac{5}{12} = 10000$ টাকা।

উদা. 5. 8 জন পুরুষ অথবা 12 জন স্ত্রীলোক একটি কাজ 25 দিনে সম্পন্ন করিতে পারে। 6 জন পুরুষ এবং 11 জন স্ত্রীলোক ঐ কাজ কত দিনে সম্পন্ন করিবে? [ক. প্র. 1928]

8 জন পুরুষের কাজ = 12 জন স্ত্রীলোকের কাজ

∴ 1 " " " = $\frac{12}{8}$ " " "

∴ 6 " " " = $\frac{12 \times 6}{8} = 9$ " " "

সুতরাং 6 জন পুরুষ এবং 11 জন স্ত্রীলোকের কাজ $(9+11)=20$ জন স্ত্রীলোকের কাজের সমান।

এখন, 12 জন স্ত্রীলোক যে কাজটি করে 25 দিনে,

1 " সেই " " 25×12 দিনে,

∴ 20 " " " " $\frac{25 \times 12}{20} = 15$ দিনে।

উদা. 6. কোন দুর্গে 1500 সৈন্যের 50 দিনের খাদ্য আছে। 10 দিন পরে 500 সৈন্য অন্যত্র চলিয়া গেলে বাকী খাদ্যে অবশিষ্ট সৈন্যদের কত দিন চলিবে?

50 দিনের খাদ্যের 10 দিনের খাদ্য খাওয়া হইয়াছে,

সুতরাং অবশিষ্ট খাদ্যে 1500 সৈন্যের চলিতে পারে 40 দিন,

∴ " " 1 " " " 40×1500 দিন

∴ " " $(1500-500)$ " " $\frac{40 \times 1500}{1000} = 60$ দিন।

উদা. 7. কোন দুর্গে যে খাদ্য আছে তাহাতে 1200 সৈন্যের প্রত্যেককে দৈনিক 10 ছটাক করিয়া খাদ্য দিলে 60 দিন চলিতে পারে। 15 দিন পরে ঐ দুর্গে আরও 300 সৈন্য আসিল। প্রতি সৈন্যের দৈনিক নির্দিষ্ট খাদ্য কি পরিমাণ কমাইলে, অতিরিক্ত 5 দিনের মধ্যে খাদ্যের অকুলান হইবে না?

15 দিন পরে যে খাদ্য রহিল উহাতে 1200 সৈন্যের 45 দিন চলে। অতঃপর 300 সৈন্য আসিলে মোট সৈন্য-সংখ্যা হইল 1500 এবং চালাইতে হইবে আরও $(45+5)$ বা 50 দিন।

1200 সৈন্যের 45 দিন চলে প্রত্যেকের দৈনিক 10 ছটাক হিসাবে

∴ 1 " " " " " 1200×10 "

∴ 1500 " " " " " $\frac{1200 \times 10}{1500}$ "

∴ " " 1 " " " $\frac{1200 \times 10 \times 45}{1500}$ "

∴ " " 50 " " " $\frac{1200 \times 10 \times 45}{1500 \times 50}$ "

$= \frac{36}{5}$ ছটাক হিসাবে।

∴ প্রতি সৈন্যের দৈনিক খাদ্য $(10 - \frac{36}{5})$ বা $2\frac{4}{5}$ ছটাক কমাইতে হইবে।

প্রশ্নমালা 13

1. 12 জন লোক যে কাজ 15 দিনে সম্পন্ন করে, 18 জনে সেই কাজ কত দিনে করিবে ?

2. 8টি বলদ 10টি ঘোড়ার সমান ঘাস খায়। একটি বলদ দৈনিক 80 ন. প. মূল্যের ঘাস খাইলে, 12টি বলদ ও 7টি ঘোড়া দৈনিক কত মূল্যের ঘাস খাইবে ?

3. 28 মণ জিনিস যে ভাড়ায় 14 কিলোমিটার দূরে পাঠান যায়, $3\frac{1}{2}$ মণ জিনিস সেই ভাড়ায় কত দূরে পাঠান যাইবে ?

4. এক ব্যক্তি তাহার গন্তব্য পথের $\frac{11}{15}$ অংশ যাওয়ার পর দেখিল আরও 12 মাইল গেলে সে গন্তব্য স্থানে পৌঁছাইতে পারে ; গন্তব্য স্থানের দূরত্ব কত ?

5. প্রতি লোককে 10 আউন্স করিয়া খাদ্য দিলে 12 জন লোকের যে খরচে চলিতে পারে, 15 জন লোকের প্রত্যেককে কত আউন্স করিয়া খাদ্য দিলে উহার দ্বিগুণ খরচে চলিতে পারে ?

6. যদি 8 জন পুরুষ অথবা 15 জন স্ত্রীলোক 30 দিনে 120 টাকা আয় করে, তাহা হইলে অনুরূপ হারে 21 জন পুরুষ এবং 24 জন স্ত্রীলোক 15 দিনে কত আয় করিবে ?

7. কোন দুর্গে 420 জন লোকের 35 দিনের খাদ্য আছে। 5 দিন পরে আরও 210 জন লোক কোন খাদ্য না লইয়া ঐ দুর্গে আসিয়া উপস্থিত হইল। বাকী খাদ্যে সমস্ত লোকের আর কত দিন চলিবে ?

[ক. প্র. 1918]

8. 9 জন লোক দৈনিক 10 ঘণ্টা কাজ করিয়া 16 দিনে কোন কাজের $\frac{3}{5}$ অংশ সম্পন্ন করিল। অতিরিক্ত কতজন লোক নিযুক্ত করিলে এবং সকলে দৈনিক 8 ঘণ্টা কাজ করিলে আর 5 দিনে কাজটি শেষ হইবে?

9. যদি 8 জন পুরুষ অথবা 12 জল স্ত্রীলোক 14 দিনে একটি কাজ সম্পন্ন করিতে পারে, তাহা হইলে 18 জন পুরুষ এবং 21 জন স্ত্রীলোক উহার দ্বিগুণ একটি কাজ কত দিনে সম্পন্ন করিতে পারিবে? [ঢা. বি. 1942]

10. কোন দুর্গে 2200 লোকের 50 দিনের খাদ্য আছে। 17 দিন পরে আরও কতক লোক আসায় আর 20 দিনে সমস্ত খাদ্য শেষ হইল। কয়জন লোক পরে আসিয়াছিল? [ঢা. বো. 1940]

সময় ও কার্য

উদা. 1. একজন লোক যে কাজটি 10 দিনে করিতে পারে একজন বালক সেই কাজটি করিতে পারে 15 দিনে। উহারা একত্র কাজ করিলে ঐ কাজটি কত দিনে সম্পন্ন হইবে?

লোকটি 10 দিনে কাজটি সম্পন্ন করে, ∴ 1 দিনে সে উহার $\frac{1}{10}$ অংশ করে।

বালকটি 15 দিনে কাজটি সম্পন্ন করে, ∴ 1 দিনে সে উহার $\frac{1}{15}$ অংশ সম্পন্ন করে।

সুতরাং উহারা একত্র কাজ করিলে 1 দিনে কার্যটির $(\frac{1}{10}+\frac{1}{15})=\frac{1}{6}$ অংশ সম্পন্ন হয়। ∴ সম্পূর্ণ কার্যটি শেষ হইবে $(1 \div \frac{1}{6})=6$ দিনে।

উদা. 2. একটি কাজ **ক** ও **খ** 12 দিনে, **খ** ও **গ** 15 দিনে এবং **ক** ও **গ** 20 দিনে সম্পন্ন করিতে পারে। **ক** একা ঐ কাজটি কত দিনে করিবে?

[ক. প্র. 1939]

ক ও **খ** 1 দিনে ঐ কাজটির $\frac{1}{12}$ অংশ করে,

খ ও **গ** … … … $\frac{1}{15}$ … …

ক ও **গ** … … … $\frac{1}{20}$ … …

∴ 2 × (**ক** + **খ** + **গ**) 1 দিনে কাজটির $(\frac{1}{12}+\frac{1}{15}+\frac{1}{20})=\frac{1}{5}$ অংশ করে।

উদা. 5. **ক** একটি কাজ 10 দিনে এবং **খ** উহা 15 দিনে সম্পন্ন করিতে পারে। উভয়ে একসঙ্গে কাজ আরম্ভ করিল ; কিন্তু কাজ শেষ হইবার 2 দিন পূর্বে **খ** চলিয়া গেল। কত দিনে কাজটি শেষ হইল ?

ক একদিনে করে $\frac{1}{10}$ অংশ কাজ এবং **খ** করে $\frac{1}{15}$ অংশ কাজ। শেষের 2 দিন **ক** একা কাজ করিয়াছে।

স্নতরাং শেষ 2 দিনে **ক** $(\frac{1}{10} \times 2) = \frac{1}{5}$ অংশ কাজ করিয়াছে।

অতএব বাকী $(1 - \frac{1}{5}) = \frac{4}{5}$ অংশ কাজ উভয়ে একসঙ্গে করিয়াছে।

কিন্তু উভয়ে একসঙ্গে 1 দিনে করে $(\frac{1}{10} + \frac{1}{15}) = \frac{1}{6}$ অংশ কাজ,

$\therefore$ উহারা $\frac{4}{5}$ অংশ কাজ করিয়াছে $\frac{4}{5} \times \frac{6}{1} = \frac{24}{5} = 4\frac{4}{5}$ দিনে।

স্নতরাং কাজটি শেষ হইয়াছে মোট $(2 + 4\frac{4}{5}) = 6\frac{4}{5}$ দিনে।

(সহজতর বীজগণিতের প্রণালী)

মনে কর কাজটি x দিনে শেষ হইয়াছে। স্নতরাং **ক** ও **খ** যথাক্রমে x এবং $(x-2)$ দিন কাজ করিয়াছে।

x দিনে **ক** $\frac{x}{10}$ অংশ এবং $(x-2)$ দিনে **খ** $\frac{x-2}{15}$ অংশ করিয়াছে।

স্নতরাং $\frac{x}{10} + \frac{x-2}{15} = 1$ [অর্থাৎ 1টি কাজ]

উক্ত সমীকরণ সমাধান করিয়া, $x = 6\frac{4}{5}$

অর্থাৎ নির্ণেয় সময় $= 6\frac{4}{5}$ দিন।

প্রশ্নমালা 14

1. একজন পুরুষ কোন কাজ 8 দিনে এবং একজন স্ত্রীলোক সেই কাজ 12 দিনে করিতে পারে। উভয়ে একসঙ্গে কাজ করিলে ঐ কাজ কত দিনে সম্পন্ন হইবে ?

2. **ক** ও **খ** একত্রে একটি কাজ 6 দিনে সম্পন্ন করিতে পারে। **ক** যদি একাকী ঐ কাজ 9 দিনে সম্পন্ন করিতে পারে, তাহা হইলে **খ**-এর একাকী ঐ কাজ করিতে কত দিনে লাগিবে ?

$\therefore$ **ক + খ + গ** 1 দিনে কাজটির $(\frac{1}{5} \times \frac{1}{2}) = \frac{1}{10}$ অংশ করে।
কিন্তু **খ + গ** ... ... $\frac{1}{15}$ ... ...
$\therefore$ **ক** 1 দিনে কাজটির $(\frac{1}{10} - \frac{1}{15}) = \frac{1}{30}$ অংশ করে।
$\therefore$ সম্পূর্ণ কাজটি করিতে **ক**-এর $(1 \div \frac{1}{30}) = 30$ দিন লাগে।

উদা. 3. 8 জন পুরুষ অথবা 12 জন স্ত্রীলোক একটি কাজ 25 দিনে সম্পন্ন করিতে পারে। 6 জন পুরুষ এবং 11 জন স্ত্রীলোক ঐ কাজ কত দিনে সম্পন্ন করিবে ?

8 জন পুরুষ যে কাজ করে 25 দিনে, 1 জন পুরুষ সেই কাজ করে (8×25) বা 200 দিনে, স্থতরাং 1 জন পুরুষ 1 দিনে করিতে পারে কাজটির $\frac{1}{200}$ অংশ। 12 জন স্ত্রীলোক যে কাজ করে 25 দিনে, 1 জন স্ত্রীলোক সেই কাজ করে (12×25) বা 300 দিনে। স্থতরাং 1 জন স্ত্রীলোক 1 দিনে করিতে পারে কাজটির $\frac{1}{300}$ অংশ। স্থতরাং 6 পুরুষ এবং 11 স্ত্রীলোক একত্র 1 দিনে করে $(\frac{6}{200} + \frac{11}{300}) = \frac{1}{15}$ অংশ। স্থতরাং উহারা সম্পূর্ণ কাজটি করিবে 15 দিনে।

উদা. 4. একজন লোক এবং একজন বালক একত্রে একটি কাজ 36 দিনে সম্পন্ন করিতে পারে ; কিন্তু শেষ 10 দিন লোকটি একা কাজ করিলে কাজটি শেষ হইতে 40 দিন লাগে। বালকটি একা সম্পূর্ণ কাজটি কত দিনে করিতে পারে ?

[ঢা. বো. 1931]

যে কাজটি 40 দিনে শেষ হইল তাহার শেষের 10 দিনে লোকটি একা কাজ করিয়াছে। স্থতরাং প্রথম 30 দিন উহারা উভয়ে একত্র কাজ করিয়াছে।

লোকটি এবং বালকটি 36 দিনে কাজটি করিতে পারে,
$\therefore$ উহারা 1 দিনে করে কাজটির $\frac{1}{36}$ অংশ
$\therefore$ ... 30 ... ... $\frac{30}{36} = \frac{5}{6}$ অংশ।

ইহা হইতে বুঝা যাইতেছে, লোকটি 10 দিনে কাজটির $(1 - \frac{5}{6}) = \frac{1}{6}$ অংশ করে।
$\therefore$ লোকটি 1 দিনে কাজটির $\frac{1}{6 \times 10} = \frac{1}{60}$ অংশ করে।
কিন্তু লোকটি এবং বালকটি 1 দিনে করে কাজটির $\frac{1}{36}$ অংশ,
$\therefore$ বালকটি 1 দিনে করে $(\frac{1}{36} - \frac{1}{60}) = \frac{1}{90}$ অংশ,
$\therefore$ বালকটি একা সম্পূর্ণ কাজটি করিতে পারে 90 দিনে।

3. একটি কার্য **ক** ও **খ** 6 দিনে, **খ** ও **গ** 7 দিনে এবং **ক**, **খ** ও **গ** 4 দিনে সম্পন্ন করিতে পারে ; **ক** ও **গ** কত দিনে সেই কার্যটি করিতে পারিবে ?

4. 7 জন পুরুষ বা 11 জন স্ত্রীলোক একটি কাজ 17 দিনে সম্পন্ন করিতে পারে ; 11 জন পুরুষ এবং 7 জন স্ত্রীলোক কত দিনে সেই কাজ সম্পন্ন করিবে ?

5. 25 জন লোক একটি কাজ 16 দিনে সম্পন্ন করিতে পারে। কাজ আরম্ভ করিবার 4 দিন পরে 15 জন লোক চলিয়া যায় ; বাকী লোকের ঐ কাজ সমাধা করিতে কত দিন লাগিবে ?

6. **ক** কোন কাজ 12 দিনে সম্পন্ন করিতে পারে এবং **খ** উহা করিতে পারে 6 দিনে। উভয়ে একত্র 2 দিন কাজ করিবার পর **খ** চলিয়া যায়। আর কত দিনে **ক** কাজটি শেষ করিবে ? [ক. প্র. 1931]

7. **ক** যে কাজ করিতে পারে 9 দিনে, **খ** পারে উহা 18 দিনে। উভয়ে একত্র কাজ আরম্ভ করিল ; কিন্তু কাজ শেষ হইবার 3 দিন পূর্বে **ক** চলিয়া গেল। কাজটি কত দিনে শেষ হইল ? [ক. প্র. 1934]

8. দৈনিক 7 ঘণ্টা কাজ করিয়া **ক** 6 দিনে এবং **খ** 8 দিনে কোন কাজ সম্পন্ন করিতে পারে। উভয়ে একত্র দৈনিক 8 ঘণ্টা কাজ করিয়া কত দিনে ঐ কাজ সম্পন্ন করিবে ? [ক. প্র. 1930]

9. 4 জন পুরুষ অথবা 6 জন স্ত্রীলোক যে কাজ 30 দিনে করিতে পারে, 6 জন পুরুষ এবং 11 জন স্ত্রীলোক ঐ কাজ কত দিনে করিবে ?

10. কোন কাজ **ক** 8 দিনে এবং **খ** 6 দিনে সম্পন্ন করিতে পারে ; কিন্তু **গ**-এর সাহায্যে উহারা 3 দিনে কাজটি শেষ করিল এবং 22 টা. 50 ন. প. মজুরি পাইল। কে কত করিয়া মজুরি পাইল ?

11. 880 গজ দীর্ঘ, 660 গজ প্রশস্ত একখানি জমির শস্য কাটিতে 12 জন লোকের 8 দিন লাগে। উহার দ্বিগুণ দৈর্ঘ্য-প্রস্থ-বিশিষ্ট অনুরূপ আর একখানি জমির শস্য কাটিতে 24 জন লোকের কত দিন লাগিবে ?

নল ও চৌবাচ্চা

নল ও চৌবাচ্চা সম্বন্ধীয় প্রশ্ন মূলতঃ সময় ও কার্য-ঘটিত প্রশ্নেরই একটি বিশেষ শ্রেণী। সুতরাং উহাদের সমাধানও প্রধানতঃ সময় ও কার্য-ঘটিত প্রশ্নের সমাধানেরই অনুরূপ।

উদা. 1. কোন চৌবাচ্চায় দুইটি নল আছে। উহাদের একটি দ্বারা 20 মিনিটে এবং অপরটি দ্বারা 25 মিনিটে চৌবাচ্চাটি পূর্ণ হইতে পারে। নল দুইটি একসঙ্গে খুলিয়া দিলে চৌবাচ্চা কতক্ষণে পূর্ণ হইবে ?

প্রথম নলটি 20 মিনিটে চৌবাচ্চাটি পূর্ণ করে,

$\therefore$ ... ... 1 ... পূর্ণ করে চৌবাচ্চার $\frac{1}{20}$ অংশ।

তদ্রূপ, দ্বিতীয় নলটি 1 মিনিটে পূর্ণ করে চৌবাচ্চার $\frac{1}{25}$ অংশ,

$\therefore$ প্রথম ও দ্বিতীয় নল একসঙ্গে 1 মিনিটে পূর্ণ করে চৌবাচ্চার $(\frac{1}{20}+\frac{1}{25})$ $=\frac{9}{100}$ অংশ,

$\therefore$ উভয়ে সম্পূর্ণ চৌবাচ্চা পূর্ণ করে $(1\div\frac{9}{100})=\frac{100}{9}=11\frac{1}{9}$ মিনিটে।

উদা. 2. কোন চৌবাচ্চায় দুইটি নল আছে। উহাদের একটি দ্বারা চৌবাচ্চাটি 8 ঘণ্টায় পূর্ণ হয় এবং অপরটি দ্বারা পূর্ণ চৌবাচ্চা 12 ঘণ্টায় খালি হইতে পারে। উভয় নল একসঙ্গে খুলিয়া দিলে খালি চৌবাচ্চা কতক্ষণে পূর্ণ হইবে ?

প্রথম নলটি 8 ঘণ্টায় চৌবাচ্চাটি পূর্ণ করে,

$\therefore$ ... ... 1 ... চৌবাচ্চাটির $\frac{1}{8}$ অংশ পূর্ণ করে।

দ্বিতীয়... 12 ... পূর্ণ চৌবাচ্চা খালি করে,

$\therefore$ ... ... 1 ... পূর্ণ চৌবাচ্চার $\frac{1}{12}$ অংশ খালি করে,

এক্ষণে দুইটি নল একসঙ্গে খুলিয়া দিলে প্রতি ঘণ্টায় চৌবাচ্চার $(\frac{1}{8}-\frac{1}{12})=\frac{1}{24}$ অংশ পূর্ণ হইবে। $\therefore$ সম্পূর্ণ চৌবাচ্চাটি $(1\div\frac{1}{24})=24$ ঘণ্টায় পূর্ণ হইবে।

প্রশ্নমালা 15

1. কোন চৌবাচ্চায় দুইটি নল আছে। উহাদের একটি দ্বারা 16 মিনিটে এবং অপরটি দ্বারা 24 মিনিটে চৌবাচ্চাটি পূর্ণ হইতে পারে। দুইটি নল একসঙ্গে খুলিয়া দিলে চৌবাচ্চাটি কতক্ষণে পূর্ণ হইবে ?

2. কোন চৌবাচ্চায় তিনটি নল আছে। উহাদের দ্বারা চৌবাচ্চাটি যথাক্রমে 9, 12 ও 18 মিনিটে পূর্ণ হইতে পারে। তিনটি নল একসঙ্গে খুলিয়া দিলে চৌবাচ্চাটি কতক্ষণে পূর্ণ হইবে ?

3. একটি নল দ্বারা কোন চৌবাচ্চা 10 ঘণ্টায় পূর্ণ হয়, কিন্তু অপর একটি নল দ্বারা চৌবাচ্চাটি 15 ঘণ্টায় খালি হয়। উভয় নল একসঙ্গে খুলিয়া দিলে চৌবাচ্চাটি কতক্ষণে পূর্ণ হইবে ?

4. কোন চৌবাচ্চায় তিনটি নল আছে। প্রথম ও দ্বিতীয়টি দ্বারা যথাক্রমে 16 ও 12 মিনিটে চৌবাচ্চাটি পূর্ণ হয়। তৃতীয়টি দ্বারা 8 মিনিটে পূর্ণ চৌবাচ্চা খালি হয়। তিনটি নল একসঙ্গে খুলিয়া দিলে কতক্ষণে চৌবাচ্চার $\frac{3}{4}$ অংশ পূর্ণ হইবে ?

5. একটি চৌবাচ্চায় দুইটি নল লাগান আছে। প্রথমটি দ্বারা 50 মিনিটে চৌবাচ্চাটি পূর্ণ হইতে পারে, কিন্তু দ্বিতীয়টি দ্বারা পূর্ণ চৌবাচ্চা 40 মিনিটে জলশূন্য হইতে পারে। দুইটি নল একসঙ্গে খুলিয়া দিলে অর্ধপূর্ণ চৌবাচ্চা কতক্ষণে জলশূন্য হইবে ?

6. দুইটি নল যথাক্রমে 20 ও 30 মিনিটে একটি চৌবাচ্চা পূর্ণ করিতে পারে। নল দুইটি একসঙ্গে খুলিয়া কতক্ষণ পরে প্রথমটি বন্ধ করিয়া দিলে আর 10 মিনিটে চৌবাচ্চাটি পূর্ণ হইবে ?

[ক. প্র. 1926]

7. কোন জাহাজের তলদেশে ছিদ্র হওয়ায় উহা 12 ঘণ্টায় ডুবিয়া যাইতে পারে, কিন্তু পাম্পের সাহায্যে 16 ঘণ্টায় জাহাজখানি জলশূন্য করা যায়। যদি জাহাজখানি তীর হইতে 384 মাইল দূরে থাকে, তাহা হইলে উহা ঘণ্টায় কত মাইল বেগে চলিলে তীরে পৌঁছিবার সঙ্গে সঙ্গে ডুবিয়া যাইবে ?

8. দুইটি নল দ্বারা কোন চৌবাচ্চা যথাক্রমে 10 ও 12 মিনিটে পূর্ণ হয়, কিন্তু জল নিষ্কাশনের তৃতীয় আর একটি নল এবং প্রথমোক্ত দুইটি নল একসঙ্গে খুলিয়া দিলে 15 মিনিটে চৌবাচ্চাটি পূর্ণ হয়। তৃতীয় নল দ্বারা পূর্ণ চৌবাচ্চা কতক্ষণে খালি হইতে পারে ?

(সি. সা.)

সময় ও দূরত্ব

1. যদি কোন লোক ঘণ্টায় 3 মাইল বেগে চলে, তবে 5 ঘণ্টায় সে যাইবে (3×5) বা 15 মাইল ; 5 ঘণ্টায় 15 মাইল পথ চলিলে, তাহার বেগ হইবে ঘণ্টায় $(15 \div 5)$ বা 3 মাইল ; এবং 3 মাইল বেগে 15 মাইল পথ যাইতে তাহার সময় লাগিবে $(15 \div 3)$ বা 5 ঘণ্টা।

স্থতরাং, দূরত্ব (Distance) = বেগ (Velocity) × সময় (Time) ;

বেগ = দূরত্ব ÷ সময় ;

সময় = দূরত্ব ÷ বেগ।

2. সময় ও দূরত্ব বিষয়ক প্রশ্নের সমাধানে নিম্নলিখিত বিষয়গুলির জ্ঞান থাকা প্রয়োজন।

(1) গতিশীল দুইটি বস্তু দুই স্থান হইতে এক সরলরেখায় পরস্পরের অভিমুখে (স্থতরাং বিপরীত দিকে) চলিতে থাকিলে, উভয়ে পরস্পরের দিকে অগ্রসর হইবে গতিশীল বস্তু দুইটির প্রকৃত বেগের সমষ্টির সমান বেগে।

(2) গতিশীল বস্তু দুইটি একই দিকে চলিতে থাকিলে উহাদের একটি অপরটি অপেক্ষা বেশী চলিবে অথবা একটি অপরটি অপেক্ষা কম চলিবে বস্তু দুইটির প্রকৃত বেগের অন্তরের সমান বেগে।

[এই প্রকার দুইটি গতিশীল বস্তুর বেগের সমষ্টি বা অন্তরকে উহাদের আপেক্ষিক বেগ (Relative motion) বলে।]

(3) কোন বিন্দু বা স্তম্ভকে অতিক্রম করিতে কোন ট্রেনের সময় লাগে ট্রেনটির নিজের দৈর্ঘ্য পরিমিত পথ যাইতে যত সময় লাগে তত।

(4) কোন সেতু বা প্লাটফর্ম অতিক্রম করিতে কোন ট্রেনের সময় লাগে ট্রেনটির দৈর্ঘ্য ও সেতু বা প্লাটফর্মের দৈর্ঘ্যের সমষ্টি পরিমিত পথ যাইতে যত সময় লাগে তত।

(5) দুইটি ট্রেন সমান্তরাল ভাবে একই দিকে বা বিপরীত দিকে চলিতে থাকিলে দ্রুতগামী ট্রেন অপর ট্রেনটিকে অতিক্রম করিবে, উভয়ের আপেক্ষিক বেগে ট্রেন দুইটির দৈর্ঘ্যের সমষ্টি পরিমিত পথ যাইতে যত সময় লাগে তত সময়ে।

(6) নদীতে স্রোত থাকিলে স্রোতের অনুকূলে নৌকা চলে দাঁড়ের বেগ ও স্রোতের বেগের সমষ্টি যত তত বেগে এবং স্রোতের প্রতিকূলে নৌকা চলে দাঁড়ের

উদা. 1. বেলা 8-টার সময় কোনও স্থান হইতে **ক**, ঘণ্টায় 3 মাইল বেগে চলিতে আরম্ভ করিল। 40 মিনিট পরে **খ**, **ক**-কে ধরিবার জন্য একই স্থান হইতে রওনা হইয়া ঘণ্টায় $4\frac{1}{2}$ মাইল বেগে চলিতে লাগিল। **খ** কখন **ক**-কে ধরিবে ?

খ-এর রওনা হইবার পূর্বে **ক** 40 মিনিটে বা $\frac{2}{3}$ ঘণ্টায় $(3 \times \frac{2}{3})$ বা 2 মাইল অগ্রসর হইয়াছে। সুতরাং বেলা 8-টা 40 মিনিটের সময় উভয়ের ব্যবধান 2 মাইল এবং উভয়ে একই দিকে চলে বলিয়া উহাদের আপেক্ষিক বেগ হইল ঘণ্টায় $(4\frac{1}{2} - 3)$ বা $1\frac{1}{2}$ মাইল। $\therefore$ উভয়ে মিলিত হইবে $(2 \div 1\frac{1}{2})$ বা $\frac{4}{3}$ ঘণ্টা পরে। $\therefore$ বেলা 8-টা 40 মিনিটের $\frac{4}{3}$ ঘণ্টা বা 1 ঘণ্টা 20 মিনিট পরে অর্থাৎ বেলা 10 টার সময়, **খ**, **ক**-কে ধরিবে।

উদা. 2. **ক** ও **খ**-এর ব্যবধান $1\frac{1}{4}$ মাইল এবং **ক** ঘণ্টায় $3\frac{1}{2}$ মাইল বেগে এবং **খ** ঘণ্টায় $2\frac{3}{4}$ মাইল বেগে চলে। উভয়ে (1) পরস্পরের দিকে চলিলে কখন মিলিত হইবে ? (2) একই দিকে চলিলে, **ক** কতক্ষণ পরে **খ**-কে ধরিবে ?

উভয়ের ব্যবধান $1\frac{1}{4}$ মাইল $= \frac{5}{4}$ মাইল।

(1) পরস্পরের দিকে অর্থাৎ বিপরীত দিকে চলিলে উহাদের আপেক্ষিক বেগ হইবে ঘণ্টায় $(3\frac{1}{2} + 2\frac{3}{4})$ বা $\frac{25}{4}$ মাইল। $\therefore$ উভয়ে মিলিত হইবে $(\frac{5}{4} \div \frac{25}{4})$ ঘণ্টা বা $\frac{1}{5}$ ঘণ্টা বা 12 মিনিট পরে।

(2) একই দিকে চলিলে উহাদের আপেক্ষিক বেগ হইবে ঘণ্টায় $(3\frac{1}{2} - 2\frac{3}{4})$ বা $\frac{3}{4}$ মাইল। সুতরাং একই দিকে চলিলে, পশ্চাৎ দিক হইতে আসিয়া **ক**, **খ**-কে ধরিবে $(\frac{5}{4} \div \frac{3}{4})$ ঘণ্টা বা $\frac{5}{3}$ ঘণ্টা বা 1 ঘণ্টা 40 মিনিট পরে।

উদা. 3. একটি ট্রেন কলিকাতা হইতে সকাল 7-টার সময় রওনা হইয়া 10-টার সময় বর্ধমান পেঁ ৗছে। আর একটি ট্রেন বর্ধমান হইতে সকাল 8-টার সময় রওনা হইয়া 12-টার সময় কলিকাতা পেঁ ৗছে। কখন উভয় ট্রেনের পরস্পর সাক্ষাৎ হয় ?

বর্ধমানগামী ট্রেন 3 ঘণ্টায় সমস্ত পথ যায়, সুতরাং 1 ঘণ্টায় যায় সমস্ত পথের $\frac{1}{3}$ অংশ।

কলিকাতাগামী ট্রেন 4 ঘণ্টায় যায় সমস্ত পথ, সুতরাং 1 ঘণ্টায় যায় সমস্ত পথের $\frac{1}{4}$ অংশ।

সুতরাং 1 ঘণ্টায় দুইটি ট্রেন একত্রে যায় সমস্ত পথের মোট $(\frac{1}{3} + \frac{1}{4})$ বা $\frac{7}{12}$ অংশ।

কিন্তু বেলা 7-টা হইতে বেলা 8-টা পর্যন্ত 1 ঘণ্টা সময়ে বর্ধমানগামী ট্রেন সমস্ত পথের $\frac{1}{3}$ অংশ অগ্রসর হইয়া থাকে।

সুতরাং বেলা 8-টার সময় উভয় ট্রেনের মধ্যে ব্যবধান সমস্ত পথের $\frac{2}{3}$ অংশ।

∴ দুইটি ট্রেন মিলিত হয় বেলা 8 টার $(\frac{2}{3} \div \frac{7}{12})$ বা $1\frac{1}{7}$ ঘণ্টা পরে অর্থাৎ বেলা 9-টা $8\frac{4}{7}$ মিনিটের সময়।

উদা. 4. 198 ফুট দীর্ঘ একখানি ট্রেন ঘণ্টায় 30 মাইল বেগে চলিতেছে। (1) একটি টেলিগ্রাফ স্তম্ভকে অতিক্রম করিতে ইহার কত সময় লাগিবে? (2) 132 ফুট দীর্ঘ একটি প্লাটফর্ম অতিক্রম করিতেই বা কত সময় লাগিবে?

ঘণ্টায় 30 মাইল বেগ = সেকেণ্ডে $\left(\frac{30 \times 1760 \times 3}{60 \times 60}\right)$ বা 44 ফুট।

(1) ট্রেনটির নিজের দৈর্ঘ্য পরিমিত পথ যাইতে যত সময় লাগে একটি স্তম্ভকে অতিক্রম করিতেও সেই সময় লাগে। এস্থলে ট্রেনের দৈর্ঘ্য 198 ফুট এবং বেগ সেকেণ্ডে 44 ফুট।

∴ নির্ণেয় সময় = $\frac{198}{44}$ সেকেণ্ড = $4\frac{1}{2}$ সেকেণ্ড।

(2) ট্রেনের দৈর্ঘ্য ও প্লাটফর্মের দৈর্ঘ্যের সমষ্টি পরিমিত পথ যাইতে ট্রেনের যত সময় লাগে প্লাটফর্মকে অতিক্রম করিতেও সেই সময় লাগে।

এস্থলে ট্রেন ও প্লাটফর্মের দৈর্ঘ্যের সমষ্টি = $(198 + 132)$ ফুট = 330 ফুট এবং ট্রেনের বেগ সেকেণ্ডে 44 ফুট।

∴ নির্ণেয় সময় = $\frac{330}{44}$ সেকেণ্ড = $7\frac{1}{2}$ সেকেণ্ড।

উদা. 5. একখানি নৌকা দাঁড় বাহিয়া স্রোতের অনুকূলে 3 ঘণ্টায় 21 মাইল গিয়া স্রোতের প্রতিকূলে 7 ঘণ্টায় ফিরিয়া আসিতে পারে। দাঁড় ও স্রোতের বেগ নির্ণয় কর।

স্রোতের অনুকূলে নৌকা চলে ঘণ্টায় $(21 \div 3)$ বা 7 মাইল এবং স্রোতের প্রতিকূলে নৌকা চলে ঘণ্টায় $(21 \div 7)$ বা 3 মাইল।

∴ দাঁড়ের বেগ + স্রোতের বেগ = 7 মাইল (ঘণ্টায়)

এবং দাঁড়ের বেগ − স্রোতের বেগ = 3 মাইল (ঘণ্টায়)

∴ দাঁড়ের বেগ = $(7 + 3) \div 2$ = 5 মাইল (ঘণ্টায়)

এবং স্রোতের বেগ = $(7 - 3) \div 2$ = 2 মাইল (ঘণ্টায়)।

প্রশ্নমালা 16

1. সকাল 7-টার সময় একখানি ট্রেন কলিকাতা হইতে ছাড়িয়া বেলা 1-টার সময় আসানসোলে পৌঁছিল। ট্রেনখানির বেগ ঘণ্টায় 22 মাইল হইলে কলিকাতা হইতে আসানসোলের দূরত্ব কত ?

2. একখানি জাহাজ ঘণ্টায় 14 মাইল বেগে চলিয়া 12 দিনে কোন বন্দরে পৌঁছে। আর একখানি জাহাজ একই সঙ্গে রওনা হইয়া ঘণ্টায় 8 মাইল বেগে চলিলে প্রথম জাহাজ বন্দরে পৌছিবার কত দিন পরে উহা সেই বন্দরে পৌঁছিবে ?

3. **ক**, **খ**-এর 150 গজ অগ্রবর্তী আছে ; প্রতি সেকেণ্ডে **ক** $4\frac{1}{2}$ ফুট এবং **খ** 6 ফুট বেগে চলিলে, **খ** কত সময় পরে **ক**-কে ধরিবে ?

4. দুইটি স্টেশন **প** ও **ফ**-এর ব্যবধান 36 মাইল। একই সময়ে **ক**, **প**-স্টেশন হইতে ঘণ্টায় $4\frac{1}{2}$ মাইল বেগে **ফ**-এর দিকে এবং **খ**, **ফ**-স্টেশন হইতে ঘণ্টায় $3\frac{1}{2}$ মাইল বেগে **প**-এর দিকে রওনা হইল। কখন এবং কোথায় তাহাদের সাক্ষাৎ হইবে ?

5. এক ব্যক্তি ঘণ্টায় 9 মাইল বেগে অশ্বারোহণে $7\frac{1}{2}$ সেকেণ্ডে একটি সেতু পার হয় ; সেতুর দৈর্ঘ্য কত ?

6. 308 ফুট দীর্ঘ একটি ট্রেন ঘণ্টায় 35 মাইল বেগে একটি টেলিগ্রাফ স্তম্ভকে কত সেকেণ্ডে অতিক্রম করে ?

7. 352 ফুট দীর্ঘ একটি ট্রেন 8 সেকেণ্ডে একটি টেলিগ্রাম স্তম্ভকে অতিক্রম করে ; ট্রেনের বেগ ঘণ্টায় কত মাইল নির্ণয় কর।

8. 176 ফুট দীর্ঘ একখানি ট্রেন ঘণ্টায় 45 মাইল বেগে চলিয়া 154 ফুট দীর্ঘ এবং ঘণ্টায় 30 মাইল বেগ-বিশিষ্ট আর একখানি ট্রেনকে ধরে। প্রথম ট্রেন দ্বিতীয় ট্রেনে উপবিষ্ট কোন লোককে কত সেকেণ্ডে অতিক্রম করিবে এবং দ্বিতীয় ট্রেনকে কত সেকেণ্ডে অতিক্রম করিবে ?

9. একখানি ট্রেন সকাল 7-টার সময় কলিকাতা হইতে রওনা হইয়া বেলা 11-টার সময় বর্ধমান পৌঁছে। অপর একখানি ট্রেন বেলা 8-টার সময় বর্ধমান হইতে ছাড়িয়া 10-টা 30 মিনিটের সময় কলিকাতা পৌঁছে। কখন তাহাদের সাক্ষাৎ হইবে ?

10. ক ঘণ্টায় $3\frac{1}{2}$ মাইল বেগে খ-এর $2\frac{1}{2}$ ঘণ্টা পূর্বে কোন স্থান হইতে রওনা হয়। একই স্থান হইতে খ সেই রাস্তায় যদি ঘণ্টায় $4\frac{1}{2}$ মাইল বেগে চলে, তবে রওনা-স্থল হইতে কতদূর গিয়া সে ক-কে ধরিবে?

11. একখানি গাড়ী 12-টার সময় ছাড়িয়া ঘণ্টায় 16 মাইল বেগে যাইতে লাগিল। একই স্থান হইতে আর একখানি গাড়ী বেলা 1-টার সময় ছাড়িয়া রাত্রি 9-টার সময় উহাকে ধরিল। পরের গাড়ীখানি ঘণ্টায় কত মাইল করিয়া গেল?

12. এক শশক একটি কুকুরকে 130 গজ অন্তরে দেখিতে পাইয়া যেমন পলায়ন করিতে আরম্ভ করিল, কুকুর অমনি তৎপশ্চাৎ দৌড়াইল। শশক যতক্ষণে 5 গজ দৌড়ায়, কুকুর ততক্ষণে 7 গজ দৌড়ায়। শশক কত গজ গেলে কুকুর কর্তৃক ধৃত হইবে?

13. 55 গজ ও 33 গজ লম্বা দুইখানি রেলগাড়ী দুইটি সমান্তরাল রেলপথের উপর দিয়া যাইতেছে। ঘণ্টায় প্রথমটি 25 মাইল ও দ্বিতীয়টি 20 মাইল যায়। বিপরীত দিকে চলিলে একটির অপরটিকে অতিক্রম করিতে কত সময় লাগিবে?

14. ঘণ্টায় 20 মাইল বেগে একখানি গাড়ী খুলনা হইতে কলিকাতা রওনা হইল। এক ঘণ্টা পরে খুলনা হইতে আর একখানি গাড়ী ঘণ্টায় $27\frac{1}{2}$ মাইল বেগে চলিয়া প্রথম গাড়ীর 30 মিনিট পূর্বে কলিকাতা পৌঁছিল। খুলনা হইতে কলিকাতা কত দূর?

15. ঘণ্টায় 4 মাইল বেগে এক স্থান হইতে অন্য এক স্থানে যাইতে এবং তথায় 30 মিনিট বিশ্রাম করিয়া অশ্বারোহণে ঘণ্টায় 8 মাইল বেগে ফিরিয়া আসিতে 8 ঘণ্টা 15 মিনিট সময় লাগিল। স্থান দুইটির দূরত্ব কত?

16. কোন পিয়ন সকাল 7-টার সময় কলিকাতা হইতে রওনা হইয়া ঘণ্টায় 4 মাইল বেগে হাঁটিয়া কোন্নগর পৌঁছিল। সেখানে সে অর্ধঘণ্টা বিশ্রাম করিয়া মোটরে ঘণ্টায় 12 মাইল বেগে পুনরায় কলিকাতায় সকাল 10-টা 30 মিনিটের সময় ফিরিয়া আসিল। কলিকাতা হইতে কোন্নগর কত দূর?

17. এক ব্যক্তি প্রতি মিনিটে 352 গজ বেগে ঘোড়ায় চড়িয়া চলে এবং প্রতি 6 মাইল অন্তর ঘোড়া পরিবর্তন করিবার জন্য 6 মিনিট থামে। 108 মাইল পথ

18. দুইটি ট্রেন একই সময়ে মির্জাপুর ও দিল্লী হইতে রওনা হইয়া পরস্পরের দিকে যথাক্রমে ঘণ্টায় 16 ও 21 মাইল বেগে অগ্রসর হয়। যখন উহারা মিলিত হয়, তখন দেখা গেল যে একটি ট্রেন অপর ট্রেন অপেক্ষা 60 মাইল বেশী চলিয়াছে। দুইটি স্টেশনের ব্যবধান কত? [এ. প্র. 1894]

19. কোন পুলিস 100 গজ দূরে একটি চোরকে দেখিতে পায়। যদি পুলিস 6 মিনিটে 1 মাইল এবং চোর 10 মিনিটে 1 মাইল চলে, তবে চোর কত দূর গেলে পুলিস কর্তৃক ধৃত হইবে? [এ. প্র. 1898]

20. 110 গজ ও 88 গজ দীর্ঘ দুইখানি ট্রেন যথাক্রমে ঘণ্টায় 20 মাইল ও 25 মাইল বেগে চলিতেছে। (1) একই দিকে চলিলে, (2) বিপরীত দিকে চলিলে, দুইটি ট্রেনের পরস্পরকে অতিক্রম করিতে কত সময় লাগিবে?

21. একখানি ট্রেন $10\frac{1}{2}$ সেকেণ্ডে 110 গজ দীর্ঘ একটি প্লাটফর্ম অতিক্রম করিল, কিন্তু একটি টেলিগ্রাফ স্তম্ভ অতিক্রম করিতে উহার সময় লাগিল 5 সেকেণ্ড; ট্রেনখানির দৈর্ঘ্য কত?

22. নৌকায় দাঁড় বাহিয়া কোন ব্যক্তি স্রোতের অনুকূলে 3 ঘণ্টায় 24 মাইল যাইয়া স্রোতের প্রতিকূলে 12 ঘণ্টায় ফিরিয়া আসিল। দাঁড় ও স্রোতের বেগ কত?

23. স্রোতের অনুকূলে একখানি নৌকা দাঁড় বাহিয়া গেলে ঘণ্টায় $4\frac{1}{2}$ মাইল যাইতে পারে, কিন্তু স্রোতের বিপরীত দিকে ঘণ্টায় $2\frac{1}{2}$ মাইল যাইতে পারে। দাঁড় না বাহিয়া স্রোতে ছাড়িয়া দিলে নৌকা 3 ঘণ্টায় কত দূর যাইবে?

24. স্থির জলে দাঁড় বাহিয়া কোন নৌকা ঘণ্টায় 9 মাইল বেগে চালান যায়। স্রোতের অনুকূলে দাঁড় বাহিয়া যাইতে যে সময় লাগে স্রোতের প্রতিকূলে সময় লাগে তাহার তিনগুণ। স্রোতের বেগ ঘণ্টায় কত মাইল?

নবম অধ্যায়
শতকরা হিসাব

1. শতকরা হিসাব কোন বিশেষ বস্তুমূলক নহে। অর্থঘটিত বিষয় ছাড়াও সভ্যজগতে শতকরা হিসাবের বিশেষ প্রয়োজনীয়তা আছে। যে সমস্ত ক্ষেত্রে তুলনামূলক জ্ঞানের প্রয়োজন সেই সব ক্ষেত্রে শতকরা হিসাব একরূপ অপরিহার্য।

উদা. 1. শতকরা 10 বা 10 % কে সামান্য ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

10 % = 100 ভাগের 10 ভাগ $= \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$।

উদা. 2. $\frac{1}{5}$ এই ভগ্নাংশটিকে শতকরা হারে পরিণত কর।

$\frac{1}{5}$ = (100 এর $\frac{1}{5}$) % $= (100 \times \frac{1}{5})$ % = 20 % বা শতকরা 20.

উদা. 3. কোন নগরের লোকসংখ্যা 40000 এবং মাসিক মৃত্যুসংখ্যা 800। ঐ নগরের মাসিক মৃত্যুর শতকরা হার কত ?

40000এ মরে 800 জন,

∴ 100 তে মরে $\frac{800 \times 100}{40000} = 2$ জন, ∴ মৃত্যুর হার 2 %।

উদা. 4. **ক**-এর আয় অপেক্ষা **খ**-এর আয় 20 % কম হইলে, **খ**-এর আয় অপেক্ষা **ক**-এর আয় শতকরা কত বেশী ?

ক-এর আয় 100 টাকা হইলে, **খ**-এর আয় হয় 80 টাকা ; এখন দেখিতে হইবে **খ**-এর আয় 100 টাকা হইলে **ক**-এর আয় কত হয়।

খ-এর আয় 80 টাকা হয়, যখন **ক**-এর আয় 100 টাকা

∴ ... 1 টাকা হয় ... ... $\frac{100}{80}$ টাকা

∴ ... 100 „ ... ... $\frac{100 \times 100}{80}$ টা. = 125 টাকা।

∴ **খ**-এর আয় অপেক্ষা **ক**-এর আয় (125 − 100) % বা 25 % বেশী।

উদা. 5. চিনির মূল্য 20 % বৃদ্ধি পাওয়ায় শতকরা কত হারে চিনির ব্যবহার কমাইলে অতিরিক্ত খরচ লাগিবে না ?

প্রথম প্রণালী। মনে কর মূল্যবৃদ্ধির পূর্বে 100 টাকায় 100 সের চিনি পাওয়া যাইত।

উদা. 7. কোন পরীক্ষায় ইংরেজীতে 80 % এবং অঙ্কে 85 % ছাত্র পাস করিল। যদি ইংরেজী ও অঙ্ক উভয় বিষয়ে 75 % ছাত্র পাস করিয়া থাকে এবং ঐ উভয় বিষয়ে মোট 45 জন ছাত্র ফেল করিয়া থাকে, তবে মোট পরীক্ষার্থীর সংখ্যা কত ?

প্রতি 100 জন পরীক্ষার্থীর মধ্যে ইংরেজীতে পাস করে 80 জন এবং অঙ্কে পাস করে 85 জন ; কিন্তু ইংরেজী ও অঙ্ক উভয় বিষয়ে পাস করে 75 জন। সুতরাং শুধু ইংরেজীতে পাস করে (80 − 75) বা 5 জন এবং শুধু অঙ্কে পাস করে (85 − 75) বা 10 জন। অতএব অবশিষ্ট (100 − 75 − 5 − 10) বা 10 জন উভয় বিষয়ে ফেল করে।

এখন, উভয় বিষয়ে 10 জন ফেল করে 100 জনের মধ্যে।

∴ উভয় বিষয়ে 45 জন ফেল করে $\frac{100 \times 45}{10}$ বা 450 জনের মধ্যে।

∴ মোট পরীক্ষার্থীর সংখ্যা = 450.

দ্রষ্টব্য : নিম্নলিখিত শতকরা হারগুলির তুল্যমান ভগ্নাংশ মনে রাখিলে অঙ্ক কষিবার সুবিধা হয় :

$75\% = \frac{3}{4}$	$50\% = \frac{1}{2}$	$25\% = \frac{1}{4}$	$12\frac{1}{2}\% = \frac{1}{8}$
$66\frac{2}{3}\% = \frac{2}{3}$	$33\frac{1}{3}\% = \frac{1}{3}$	$16\frac{2}{3}\% = \frac{1}{6}$	$8\frac{1}{3}\% = \frac{1}{12}$
$6\frac{1}{4}\% = \frac{1}{16}$	$5\% = \frac{1}{20}$	$4\% = \frac{1}{25}$	$2\frac{1}{2}\% = \frac{1}{40}$
$20\% = \frac{1}{5}$	$40\% = \frac{2}{5}$	$60\% = \frac{3}{5}$	$80\% = \frac{4}{5}$

প্রশ্নমালা 17

1. একটি বালক কোন পরীক্ষায় 700 নম্বরের মধ্যে 427 নম্বর পাইল। সে শতকরা কত নম্বর পাইল ?

2. কোন নগরের লোকসংখ্যা 7256 ; ইহার শতকরা $62\frac{1}{2}$ জন পুরুষ হইলে, স্ত্রীলোকের সংখ্যা কত ?

3. এক ব্যক্তির বার্ষিক আয় 3000 টাকা এবং খরচ উহার 85 %। বৎসরান্তে তাহার কত জমিবে ?

4. এক ব্যক্তি মাসিক আয়ের 70 % খরচ করিয়া প্রতি মাসে 90 টাকা সঞ্চয় করে ; তাহার মাসিক আয় কত ?

∴ এখন ঐ চিনির মূল্য 120 টাকা। সুতরাং দেখিতে হইবে 100 টাকায় বর্ধিত মূল্যের চিনি কত পাওয়া যায়।

120 টাকায় পাওয়া যায় 100 সের চিনি,
∴ 1 " " " $\frac{100}{120}$ সের চিনি,
∴ 100 " " " $\frac{100 \times 100}{120} = 83\frac{1}{3}$ সের চিনি।
∴ 100 সের হইতে $(100 - 83\frac{1}{3})$ বা $16\frac{2}{3}$ সের কমাইতে হইবে।

∴ নির্ণেয় হার $= 16\frac{2}{3}$ %।

দ্বিতীয় প্রণালী। পূর্বে যে চিনির মূল্য 100 টাকা ছিল এখন তাহার মূল্য 120 টাকা। কিন্তু খরচ পূর্ববৎ রাখিতে হইলে 120 টাকা মূল্যের চিনি হইতে 20 টাকা মূল্যের অর্থাৎ $\frac{20}{120}$ বা $\frac{1}{6}$ অংশ চিনির ব্যবহার কমাইতে হইবে।

∴ নির্ণেয় হার $= \frac{1}{6} \times 100\ \% = \frac{50}{3}\ \% = 16\frac{2}{3}\ \%$।

তৃতীয় প্রণালী। $(20\ \% = \frac{20}{100} = \frac{1}{5})$; সুতরাং বর্ধিত মূল্য পূর্ব মূল্যের $(1 + \frac{1}{5}) = \frac{6}{5}$ গুণ।

∴ খরচ ঠিক রাখিতে হইলে চিনির ব্যবহার পূর্ব পরিমাণের $\frac{5}{6}$ গুণ করিতে হইবে, অর্থাৎ $\frac{1}{6}$ গুণ কমাইতে হইবে। কিন্তু $\frac{1}{6} = \frac{1}{6} \times 100\ \% = 16\frac{2}{3}\ \%$।

∴ চিনির ব্যবহার পূর্বাপেক্ষা $16\frac{2}{3}$ % কমাইতে হইবে।

উদা 6. চিনির মূল্য 5 % কম হইলে 23 টা. 12 আনায় 2 সের চিনি বেশী পাওয়া যায়; প্রতি সের চিনির পূর্ব মূল্য কত?

প্রথম প্রণালী। অতিরিক্ত 2 সের চিনি না লইলে ক্রেতা মূল্য ফেরত পাইতে পারিত $23\frac{3}{4}$ টাকার 5 % বা $\frac{95 \times 5}{4 \times 100}$ টাকা বা $\frac{19}{16}$ টাকা। সুতরাং 2 সের চিনির হ্রাস মূল্য $= \frac{19}{16}$ টাকা, ∴ 1 সের চিনির হ্রাস মূল্য $\frac{19}{32}$ টাকা। যেহেতু 1 সের চিনির হ্রাস মূল্য 1 সের চিনির প্রকৃত মূল্যের $(100 - 5)$ বা 95 %, 1 সের চিনির পূর্ব মূল্য $= \frac{19}{32} \times \frac{100}{95}$ টাকা $= \frac{10}{16}$ টাকা $= 10$ আনা।

দ্বিতীয় প্রণালী। 23 টা. 12 আনার 5 % বা 23 টা. 12 আ. $\times \frac{1}{20}$ $= 2$ সেরের হ্রাস মূল্য।

∴ 23 টাকা 12 আনা $= (2 \times 20)$ সেরের বা 40 সেরের হ্রাস মূল্য।
∴ পূর্বে 23 টাকা 12 আনায় পাওয়া যাইত $(40 - 2)$ বা 38 সের চিনি,
∴ প্রতি সের চিনির পূর্ব মূল্য $= 23$ টাকা 12 আনা $\div 38 = 10$ আনা।

5. এক ব্যক্তির মাসিক আয় 20 % বাড়িয়া 96 টাকা হইল ; পূর্বে তাহার মাসিক আয় কত ছিল ?

6. কোন ব্যবসায়ীর মূলধন 3500 টাকা। ব্যবসায়ে যদি তাহার 20 % লাভ হইয়া থাকে, তাহা হইলে লাভের পরিমাণ কত ?

7. কোন ব্যবসায়ী মূলধনের 10 % লাভ করিয়া মোট 350 টাকা পাইল ; তাহার মূলধন কত ?

8. কোন বিদ্যালয়ের মোট ছাত্রসংখ্যার 25 % একদিন অনুপস্থিত হইল। যদি ঐ দিন 750 জন ছাত্র উপস্থিত হইয়া থাকে, তাহা হইলে ঐ বিদ্যালয়ের ছাত্রসংখ্যা কত ?

9. প্লেগের ভয়ে কোন শহরের $31\frac{1}{4}$ % লোক পলাইয়া গেল এবং 10560 জন লোক শহরে থাকিয়া গেল। শহরে পূর্বে কত লোক ছিল ?

10. মোট আয়ের $3\frac{1}{8}$ % হিসাবে ট্যাক্স দিয়া কোন ব্যক্তির 3255 টাকা থাকে। তাহার মোট আয় কত ?

11. ট্যাক্সের হার 1 % হইতে $\frac{3}{4}$ %-এ নামিয়া গেলে এক ব্যক্তির 25 টাকা কম ট্যাক্স দিতে হয়। তাহার মোট আয় কত ?

12. একদল সৈন্যের 25 % যুদ্ধক্ষেত্রে নিহত হইল এবং অবশিষ্টের $33\frac{1}{3}$ % অসুস্থ হইয়া যুদ্ধক্ষেত্র ত্যাগ করিল। যদি সৈন্যদলে এখন 900 লোক অবশিষ্ট থাকে, তাহা হইলে প্রথমে সৈন্যদলে কত লোক ছিল ?

13. কোন শহরের লোকসংখ্যা 9000 ছিল, তন্মধ্যে স্ত্রীলোক অপেক্ষা পুরুষের সংখ্যা 1000 বেশী ছিল। পুরুষের সংখ্যা 15 % এবং স্ত্রীলোকের সংখ্যা 10 % বাড়িয়া থাকিলে, শহরের বর্তমান লোকসংখ্যা কত ?

14. কোন শহরে বৎসরে 7 % লোক জন্মগ্রহণ করে এবং 4 % মারা যায়। শহরের বর্তমান লোকসংখ্যা 20000 হইলে, 2 বৎসর পরে উহার লোকসংখ্যা কত হইবে ?

15. কোন ব্যবসায়ীর মূলধন প্রতি বৎসর 15 % বাড়ে। তাহার বর্তমান মূলধন 400 টাকা হইলে, 2 বৎসর পরে কত টাকা মূলধন হইবে ?

16. কোন ব্যবসায়ীর মূলধন প্রতি বৎসর 10 % হিসাবে বাড়িয়া 2 বৎসর পরে 3630 টাকা হইল ; প্রথমে তাহার মূলধন কত ছিল ?

17. **ক**-এর আয় **খ**-এর আয় অপেক্ষা 10 % বেশী হইলে, **খ**-এর আয় **ক**-এর আয় অপেক্ষা শতকরা কত কম ?

18. **ক**-এর আয় **খ**-এর আয় অপেক্ষা 10 % কম কিন্তু **গ**-এর আয় অপেক্ষা 10 % বেশী। **খ**-এর আয় অপেক্ষা **গ**-এর আয় শতকরা কত কম ?

19. 2500 পরীক্ষার্থীর এক-পঞ্চমাংশ বালিকা এবং অবশিষ্ট বালক। শতকরা 5 জন বালক ও শতকরা 40 জন বালিকা পরীক্ষায় অকৃতকার্য হইল। মোট পরীক্ষার্থীর শতকরা কত জন উত্তীর্ণ হইল।

20. কোন ট্রাম কোম্পানীর কাজ চালাইবার ব্যয় মোট আয়ের 40 %, অবশিষ্টের 40 % রিজার্ভ ফণ্ডে রাখিয়া বাকী টাকা অংশীদারদিগকে $3\frac{1}{2}$ % হিসাবে লাভাংশ দেওয়া হয়। যদি শেয়ারের মোট পরিমাণ 864000 টাকা হয়, তবে কোম্পানীর মোট আয় কত ? [ক. প্র. 1920]

21. কাপড়ের মূল্য 75 % বাড়িয়া গেলে, কোন গৃহস্থ কাপড়ের ব্যবহার শতকরা কত হারে কমাইবে যাহাতে তাহার খরচ পূর্ববৎ থাকে ? [ক. প্র. 1922]

22. কোন দ্রব্যের উপর আমদানী-শুল্ক 15 % বাড়িয়া গেলে, ঐ দ্রব্যের ব্যবহার শতকরা কত হারে কমাইলে ব্যয়ের পরিমাণ বাড়িবে না ?

23. চিনির মূল্য 20 % কমিয়া গেলে, খরচ না বাড়াইয়া ঐ দ্রব্যের ব্যবহার শতকরা কত বাড়ান যাইতে পারে ?

24. চায়ের মূল্য 10 % বাড়িয়া যাওয়ায় এক ব্যক্তি চায়ের ব্যবহারও 10 % কমাইয়া দিল। ইহাতে তাহার ঐ দ্রব্যের খরচ শতকরা কত বাড়িল বা কমিল ?

25. চায়ের মূল্য 25 % কমিয়া যাওয়ায় 15 টাকায় পূর্বাপেক্ষা 2 পাউণ্ড চা বেশী পাওয়া যায়। পূর্বে প্রতি পাউণ্ড চায়ের মূল্য কত ছিল ?

26. লবণের মূল্য 25 % কমিয়া গেলে 5 টাকা 76 নয়া পয়সায় 16 কিলোগ্রাম লবণ বেশী পাওয়া যায়। দর কমিবার পূর্বে ও পরে প্রতি কিলোগ্রাম লবণের মূল্য নির্ণয় কর ?

27. লেবুর মূল্য 25 % কমিয়া গেলে টাকায় 8-টি লেবু বেশী পাওয়া যায়। 100 লেবুর কমতি মূল্য কত ?

28. কোন পরীক্ষায় 52 % ছাত্র ইংরেজীতে এবং 42 % ছাত্র গণিতে অকৃতকার্য হইয়াছে ; কিন্তু তন্মধ্যে 17 % ছাত্র উভয় বিষয়ে অকৃতকার্য হইয়াছে। শতকরা কত জন উভয় বিষয়ে কৃতকার্য হইয়াছে ? [পাটনা প্র. 1924 ; ক. প্র. 1917]

29. কোন পরীক্ষায় 70 % ছাত্র ইংরেজীতে এবং 80 % ছাত্র গণিতে পাস করিল। যদি উভয় বিষয়ে 65 % ছাত্র পাস করিয়া থাকে এবং উভয় বিষয়ে 270 জন ছাত্র ফেল করিয়া থাকে, তাহা হইলে মোট পরীক্ষার্থীর সংখ্যা কত ?

30. একদল পরীক্ষার্থীর $37\frac{1}{2}$ % বালিকা। 75 % বালক এবং $62\frac{1}{2}$ % বালিকা পরীক্ষায় পাস করিল এবং 342 জন বালিকা পরীক্ষায় ফেল করিল। কত জন বালক ফেল করিয়াছিল ? [ঢা. বো. 1936]

31. পঠন ও লিখনের পরীক্ষায় প্রত্যেক ছাত্রই অন্ততঃ একটি বিষয়ে পাস করিয়াছে এবং মোট 150 জন ছাত্র উভয় বিষয়ে পাস করিয়াছে। যদি 80 % পঠনে এবং 70 % লিখনে পাস করিয়া থাকে, তবে মোট কত ছাত্র পরীক্ষা দিয়াছিল ?

32. কোন পরীক্ষায় 90 % পরীক্ষার্থী বানানে, এবং 85 % পরীক্ষার্থী পাটীগণিতে পাস করিল। যদি কোন পরীক্ষার্থীই উভয় বিষয়ে ফেল না করিয়া থাকে এবং মোট 150 জন পরীক্ষার্থী পাস করিয়া থাকে, তাহা হইলে পরীক্ষার্থীর সংখ্যা কত ?

33. কোন দেশের লোকসংখ্যা 29,40,00,000 ; ইহাদের 15,00,00,000 পুরুষ। পুরুষদের প্রতি হাজারে 98 জন লিখিতে ও পড়িতে পারে ; কিন্তু সমগ্র লোকসংখ্যার 5·3 % লিখিতে ও পড়িতে পারে। স্ত্রীলোকদের শতকরা কত জন লিখিতে ও পড়িতে পারে ?

দশম অধ্যায়

সুদকষা

1. বার্ষিক শতকরা হার হিসাবে সুদ ও সবৃদ্ধিমূল নির্ণয়। শতকরা বার্ষিক হার অর্থে এক শত টাকার 1 বৎসরের সুদ বুঝায়। ঐকিক নিয়মের সাহায্যে সুদ নির্ণয় করিয়া মূলধনের সহিত সুদ যোগ করিলেই সবৃদ্ধিমূল পাওয়া যাইবে।

উদা. 1. বার্ষিক 6 % হারে 700 টাকার 3 বৎসরের সুদ ও সবৃদ্ধিমূল কত ?

100 টাকার 1 বৎসরের সুদ = 6 টাকা ;

$\therefore$ 1 টাকার 1 বৎসরের সুদ = $\frac{6}{100}$ টাকা ;

$\therefore$ 700 টাকার 3 বৎসরের সুদ = $\frac{6 \times 700 \times 3}{100}$ টাকা = 126 টাকা।

$\therefore$ সবৃদ্ধিমূল = (700 + 126) টা. = 826 টা.

উদা. 2. বার্ষিক $3\frac{1}{4}$ % হারে 5200 টাকার 1 বৎসর 3 মাসের সবৃদ্ধিমূল কত ?

1 বৎসর 3 মাস = $1\frac{1}{4}$ বৎসর = $\frac{5}{4}$ বৎসর।

100 টাকার 1 বৎসরের সুদ = $\frac{13}{4}$ টাকা,

$\therefore$ 1 টাকার 1 বৎসরের সুদ = $\frac{13}{4 \times 100}$ টাকা,

$\therefore$ 5200 টাকার $\frac{5}{4}$ বৎসরের সুদ = $\frac{13 \times 5200 \times 5}{4 \times 100 \times 4}$ টাকা

= $\frac{845}{4}$ টাকা = 211·25 টাকা।

$\therefore$ নির্ণেয় সবৃদ্ধিমূল = 5200 টা. + 211·25 টা. = 5411·25 টাকা।

বার্ষিক শতকরা সুদের হার হিসাবে মোট সুদ নির্ণয়ের সূত্র :

$$\text{সুদ} = \frac{\text{মূলধন} \times \text{হার} \times \text{সময়}}{100}\text{।}$$

প্রশ্নমালা 18

সুদ নির্ণয় কর :

1. বার্ষিক 5 % হারে 540 টাকার 2 বৎসর 6 মাসের।
2. বার্ষিক $4\frac{1}{2}$ % হারে 1300 টাকার 1 বৎসর 6 মাসের।
3. বার্ষিক $2\frac{1}{2}$ % হারে 43 পা. 6 শি. 8 পে. এর 9 মাসের।
4. বার্ষিক 6 % হারে 1000 টাকার 15 মাসের সবৃদ্ধিমূল কত ?
5. বার্ষিক $2\frac{1}{2}$ % হারে 1200 টাকার $7\frac{1}{2}$ বৎসরের সবৃদ্ধিমূল কত ?

2. সুদ-নির্ণয়ে দিন গণনা ঃ—কোন নির্দিষ্ট তারিখ হইতে অপর কোন তারিখ পর্যন্ত সময়ের সুদ নির্ণয় করিতে হইলে প্রথম ও শেষ দুই দিনের এক দিন মাত্র ধরিতে হয় এবং মোট দিনসংখ্যাকে 365 দিয়া ভাগ করিয়া বৎসর করিয়া লইতে হয়। প্রথম ও শেষ দিনের মধ্যে মল বর্ষের (লিপ্ ইয়ার) ফেব্রুয়ারী মাস পড়িলে দিনসংখ্যা হিসাব করিবার সময় ফেব্রুয়ারী মাসে 29 দিন ধরিতে হইবে ; কিন্তু মোট দিনসংখ্যাকে বৎসর করিতে সর্বত্রই 365 দিয়া ভাগ করিতে হইবে।

যদি কোন মাসের প্রথম তারিখ হইতে অপর কোন মাসের শেষ তারিখ পর্যন্ত সুদ নির্ণয় করিতে হয়, তাহা হইলে দিন গণনা না করিয়া পূর্ণমাস ধরিতে হয় এবং 12 মাসে বৎসর ধরিয়া হিসাব করিতে হয়। 1লা জানুয়ারী হইতে 30শে জুন পর্যন্ত সময়কে 6 মাস বা $\frac{1}{2}$ বৎসর ধরিয়াই হিসাব করিতে হয়, দিন গণনা করিয়া নহে।

বৎসর-মাস-দিনে সময় দেওয়া থাকিলে 30 দিনে মাস ও 12 মাসে বৎসর ধরিতে হয়, বৎসর-দিনে অথবা মাত্র দিনে সময় দেওয়া থাকিলে 365 দিনে বৎসর ধরিতে হয়।

উদা. 1. 400 পাউণ্ডের 6 % হারে 73 দিনের সুদ নির্ণয় কর।

73 দিন $=\frac{73}{365}$ বৎসর $=\frac{1}{5}$ বৎসর।

100 পাউণ্ডের 1 বৎসরের সুদ $=6$ পাউণ্ড,

∴ 1 ... 1 ... $=\frac{6}{100}$ পাউণ্ড,

∴ 400 ... $\frac{1}{5}$ ... $=\frac{6\times400}{100\times5}$ পাউণ্ড

$=\frac{24}{5}$ পাউণ্ড $=4$ পা 16 শি.

[স্মরণ রাখিতে হইবে 5 ও 73 ভিন্ন অন্য কোন সংখ্যা দ্বারা 365 বিভাজ্য নহে। সুতরাং 73 দিন $=\frac{1}{5}$ বৎসর, 146 দিন $=\frac{2}{5}$ বৎসর, 219 দিন $=\frac{3}{5}$ বৎসর এবং 292 দিন $=\frac{4}{5}$ বৎসর।]

উদা. 2. বার্ষিক $9\frac{3}{8}$ % হারে 3000 টাকার 1947 খৃষ্টাব্দের 20-শে সেপ্টেম্বর হইতে 1948 খৃষ্টাব্দের 26-শে এপ্রিল পর্যন্ত সময়ের সুদ নির্ণয় কর।

1947 খৃষ্টাব্দের 20-শে সেপ্টেম্বর হইতে 1948 খৃষ্টাব্দের 26-শে এপ্রিল পর্যন্ত সময়

সে অ ন ডি জা ফে মা এ

$=(30-20)+31+30+31+31+29+31+26$

$=219$ দিন $=\frac{219}{365}$ বৎসর $=\frac{3}{5}$ বৎসর।

100 টাকার 1 বৎসরের সুদ $= \frac{75}{8}$ টাকা,

$\therefore$ 1 … 1 … $= \frac{75}{8 \times 100}$ টাকা,

$\therefore$ 3000 … $\frac{3}{5}$ … $= \frac{75 \times 3000 \times 3}{8 \times 100 \times 5}$ টাকা

$= \frac{675}{4} = 168{\cdot}75$ টাকা।

প্রশ্নমালা 19

1. 720 টাকার বার্ষিক 6 % হারে 146 দিনের সুদ নির্ণয় কর।

2. বার্ষিক $7\frac{1}{2}$ % হারে 1250 টাকার 1939 খৃষ্টাব্দের 23-শে নভেম্বর হইতে 1940 খৃষ্টাব্দের 17-ই এপ্রিল পর্যন্ত সময়ের সুদ কত ?

3. বার্ষিক 5 % হারে 565 পাউণ্ডের 1947 খৃষ্টাব্দের 17-ই জানুয়ারী হইতে 12-ই জুন পর্যন্ত সময়ের সুদ কত ?

4. বার্ষিক 8 % হারে 400000 টাকার 1864 খৃষ্টাব্দের 23-শে নভেম্বর হইতে 1865 খৃষ্টাব্দের 25-শে মে পর্যন্ত সময়ের সুদ নির্ণয় কর। [বো. প্রা. 1864]

5. বার্ষিক $4\frac{1}{2}$ % হারে 215 পা. 12 শিলিং এর 3 বৎসর 8 মাস 10 দিনের সুদ নির্ণয় কর। [বো. প্র. 1870]

6. বার্ষিক $4\frac{1}{2}$ % হারে 350 পাউণ্ডের 3-রা মার্চ হইতে 28-শে ডিসেম্বর পর্যন্ত সময়ের সুদ কত ? [ক. প্র. 1868]

7. বার্ষিক $4\frac{3}{4}$ % হারে 27531 টাকা 25 নয়া পয়সার 3-রা এপ্রিল হইতে 27-শে আগষ্ট পর্যন্ত সময়ের সবৃদ্ধিমূল নির্ণয় কর।

---

3. **মূলধন নির্ণয়।** উদাহরণের সাহায্যে প্রক্রিয়া বুঝাইয়া দেওয়া হইল।

উদা. 1. বার্ষিক $6\frac{1}{4}$ % হারে কত টাকা দৈনিক 1 টাকা সুদ উৎপন্ন করে ? [ক. প্র. 1942]

দৈনিক 1 টাকা সুদ হইলে 1 বৎসরের সুদ হয় 365 টাকা।

$6\frac{1}{4}$ টাকা সুদ হয়, মূলধন 100 টাকা হইলে,

$\therefore$ 1 টাকা … … $\frac{100 \times 4}{25}$ …

$\therefore$ 365 টাকা … … $\frac{100 \times 4 \times 365}{25}$ …

$\therefore$ নির্ণেয় মূলধন $= \frac{100 \times 4 \times 365}{25}$ টাকা $= 5840$ টাকা।

উদা. 2. বার্ষিক $2\frac{2}{3}$ % হারে কত টাকা $3\frac{1}{3}$ বৎসরে সুদেমূলে 306·25 টাকা হইবে ?

$2\frac{2}{3}$ % হারে 100 টাকার $3\frac{1}{3}$ বৎসরের সুদ $= \frac{8}{3} \times \frac{10}{3} = \frac{80}{9}$ টাকা ;

∴ 100 টাকা $3\frac{1}{3}$ বৎসরে সুদেমূলে হয় $(100 + \frac{80}{9})$ বা $\frac{980}{9}$ টাকা

$\frac{980}{9}$ টাকা সুদেমূলে হয় আসল 100 টাকা হইলে

∴ 1 " " " " $\frac{100 \times 9}{980}$ "

∴ $\frac{1225}{4}$ " " " " $\frac{100 \times 9 \times 1225}{980 \times 4}$ "

∴ নির্ণেয় আসল $= \frac{100 \times 9 \times 1225}{980 \times 4}$ টাকা $= 281·25$ টাকা।

সূত্র : (1) মূলধন $= \frac{\text{সুদ} \times 100}{\text{হার} \times \text{সময়}}$;

(2) মূলধন $= \frac{\text{সবৃদ্ধিমূল} \times 100}{100 + (\text{হার} \times \text{সময়})}$ ।

প্রশ্নমালা 20

1. বার্ষিক 4 % হারে কত টাকা 5 বৎসরে সুদেমূলে 360 টাকা হইবে ?
[পূর্ববঙ্গ মাধ্যমিক বোর্ড, 1948]

2. বার্ষিক 4 % হারে কত টাকা $2\frac{1}{2}$ বৎসরে সুদে-আসলে 1325 টা. 50 ন. প. হইবে ?

3. মূলধন কত হইলে বার্ষিক $4\frac{1}{18}$ % হারে উহার দৈনিক সুদ 1 টাকা হয় ?
[ক. প্র. 1937]

4. বার্ষিক $6\frac{2}{3}$ % হারে কত টাকার 5 বৎসরের সুদ 25 টাকা হইবে ?

5. কত টাকা বার্ষিক 5 % হারে 11-ই জুন ধার দিলে ঐ বৎসরেই 4-ঠা নভেম্বর সুদেমূলে 5151 টাকা হইবে ?

---

4. **সুদের শতকরা হার নির্ণয়।** মূলধন, সুদ ও সময় দেওয়া থাকিলে উহা হইতে 100 টাকার 1 বৎসরের সুদ নির্ণয় করিলে লব্ধ ফলই শতকরা বার্ষিক সুদের হার হইবে।

উদা. 1. 1275 টাকা ধার দেওয়া হইল। 9 মাস পরে অধমর্ণ সুদ সহ 1313·25 টাকা দিয়া ধার শোধ করিল। বার্ষিক শতকরা সুদের হার নির্ণয় কর।

সুদ = টা. 1313·25 − টা. 1275 = টা. 38·25 = $38\frac{1}{4}$ টাকা।

1275 টাকার $\frac{3}{4}$ বৎসরের সুদ = $\frac{153}{4}$ টাকা

∴ 1 „ 1 „ = $\frac{153 \times 4}{4 \times 1275 \times 3}$ টাকা

∴ 100 „ 1 „ = $\frac{153 \times 4 \times 100}{4 \times 1275 \times 3}$ = 4 টাকা।

∴ নির্ণেয় সুদের হার = 4 %.

উদা. 2. বার্ষিক শতকরা কত হারে কোন মূলধন 30 বৎসরে সুদেমূলে ত্রিগুণিত হয় ?

100 টাকা মূলধন হইলে উহা 30 বৎসরে সুদেমূলে হইবে 300 টাকা ;

∴ 100 টাকার 30 বৎসরের সুদ = 300 টা. − 100 টা. = 200 টাকা ;

∴ 100 টাকার 1 বৎসরের সুদ = $\frac{200}{30}$ টাকা = $6\frac{2}{3}$ টাকা ;

∴ নির্ণেয় সুদের হার = $6\frac{2}{3}$ %।

নিম্নলিখিত সূত্রের সাহায্যে সহজেই সুদের হার নির্ণয় করা যায় ঃ

$$\text{সুদের হার} = \frac{\text{সুদ} \times 100}{\text{মূলধন} \times \text{সময়}}\text{।}$$

প্রশ্নমালা 21

1. বার্ষিক শতকরা কত হারে 700 টাকার $4\frac{1}{2}$ বৎসরের সুদ 157·50 টা. হয় ?

2. বার্ষিক শতকরা কত হারে 1500 টাকা 5 বৎসরে সুদেমূলে 1912·50 টাকা হইবে ?

3. বার্ষিক শতকরা কত হারে 440 পা. 6 শি. 8 পে. 5 বৎসরে সুদেমূলে 511 পা. 17 শি. 9 পে. হইবে ? [ক. প্র. 1912]

4. বার্ষিক শতকরা কত হার সুদে কোন মূলধন $16\frac{2}{3}$ বৎসরে দ্বিগুণিত হয় ?

5. বার্ষিক শতকরা কত হার সুদে কোন মূলধন $12\frac{1}{2}$ বৎসরে ত্রিগুণিত হয় ?

6. কোন মূলধনের $6\frac{1}{4}$ বৎসরের সুদ মূলধনের $\frac{5}{16}$ অংশ ; বার্ষিক শতকরা কত হারে সুদ ধরা হইয়াছে ? [ক. প্র. 1946]

7. বার্ষিক শতকরা কত হারে কোন টাকার 7 বৎসর 6 মাসের সুদ সবৃদ্ধিমূলের $\frac{3}{8}$ অংশ হইবে ?

---

5. সময় নির্ণয়। মূলধন, সুদ ও সুদের হার দেওয়া থাকিলে সময় নির্ণয় করা যায়। মূলধনের নির্ণেয় সময়ের সুদকে মূলধনের 1 বৎসরের সুদ দ্বারা ভাগ করিলে লব্ধ ভাগফল নির্ণেয় সময় হইবে।

উদা. 1. বার্ষিক 5 % হারে কত বৎসরে 175 টাকার সুদ $39\frac{3}{8}$ টাকা হইবে?

$39\frac{3}{8}$ টা. $= \frac{315}{8}$ টাকা।

175 টাকার নির্ণেয় সময়ের সুদ $= \frac{315}{8}$ টাকা;

175 টাকার 5 % হারে 1 বৎসরের সুদ $= \frac{175 \times 5}{100}$ টাকা $= \frac{35}{4}$ টাকা।

$\therefore$ নির্ণেয় সময় $= (\frac{315}{8} \div \frac{35}{4})$ বৎসর $= \frac{315}{8} \times \frac{4}{35}$ বৎসর $= 4\frac{1}{2}$ বৎসর।

উদা. 2. বার্ষিক $3\frac{1}{3}$ % হারে কত বৎসরে 1350 টাকা সুদেমূলে 1620 টাকা হইবে? [ক. প্র. 1947]

1350 টাকার নির্ণেয় সময়ের সুদ $= 1620$ টা. $- 1350$ টা. $= 270$ টা.;

1350 টাকার $3\frac{1}{3}$ % হারে 1 বৎসরের সুদ $= 1350 \times \frac{10}{3 \times 100} = 45$ টা.;

$\therefore$ নির্ণেয় সময় $= (270 \div 45)$ বৎসর $= 6$ বৎসর।

উদা. 3. বার্ষিক $6\frac{1}{4}$ % হারে কত বৎসরে কোন মূলধন সুদে-আসলে দ্বিগুণ হয়?

100 টাকা মূলধন হইলে সুদ-আসল হইবে 200 টাকা, সুতরাং সুদ হইবে (200 – 100) বা 100 টাকা। তাহা হইলে 100 টাকার নির্ণেয় সময়ের সুদ হইবে 100 টাকা; কিন্তু 100 টাকার 1 বৎসরের সুদ $6\frac{1}{4}$ টাকা।

$\therefore$ নির্ণেয় সময় $= (100 \div 6\frac{1}{4})$ বৎসর $= 100 \times \frac{4}{25}$ বৎসর $= 16$ বৎসর।

নিম্নলিখিত সূত্রের সাহায্যে সহজেই সময় নির্ণয় করা যায়ঃ

$$\textbf{সময়} = \frac{\textbf{সুদ} \times 100}{\textbf{মূলধন} \times \textbf{হার}}।$$

প্রশ্নমালা 22

1. বার্ষিক $5\frac{1}{2}$ % হারে 5000 টাকার কত বৎসরের সুদ 1100 টাকা হয়?

2. কত বৎসরে বার্ষিক $3\frac{1}{2}$ % হারে 285 পাউণ্ডের সুদ 84 পা. 15 শি. 9 পে. হইবে?

3. কত বৎসরে যে কোন মূলধন বার্ষিক 6 % হারে সুদেমূলে দ্বিগুণিত হইবে?

4. 6605 টাকা বার্ষিক $3\frac{1}{4}$ % হারে সুদেমূলে $7678\frac{5}{16}$ টা. হইলে, সময় কত ?

5. বার্ষিক $3\frac{1}{4}$ % হারে 440 পা. 6 শি. 8 পে. কত বৎসরে সুদে-আসলে 511 পা. 17 শি. 9 পে. হইবে ?

---

6. সুদ-কষার বিবিধ প্রশ্ন।

উদা. 1. বার্ষিক 4 % হারে 6000 টাকা যে সময়ে সুদেমূলে 7200 টাকা হয়, কত টাকা বার্ষিক $4\frac{1}{2}$ % হারে সেই সময়ে সুদেমূলে 12250 টাকা হয় ?

4 % হারে 6000 টাকার মোট সুদ $= 7200 - 6000 = 1200$ টাকা।

কিন্তু 4 % হারে 6000 টাকার 1 বৎসরের সুদ $= 6000 \times \frac{4}{100} = 240$ টাকা।

$\therefore$ সময় $= (1200 \div 240)$ বৎসর $= 5$ বৎসর।

আবার, $4\frac{1}{2}$ % হারে 100 টাকার 5 বৎসরের সুদ $= \frac{9}{2} \times 5 = \frac{45}{2}$ টাকা,

সুতরাং $(100 + \frac{45}{2})$ বা $\frac{245}{2}$ টাকা সুদেমূলে হয়, যখন আসল হয় 100 টাকা,

অতএব 12250 টাকা সুদেমূলে হয়, যখন আসল হয়

$$\frac{100 \times 12250 \times 2}{245} \text{ টাকা} = 10000 \text{ টাকা।}$$

$\therefore$ নির্ণেয় আসল $= 10000$ টাকা।

উদা. 2. কোন মূলধনের 3 বৎসরের সবৃদ্ধিমূল 560 টাকা এবং 5 বৎসরের সবৃদ্ধিমূল 600 টাকা ; মূলধন ও বার্ষিক শতকরা সুদের হার কত ?

মূলধন + 5 বৎসরের সুদ $= 600$ টাকা,

মূলধন + 3 বৎসরের সুদ $= 560$ টাকা,

$\therefore$ বিয়োগ করিয়া, 2 বৎসরের সুদ $= 40$ টাকা,

$\therefore$ 3 বৎসরের সুদ $= \frac{40 \times 3}{2} = 60$ টাকা।

$\therefore$ মূলধন $= 560 - 60 = 500$ টাকা।

এখন, 500 টাকার 2 বৎসরের সুদ $= 40$ টাকা।

$\therefore$ 100 " 1 " " $= \frac{40}{5 \times 2}$ টাকা $= 4$ টাকা,

$\therefore$ নির্ণেয় সুদের হার $= 4$ %।

উদা. 3. একই হারে 150 টাকার 3 বৎসরের সুদ এবং 250 টাকার 5 বৎসরের সুদ একত্রে 85 টাকা হইলে, বার্ষিক শতকরা সুদের হার কত ?

150 টাকার 3 বৎসরের সুদ = (150 × 3) বা 450 টাকার 1 বৎসরের সুদ।

250 টাকার 5 বৎসরের সুদ = (250 × 5) বা 1250 টাকার 1 বৎসরের সুদ।

∴ (450 + 1250) বা 1700 টাকার 1 বৎসরের সুদ = 85 টাকা।

∴ 100 টাকার 1 বৎসরের সুদ = $\frac{85}{17}$ টাকা = 5 টাকা।

∴ নির্ণেয় বার্ষিক সুদের হার = 5 %।

প্রশ্নমালা 23

1. বার্ষিক 4 % হারে 5000 টাকার 5 বৎরের সুদ যত, কত সময়ে বার্ষিক 3 % হারে 4000 টাকার তত সুদ হইবে ?

2. যদি কোন টাকা 5 বৎসরে সুদেমূলে 1100 টাকা হয় এবং যদি সুদ মূলধনের $\frac{3}{8}$ হয়, তাহা হইলে মূলধন এবং বার্ষিক শতকরা সুদের হার নির্ণয় কর।

[ক. প্র. 1934]

3. 250 টাকার বার্ষিক 3 % হারে 6 বৎসরে যে সুদ হইবে, কত টাকার বার্ষিক 5 % হারে 4 বৎসরে সেই সুদ হইবে ?

4. বার্ষিক 5 % হারে 540 টাকার 8 বৎসরের সুদ বার্ষিক 6% হারে 900 টাকার কত সময়ের সুদের সমান ?

5. বার্ষিক 4 % হারে 625 টাকার 8 বৎসরের সুদ যত, বার্ষিক শতকরা কত হারে 800 টাকার 4 বৎসরের সুদ তত হইবে ?

6. কোন মূলধন 5 বৎসরে সুদেমূলে 2621·7 টাকা এবং 10 বৎসরে সুদেমূলে 3301·4 টাকা হয়। মূলধন ও বার্ষিক শতকরা সুদের হার নির্ণয় কর।

7. মূলধন ও 5 বৎসরের সুদ একত্রে 306 টাকা এবং সুদ, মূলধনের $\frac{9}{25}$. মূলধন ও বার্ষিক শতকরা সুদের হার নির্ণয় কর। [ঢা. বো. 1936]

8. **ক**, **খ**-কে 500 টাকা এবং **গ**-কে কিছু টাকা বার্ষিক 7 % হারে ধার দেয়। যদি সে 4 বৎসর পরে উভয়ের নিকট হইতে মোট 210 টাকা সুদ পাইয়া থাকে, তবে **গ**-কে কত টাকা ধার দেওয়া হইয়াছিল ?

9. $4\frac{1}{2}$ % হারে 1350 টাকা এবং 6 % হারে 1650 টাকা সরল সুদে খাটাইলে প্রতি বৎসর মোট মূলধনের গড়ে শতকরা কত সুদ হয় ?

10. কোন মূলধনের বার্ষিক 5 % হারে 9 মাসের সুদ উক্ত মূলধনেরই বার্ষিক 4 % হারে 1 বৎসর 3 মাসের সুদ অপেক্ষা 125 টাকা কম। মূলধন নির্ণয় কর।

11. কোন মূলধন 16 বৎসরে সুদেমূলে দ্বিগুণিত হয় ; কত বৎসরে একই হারে উহা ত্রিগুণিত হইবে ?

12. 400 টাকার 6 মাসের সুদ ও 750 টাকার 8 মাসের সুদ একত্রে 42 টাকা হইলে বার্ষিক শতকরা সুদের হার কত ?

13. 500 টাকার 6 মাসের সুদ ও 375 টাকার 10 মাসের সুদ একত্রে $22\frac{1}{2}$ টাকা ; বার্ষিক শতকরা সুদের হার নির্ণয় কর।

14. $6\frac{1}{4}$ বৎসর পরে কোন মূলধনের সুদ মূলধনের $\frac{5}{8}$ হইল। বার্ষিক শতকরা কত হারে সুদ ধরা হইয়াছিল ?

15. 4 বৎসর পরে কোন মূলধনের সুদ সবৃদ্ধিমূলের $\frac{1}{6}$ হইলে, বার্ষিক শতকরা সুদের হার কত ?

16. 9000 টাকা বার্ষিক 7 % হারে যে সময়ে সুদেমূলে 12150 টাকা হয়, কত টাকা বার্ষিক 4 % হারে সেই সময়ে সুদেমূলে 14400 টাকা হইবে ? [ক. প্র. 1941]

17. সুদের হার 4 % হইতে কমিয়া $3\frac{3}{4}$ % হওয়ায় এক ব্যক্তির বার্ষিক আয় 60 টাকা কমিয়া গেল ; ঐ ব্যক্তির মূলধন কত নির্ণয় কর। [ক. প্র. 1933]

18. কোন ব্যাঙ্ক জমার টাকার উপর বার্ষিক $1\frac{1}{2}$ % হারে সুদ দেয়। এক ব্যক্তি বৎসরের প্রথমে 350 টাকা জমা দেয়। 4 মাস পরে সে 50 টাকা তুলিয়া লয়। আরও 3 মাস পরে সে পুনরায় 160 টাকা জমা দেয়। বৎসরান্তে সে ব্যাঙ্ক হইতে কত সুদ পাইবে ?

একাদশ অধ্যায়

চক্রবৃদ্ধি

1. **চক্রবৃদ্ধি।** যদি উত্তমর্ণ এইরূপ শর্তে টাকা ধার দেয় যে নির্দিষ্ট সময়ান্তে (যেমন—1 বৎসর, 6 মাস, 3 মাস ইত্যাদি) নির্দিষ্ট হারে সুদের টাকা শোধ করিতে হইবে, অন্যথায় প্রথম কিস্তির সুদ আসলের সহিত যুক্ত হইয়া দ্বিতীয় কিস্তির প্রারম্ভে আসল বলিয়া গণ্য হইবে এবং নির্দিষ্ট হারে উক্ত বর্ধিত আসলের উপর দ্বিতীয় কিস্তির সুদ ধার্য হইবে। প্রতি কিস্তিতে দেয় সুদ পূর্ববর্তী কিস্তির অন্তে আসল বা বর্ধিত আসলের সহিত যুক্ত হইয়া আসল ক্রমশঃ বর্ধিত হইতে থাকে এবং বর্ধিত আসলের উপর পরবর্তী কিস্তির সুদ ধার্য করা হয়। উক্ত নিয়মে দেয় সুদকে **চক্রবৃদ্ধি** (Compound Interest) বলা হয়।

সরল সুদে আসল সর্বদাই স্থির থাকে অর্থাৎ আসল একটি ধ্রুবক রাশি কিন্তু চক্রবৃদ্ধিতে আসল ক্রমবর্ধমান অর্থাৎ চলরাশি।

মনে কর, বার্ষিক 5 % চক্রবৃদ্ধি সুদে এক ব্যক্তি 100 টাকা ধার করিল। তাহা হইলে 1 বৎসর পরে সুদের 5 টাকা আসল 100 টাকার সহিত যুক্ত হইয়া 105 টাকা দ্বিতীয় বৎসরের আদিতে আসল বলিয়া গণ্য হইবে এবং 5 % হারে 105 টাকার এক বৎসরের সুদ $105 \times \frac{5}{100} = 5 \cdot 25$ টাকা, 105 টাকার সহিত যুক্ত হইয়া 110·25 টাকা তৃতীয় বৎসরের আদিতে আসল বলিয়া গণ্য হইবে। পরবর্তী প্রতি বৎসরের জন্যই এই নিয়ম চলিবে।

চক্রবৃদ্ধিতে সুদ আদায়ের কিস্তি 1 বৎসর না হইয়া 6 মাস, 4 মাস, 3 মাস প্রভৃতিও হইতে পারে। কিস্তি 1 বৎসরের হইলে তাহার আর উল্লেখ থাকে না, কিন্তু অন্যরূপ হইলে তাহার স্পষ্ট উল্লেখ থাকে।

2. **চক্রবৃদ্ধি নির্ণয় প্রণালী ঃ** উদাহরণ দ্বারা চক্রবৃদ্ধি নির্ণয়ের প্রণালী প্রদর্শিত হইল। চক্রবৃদ্ধিতে দশমিকের ব্যবহার অধিকতর সুবিধাজনক।

উদা. 1. বার্ষিক 5 % হারে 400 টাকার 3 বৎসরের চক্রবৃদ্ধি নির্ণয় কর।

$5\% = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$

400 টাকা = প্রথম বৎসরের মূলধন।
400 ÷ 20 = 20 টাকা = প্রথম বৎসরের সুদ।
420 টাকা = দ্বিতীয় বৎসরের মূলধন।
420 ÷ 20 = 21 টাকা = দ্বিতীয় বৎসরের সুদ।
441 টাকা = তৃতীয় বৎসরের মূলধন।
441 ÷ 20 = 22·05 টাকা = তৃতীয় বৎসরের সুদ।
463·05 টাকা = চতুর্থ বৎসরের মূলধন।
= (মূলধন + 3 বৎসরের চক্রবৃদ্ধি)।

∴ নির্ণেয় চক্রবৃদ্ধি = 463·05 − 400 = 63·05 টাকা = 63 টা. 5 ন. প.।

উদা. 2. সুদ 6 মাস অন্তর দেয় হইলে বার্ষিক 8 % হারে 1000 টাকার 2 বৎসরের চক্রবৃদ্ধি কত ?

100 টাকার 1 বৎসরের সুদ 8 টাকা হইলে 6 মাসের সুদ 4 টাকা এবং 2 বৎসরে 6 মাসের কিস্তি 4টি।

$4\% = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}$।

1000 টাকা = প্রথম 6 মাসের মূলধন।
$\frac{1000}{25} =$ 40 টাকা = প্রথম 6 মাসের সুদ।
1040 টাকা = দ্বিতীয় 6 মাসের মূলধন।
$\frac{1040}{25} =$ 41·6 টাকা = দ্বিতীয় 6 মাসের সুদ।
1081·6 টাকা = তৃতীয় 6 মাসের মূলধন।
$\frac{1081{\cdot}6}{25} =$ 43·264 টাকা = তৃতীয় 6 মাসের সুদ।
1124·864 টাকা = চতুর্থ 6 মাসের মূলধন।
$\frac{1124{\cdot}864}{25} =$ 44·99456 টাকা = চতুর্থ 6 মাসের সুদ।
1169·85856 = মূলধন + 2 বৎসরের চক্রবৃদ্ধি।
1000 = প্রথম মূলধন।
169·85856 টাকা = 2 বৎসরের চক্রবৃদ্ধি।

∴ নির্ণেয় চক্রবৃদ্ধি = টা. 169·85856 = টা. 169·86 (প্রায়)
= 169 টা. 86 ন. প.।

উদা. 3. বার্ষিক $3\frac{1}{2}$ % হারে 1750 টাকার 3 বৎসরের চক্রবৃদ্ধি আসন্ন ন. প. পর্যন্ত নির্ণয় কর।

সুদের হার মিশ্র ভগ্নাংশ হইলে পূর্ণ সংখ্যা এবং ভগ্নাংশ পৃথক্ করিয়া একাংশের সাহায্যে চক্রবৃদ্ধি নির্ণয় করা সুবিধাজনক।

এস্থলে, $3\frac{1}{2} = 3 + \frac{1}{2}$।

1750 টাকা = প্রথম বৎসরের মূলধন।
52·5 = 3 % হারে সুদ। (17·50 × 3)
8·75 = $\frac{1}{2}$ % হারে সুদ। (17·50 ÷ 2)
1811·25 = দ্বিতীয় বৎসরের মূলধন।
54·3375 = 3 % হারে সুদ। (18·1125 × 3)
9·05625 = $\frac{1}{2}$ % হারে সুদ। (18·1125 ÷ 2)
1874·64375 = তৃতীয় বৎসরের মূলধন।
56·2393125 = 3 % হারে সুদ। (18·7464375 × 3)
9·37321875 = $\frac{1}{2}$ % হারে সুদ। (18·7464375 ÷ 2)
1940·25628125 = তৃতীয় বৎসরান্তে মূলধন + চক্রবৃদ্ধি।
1750 = প্রথম মূলধন
190·25628125 = চক্রবৃদ্ধি

∴ নির্ণেয় চক্রবৃদ্ধি = টা. 190·25628125 = টা. 190·26 = 190 টা. 26 ন. প.।

উদা. 4. বার্ষিক $3\frac{3}{4}$ % হারে 375·50 টাকার 2 বৎসর 3 মাসের চক্রবৃদ্ধি কত ?

এস্থলে, $3\frac{3}{4}$ % = $(3 + \frac{3}{4})$ %

2 বৎসর 3 মাস = $2\frac{1}{4}$ বৎসর = $(2 + \frac{1}{4})$ বৎসর।

375·50 টাকা = প্রথম বৎসরের মূলধন।
11·2650 টাকা = 3 % হারে সুদ। (3·7550 × 3)
2·81625 টাকা = $\frac{3}{4}$ % হারে সুদ। (11·265 ÷ 4)
389·58125 টাকা = দ্বিতীয় বৎসরের মূলধন।
11·68743…টাকা = 3 % হারে সুদ।
2·92185…টাকা = $\frac{3}{4}$ % হারে সুদ।
404·19053…টাকা = তৃতীয় বৎসরের মূলধন।
3·03142…টাকা = 3 % হারে $\frac{1}{4}$ বৎসরের সুদ।
·75785…টাকা = $\frac{3}{4}$ % হারে $\frac{1}{4}$ বৎসরের সুদ।
407·97980…টাকা

∴ নির্ণেয় চক্রবৃদ্ধি = 407·97980 − 375·5 = 32·47980 টাকা
= 32·48 টাকা = 32 টা. 48 ন. প.

8. চক্রবৃদ্ধি নির্ণয়ের সংক্ষিপ্ত প্রণালী। চক্রবৃদ্ধি-ঘটিত প্রশ্নে বৎসর পূর্ণ সংখ্যা হইলে পূর্বোক্ত দীর্ঘ প্রণালী অবলম্বন না করিয়া একটি সহজ স্থত্রের সাহায্যে চক্রবৃদ্ধি নির্ণয় করা যায়। স্থত্রটির মূল ব্যাখ্যা উদাহরণ দ্বারা প্রদর্শিত হইতেছে।

উদা. 5. 5 % হার স্থদে 400 টাকার 3 বৎসরের চক্রবৃদ্ধি আসন্ন টাকায় নির্ণয় কর।

(1) এখন, 400 টাকার 1 বৎসরের স্থদ $= 400 \times \frac{5}{100}$ টাকা।

$\therefore$ 1 বৎসরে 400 টাকার সবৃদ্ধিমূল $= 400 + 400 \times \frac{5}{100}$ টাকা

$= 400(1 + \frac{5}{100})$ টাকা

= দ্বিতীয় বৎসরের মূলধন।

(2) $\therefore$ দ্বিতীয় বৎসরের স্থদ $= 400(1 + \frac{5}{100}) \times \frac{5}{100}$

$\therefore$ দ্বিতীয় বৎসরের সবৃদ্ধিমূল $= 400(1 + \frac{5}{100}) + 400(1 + \frac{5}{100}) \times \frac{5}{100}$

$= 400(1 + \frac{5}{100})(1 + \frac{5}{100})$

$= 400(1 + \frac{5}{100})^2$

= তৃতীয় বৎসরের মূলধন।

(3) $\therefore$ তৃতীয় বৎসরের স্থদ $= 400(1 + \frac{5}{100})^2 \times \frac{5}{100}$

$\therefore$ তৃতীয় বৎসরের সবৃদ্ধিমূল

$= 400(1 + \frac{5}{100})^2 + 400(1 + \frac{5}{100})^2 \times \frac{5}{100}$

$= 400(1 + \frac{5}{100})^2(1 + \frac{5}{100}) = 400(1 + \frac{5}{100})^3$

$\therefore$ নির্ণেয় চক্রবৃদ্ধি $= 400(1 + \frac{5}{100})^3 - 400$

$= 400\{(1 + \frac{5}{100})^3 - 1\}$ টাকা

$= 63{\cdot}05$ টাকা $= 63$ টাকা 5 ন. প.।

উক্ত প্রশ্নে নির্ণেয় সমূলচক্রবৃদ্ধি $= 400(1 + \frac{5}{100})^3$

$$= \text{মূলধন} \left(1 + \frac{\text{স্থদের হার}}{100}\right)^{\text{বৎসর-সংখ্যা}}$$

এখন, মূলধন = মূ, স্থদের হার = হা এবং বৎসর = ব ধরা হইলে, সমূলচক্রবৃদ্ধি নির্ণয়ের স্থত্র হইবে :

$$\textbf{সমূল চক্রবৃদ্ধি} = \text{মূ} \times \left(1 + \frac{\text{হা}}{100}\right)^{\text{ব}}$$

সমূল চক্রবৃদ্ধি হইতে মূলধন বিয়োগ করিলেই চক্রবৃদ্ধি নির্ণীত হইবে।

উদা. 6. 6% হার সুদে 3 বৎসরে 500,000 টাকার সমূলচক্রবৃদ্ধি এবং চক্রবৃদ্ধি কত ?

নির্ণেয় সমূলচক্রবৃদ্ধি $= 500,000(1 + \frac{6}{100})^3$

$= 500,000 \times (1 \cdot 06)^3 = 595508$ টাকা।

এবং চক্রবৃদ্ধি $= (595508 - 500,000)$ টাকা $= 95508$ টাকা।

উদা. 7. 6 মাস অন্তর স্থদ দেয় হইলে, বার্ষিক 6% হার স্থদে 200 টাকার 2 বৎসর 6 মাসের চক্রবৃদ্ধি আসন্ন নয়া পয়সা পর্যন্ত নির্ণয় কর।

100 টাকার 1 বৎসরের স্থদ = 6 টা. ; $\therefore$ 100 টাকার 6 মাসের স্থদ = 3 টা.

এস্থলে প্রতি 6 মাস অন্তর স্থদ আসলের সহিত যুক্ত হইয়া মূলধন ও স্থদের সমষ্টি পরবর্তী 6 মাসের আসল বলিয়া গণ্য হইবে। 2 বৎসর 6 মাসে পাঁচটি 6 মাস। স্থতরাং

সমূল চক্রবৃদ্ধি $= 200(1 + \frac{3}{100})^5$ টাকা $= 200(1 \cdot 03)^5$ টাকা

$= 200 \times 1 \cdot 1592740443$ টাকা $= 231 \cdot 85481486$ টাকা

$\therefore$ নির্ণেয় চক্রবৃদ্ধি $= 31 \cdot 85$ টাকা $= 31$ টাকা 85 ন. প.

উদা. 8. 5% হার স্থদে 3 বৎসরে কোন টাকার সরল স্থদ ও চক্রবৃদ্ধির অন্তর 76 টা. 25 ন. প. ; টাকার পরিমাণ কত ? [ক. প্র. 1944]

যদি মূলধন 100 টাকা হয়, তাহা হইলে,

5% হারে 100 টাকার 3 বৎসরের সরল স্থদ = 15 টাকা,

এবং 100 টাকার চক্রবৃদ্ধি $= \{100(1 + \frac{5}{100})^3 - 100\}$ টাকা

$= (100 \times 1 \cdot 157625 - 100)$ টাকা

$= (115 \cdot 7625 - 100)$ টাকা

$= 15 \cdot 7625$ টাকা।

$\therefore$ চক্রবৃদ্ধি − সরল স্থদ $= (15 \cdot 7625 - 15)$ টাকা $= \cdot 7625$ টাকা।

এখন, উভয় স্থদের অন্তর ·7625 টাকা হয়, যখন মূলধন = 100 টাকা

$\therefore$,, ,, ,, 76·25 ,, ,, ,, ,, $= \frac{100 \times 76 \cdot 25}{\cdot 7625}$

$= 10000$ টাকা।

প্রশ্নমালা 24

1. বার্ষিক 5 % হারে 100 টাকার 2 বৎসরের চক্রবৃদ্ধি কত ?
2. বার্ষিক 5 % হারে 250 টাকার 2 বৎসরের চক্রবৃদ্ধি কত ?
3. বার্ষিক 4 % হারে 200 টাকার 3 বৎসরের চক্রবৃদ্ধি কত ?
4. বার্ষিক 6 % হারে 300 টাকার 3 বৎসরের চক্রবৃদ্ধি কত ?
5. বার্ষিক 5 % হারে 450 টাকার 3 বৎসরের চক্রবৃদ্ধি কত ?
6. বার্ষিক 4 % হারে 1000 টাকার 2 বৎসরের চক্রবৃদ্ধি কত ?
7. বার্ষিক 5 % হারে 1500 পাউণ্ডের 2 বৎসরের চক্রবৃদ্ধি কত ?
8. বার্ষিক $3\frac{1}{2}$ % হারে 300 টাকার 2 বৎসরের চক্রবৃদ্ধি কত ?
9. বার্ষিক $3\frac{3}{4}$ % হারে 550 পাউণ্ডের 3 বৎসরের চক্রবৃদ্ধি কত ?
10. বার্ষিক $6\frac{1}{4}$ % হারে 2000 টাকার 3 বৎসরের চক্রবৃদ্ধি কত ?
11. বার্ষিক 5 % হারে 750 টাকার 2 বৎসরের সমূল চক্রবৃদ্ধি কত ?
12. বার্ষিক 4 % হারে 1100 টাকার 2 বৎসরের সমূল চক্রবৃদ্ধি কত ?
13. বার্ষিক $2\frac{1}{2}$ % হারে 350 পাউণ্ডের 3 বৎসরের সমূল চক্রবৃদ্ধি কত ?
14. বার্ষিক $6\frac{1}{4}$ % হারে 880 পাউণ্ডের 2 বৎসরের সমূল চক্রবৃদ্ধি কত ?
15. বার্ষিক 4 % হারে 625 টাকা 50 নয়া পয়সার 2 বৎসরের সমূল চক্রবৃদ্ধি কত ?
16. বার্ষিক $3\frac{1}{2}$ % হারে 3 বৎসরের 1750 টাকার সমূল চক্রবৃদ্ধি আসন্ন টাকায় নির্ণয় কর।
17. বার্ষিক $12\frac{1}{2}$ % হারে এক লক্ষ টাকার 2 বৎসর 3 মাসের চক্রবৃদ্ধি কত ?
18. বার্ষিক $4\frac{4}{5}$ % হারে 5859375 টাকার 3 বৎসরের সমূল চক্রবৃদ্ধি কত ?
19. 6 মাস অন্তর সুদ দেয় হইলে, বার্ষিক 5 % হারে 500 টাকার $1\frac{1}{2}$ বৎসরের চক্রবৃদ্ধি কত ?
20. 3 মাস অন্তর সুদ দেয় হইলে, বার্ষিক 16 % হারে 525 টাকার 1 বৎসর 3 মাসের চক্রবৃদ্ধি কত ?
21. 4 মাস অন্তর সুদ দেয় হইলে, বার্ষিক 6 % হারে 600 পাউণ্ডের $1\frac{1}{3}$ বৎসরের চক্রবৃদ্ধি কত ?

22. বার্ষিক 5 % হারে 750 টাকার 3 বৎসরের সরল সুদ ও চক্রবৃদ্ধির অন্তর কত ?

23. কোন শহরের বর্তমান লোকসংখ্যা 12500000। যদি বৎসরে শতকরা 4 জন করিয়া লোক বাড়ে, তাহা হইলে 4 বৎসর পরে ঐ শহরের লোকসংখ্যা কত হইবে ?

24. 5000 টাকার 5 % হারে 4 বৎসরের চক্রবৃদ্ধি ও সরল সুদের অন্তর কত ?
[ক. প্র. 1949]

25. কত টাকার 5 % হার সুদে 2 বৎসরের সরল সুদ ও চক্রবৃদ্ধির অন্তর 15 টাকা ?

দ্বাদশ অধ্যায়

লাভ-ক্ষতি

1. এস্থলে লাভ-ক্ষতির শতকরা হিসাব বিষয়ক প্রশ্ন আলোচিত হইল।

কিছু উল্লেখ না থাকিলে লাভ ও ক্ষতি সর্বদাই ক্রয়মূল্যের উপর হিসাব করা হয়, বিক্রয়মূল্যের উপর নহে।

উদা. 1. একটি দ্রব্য 250 টাকায় ক্রয় করিয়া কত টাকায় বিক্রয় করিলে 10 % লাভ হইবে ?

10 % লাভে 100 টাকা মূল্যের দ্রব্যের বিক্রয়মূল্য = 110 টাকা,

∴ " 1 " " " " $= \frac{110}{100}$ টাকা,

∴ " 250 " " " " $= \frac{110 \times 250}{100}$ টাকা

$= 275$ টাকা।

উদা. 2. একটি সাইকেল 150 টাকায় ক্রয় করিয়া 180 টাকায় বিক্রয় করিলে শতকরা কত লাভ হইবে ?

মোট লাভ = 180 টা. − 150 টা. = 30 টাকা।

150 টাকায় লাভ = 30 টাকা।

∴ 1 " " = $\frac{30}{150}$ টাকা,

∴ 100 " " = $\frac{30 \times 100}{150}$ টাকা = 20 টাকা।

∴ নির্ণেয় লাভের হার 20 %।

উদা. 3. একটি ঘড়ি 120 টাকায় ক্রয় করিয়া 15 % লাভে বিক্রয় করা হইল ; ইহাতে লাভের পরিমাণ কত হইল ?

100 টাকায় লাভ = 15 টাকা,

∴ 1 " " = $\frac{15}{100}$ টাকা,

∴ 120 " " = $\frac{15 \times 120}{100}$ টাকা = 18 টাকা।

উদা. 4. একখানি গাড়ী 144 পাউণ্ডে বিক্রয় করায় 10 % ক্ষতি হইল ; গাড়ীখানির ক্রয়মূল্য কত ?

100 পাউণ্ড মূল্যের দ্রব্য 90 পাউণ্ডে বিক্রয় করিলে 10 % ক্ষতি হয়।

স্থতরাং বিক্রয়মূল্য 90 পাউণ্ড হইলে ক্রয়মূল্য = 100 পাউণ্ড,

∴ " 1 " " " = $\frac{100}{90}$ "

∴ " 144 " " " = $\frac{100 \times 144}{90}$ পাউণ্ড

= 160 পাউণ্ড।

উদা. 5. একটি ঘোড়া 450 টাকায় বিক্রয় করিলে 10 % ক্ষতি হয় ; কত টাকায় বিক্রয় করিলে 5 % লাভ হইত ?

প্রথম প্রণালী। 10 % ক্ষতিতে 100 টাকা ক্রয়মূল্যের জিনিসের বিক্রয়মূল্য 90 টাকা।

স্থতরাং বিক্রয়মূল্য 90 টা. হইলে, ক্রয়মূল্য = 100 টাকা,

∴ " 1 " " " = $\frac{100}{90}$ টাকা,

∴ " 450 " " " = $\frac{100 \times 450}{90}$ টাকা = 500 টাকা।

আবার, 5 % লাভে 100 টা. ক্রয়মূল্যের জিনিসের বিক্রয়মূল্য = 105 টাকা

∴ „ 1 „ „ „ „ $= \frac{105}{100}$ টাকা

∵ „ 500 „ „ „ „ $= \frac{105 \times 500}{100}$ টাকা

$= 525$ টাকা।

∴ নির্ণেয় বিক্রয়মূল্য = 525 টাকা।

দ্বিতীয় প্রণালী। 450 টাকায় ঘোড়াটি বিক্রয় করিলে 10 % ক্ষতি হয়, অর্থাৎ ক্রয়মূল্যের মাত্র 90 % আদায় হয়।

∴ ক্রয়মূল্যের 90 % = 450 টাকা,

∴ „ 1 % = $\frac{450}{90}$ „

∴ „ 105 % = $\frac{450 \times 105}{90}$ টাকা = 525 টাকা।

উদা. 6. 250 টাকায় একটি দ্রব্য বিক্রয় করিয়া কোন দোকানদার 20 % লাভ করিল ; 200 টাকায় ঐ দ্রব্যটি বিক্রয় করিলে শতকরা কত লাভ বা ক্ষতি হইত ?

250 টাকা = ক্রয়মূল্যের 120 %

∴ 1 টাকা = „ $\frac{120}{250}$ %

∴ 200 টাকা = „ $\frac{120 \times 200}{250}$ % = ক্রয়মূল্যের 96 %

∴ ক্ষতি = (100 − 96) % = 4 %।

উদা. 7. 10 আনায় 11-টি হিসাবে কমলালেবু ক্রয় করিয়া 11 আনায় 10-টি হিসাবে বিক্রয় করিলে শতকরা কত লাভ হইবে ?

10 আনায় পাওয়া যায় 11-টি লেবু।

∴ 100 „ „ „ 110-টি লেবু।

(অর্থাৎ 110-টির ক্রয়মূল্য = 100 আনা)

আবার 10-টির বিক্রয়মূল্য = 11 আনা,

∴ 110-টির „ $= \frac{11 \times 110}{10}$ আনা = 121 আনা।

∴ লাভ = (121 − 100) % = 21 %

উদা. 8. একটি দ্রব্য 8 % ক্ষতিতে বিক্রয় করা হইল কিন্তু বিক্রয়মূল্য 160 টা. বেশী হইলে 8 % লাভ হইত। দ্রব্যটির ক্রয়মূল্য কত ?

বিক্রয়মূল্য 160 টাকা বেশী হইলে ক্রয়মূল্যের 8 % ক্ষতি পূরণ হইয়া আরও 8 % লাভ হইত। ইহা হইতে বুঝা যাইতেছে,

ক্রয়মূল্যের 16 % = 160 টাকা।

∴ ক্রয়মূল্য $= \frac{160 \times 100}{16}$ টাকা = 1000 টাকা।

উদা. 9. কোন ব্যবসায়ী দ্রব্যাদি ক্রয় করিবার সময় বিক্রেতাকে ঠকাইয়া 10 % মাল বেশী লয় ; আবার বিক্রয় করিবার সময় ক্রেতার নিকট হইতে 10 % মূল্য বেশী আদায় করে। ইহাতে তাহার শতকরা কত লাভ হয় ?

ব্যবসায়ী 100 টাকা দিয়া 110 টাকায় জিনিস ক্রয় করে। আবার, বিক্রয়কালে 100 টাকার জিনিস দিয়া 110 টাকা লয়।

∴ 100 টাকার জিনিস বিক্রয় করে 110 টাকায়,

∴ 110 " " " " $\frac{110 \times 110}{100} = 121$ টাকায়।

অর্থাৎ যে জিনিস সে 100 টাকায় কিনিয়াছিল তাহা 121 টাকায় বিক্রয় করে।

∴ লাভ = 21 %

উদা. 10. কোন লোক একটি দ্রব্য ক্রয় করিয়া 6 % লাভে বিক্রয় করিল। ক্রয়মূল্য 4 % কম এবং বিক্রয়মূল্য $2\frac{3}{8}$ টাকা বেশী হইলে, তাহার 12 % লাভ হইত। সে কত মূল্যে দ্রব্যটি ক্রয় করিয়াছিল ? [ক. প্র. 1944]

দ্রব্যটির ক্রয়মূল্য 100 টাকা হইলে 6 % লাভে বিক্রয়মূল্য হয় 106 টাকা।

4 % কমে দ্রব্যটির ক্রয়মূল্য হইত 96 টাকা।

12 % লাভে 96 টা. মূল্যের দ্রব্যটির বিক্রয়মূল্য হইত $\frac{96 \times 112}{100}$ টা. $= \frac{2688}{25}$ টা.।

∴ পূর্বাপেক্ষা বিক্রয়মূল্য বেশী হইত $(\frac{2688}{25} - 106)$ টাকা $= \frac{38}{25}$ টাকা।

সুতরাং বিক্রয়মূল্য $\frac{38}{25}$ টাকা বেশী হয় 100 টাকার দ্রব্যে,

∴ " $2\frac{3}{8}$ বা $\frac{19}{8}$ টাকা বেশী হয় $100 \times \frac{25}{38} \times \frac{19}{8}$

$= \frac{625}{4} = 156\frac{1}{4}$ টাকার দ্রব্যে।

∴ দ্রব্যটির ক্রয়মূল্য $= 156\frac{1}{4}$ টাকা।

উদা. 11. ঘোড়া সমেত একখানি গাড়ীর মূল্য 1300 টাকা। ঘোড়ার মূল্য 25 % এবং গাড়ীর মূল্য 15 % বাড়িলে মোট মূল্য হইত 1555 টাকা। ঘোড়া ও গাড়ীর পৃথক্ মূল্য নির্ণয় কর।

ঘোড়া ও গাড়ী উভয়ের মূল্য 15 % বাড়িলে মোট মূল্য হইত 1300 টাকা + 1300 টাকার 15 % = 1300 টাকা + 195 টাকা = 1495 টাকা।

সুতরাং, 1555 টা. – 1495 টা. = 60 টা. = ঘোড়ার মূল্যের (25 – 15)% বা 10%

অর্থাৎ ঘোড়ার মূল্যের 10 % বা $\frac{1}{10}$ = 60 টা. ∴ ঘোড়ার মূল্য = 600 টা.

∴ গাড়ীর মূল্য = (1300 – 600) টাকা = 700 টাকা।

উদা. 12. কোন ঘড়িওয়ালা মূল্য-তালিকায় প্রত্যেক ঘড়ির মূল্য 25 % বর্ধিত করিয়া রাখে; এবং বিক্রয়কালে ক্রেতাকে 10 % কমিশন দেয়। ইহাতে তাহার শতকরা কত লাভ হয়?

মনে কর একটি ঘড়ির প্রকৃত মূল্য = 100 টাকা,

সুতরাং উহার তালিকা মূল্য = 125 টাকা;

কিন্তু 100 টাকায় কমিশন = 10 টাকা;

∴ 125 " " $=\frac{10\times125}{100}=12\frac{1}{2}$ টাকা।

সুতরাং কমিশন বাদে প্রকৃত বিক্রয়মূল্য = $(125-12\frac{1}{2})$ টাকা = $112\frac{1}{2}$ টাকা

∴ লাভ = $12\frac{1}{2}$ %

প্রশ্নমালা 25

1. 40 টাকায় একটি দ্রব্য ক্রয় করিয়া 46 টাকায় বিক্রয় করিলে শতকরা কত লাভ হয়?

2. 30 টাকায় একটি দ্রব্য ক্রয় করিয়া 27 টাকায় বিক্রয় করিলে শতকরা কত ক্ষতি হয়?

3. 2 টা. 40 নয়া পয়সাতে কোন দ্রব্য ক্রয় করিয়া কত মূল্যে বিক্রয় করিলে 5 % লাভ হয়?

4. 225 টাকায় একটি ঘোড়া বিক্রয় করিয়া এক ব্যক্তি 25 % লাভ করিল; ঘোড়াটির ক্রয়মূল্য কত?

5. 270 টাকায় কোন দ্রব্য বিক্রয় করায় 10 % ক্ষতি হয় ; দ্রব্যটির ক্রয়মূল্য কত ?

6. 630 টাকায় একখানি গাড়ী বিক্রয় করিয়া $12\frac{1}{2}$ % ক্ষতি হইল ; কত টাকায় বিক্রয় করিলে 10 % লাভ হইত ?

7. 690 টাকায় একখানি গাড়ী বিক্রয় করিয়া এক ব্যক্তি 15 % লাভ করিল ; 540 টাকায় বিক্রয় করিলে তাহার শতকরা কত লাভ বা ক্ষতি হইত ?

8. টাকায় 10-টি করিয়া আম ক্রয় করিয়া টাকায় 8-টি করিয়া বিক্রয় করিলে, শতকরা কত লাভ হইবে ?

9. 28 টাকায় একটি জিনিস ক্রয় করিয়া কত মূল্যে বিক্রয় করিলে $6\frac{1}{4}$ % লাভ হয় ?

10. 220 টাকায় একখানি সাইকেল বিক্রয় করিয়া 12 % ক্ষতি হইল ; সাইকেলটির খরিদমূল্য কত ?

11. 800 টাকায় একটি ঘোড়া বিক্রয় করাতে 25 % লাভ হইল। 560 টাকায় বিক্রয় করিলে শতকরা কত লাভ বা ক্ষতি হইত ?

12. একটি ঘড়ি 60 টাকায় বিক্রয় করিলে 15 % লোকসান হয় ; কত টাকায় বিক্রয় কলিলে 10 % লাভ হইবে ? [ক. প্র. 1927]

13. 240 টাকায় একটি জিনিস বিক্রয় করিলে কোন ব্যবসায়ীয় 25 % লাভ হয়। 216 টাকায় বিক্রয় করিলে তাহার শতকরা কত লাভ হইত ?

14. এক ব্যক্তি 375 টাকায় 300 গজ কাপড় কিনিয়া $1\frac{1}{2}$ টাকা গজ দরে 200 গজ এবং 1 টাকা গজ দরে অবশিষ্ট কাপড় বিক্রয় করিল। ইহাতে তাহার শতকরা কত লাভ বা লোকসান হইল ? [ছাত্র. 1870]

15. 10 আনায় 12-টি দরে কমলালেবু বিক্রয় করিয়া এক ফেরিওয়ালার 10 % ক্ষতি হইল। 12 আনায় 10-টি দরে বিক্রয় করিলে তাহার শতকরা কত লাভ হইত ?

16. 390 টাকায় একখানি গাড়ী বিক্রয় করিয়া এক ব্যক্তির ক্রয়মূল্যের $\frac{1}{40}$ ক্ষতি হইল ; 450 টাকায় বিক্রয় করিলে তাহার শতকরা কত লাভ বা ক্ষতি হইত ?

17. 20 % লাভে **খ**-এর নিকট **ক** একটি জিনিস বিক্রয় করিল। **খ** তাহার ক্রয়মূল্যের $\frac{1}{20}$ লাভে **গ**-এর নিকট উহা বিক্রয় করিল। **গ**-এর ক্রয়মূল্য 3 পা. 10 শি. হইলে, **ক** কত মূল্যে জিনিসটি ক্রয় করিয়াছিল ?

18. কোন দোকানদার 900 টাকায় $250\frac{3}{4}$ গজ কাপড় খরিদ করিল এবং উহাতে 103 টাকা অন্যান্য খরচ লাগিল ; প্রতি গজ কত দরে বিক্রয় করিলে তাহার 50 % লাভ হইবে ? [ক. প্র. 1859]

19. একখানি বাড়ী 600 টাকায় বিক্রয় করায় এক ব্যক্তির কিছু ক্ষতি হয়। সে যদি এই বাড়ী 800 টাকায় বিক্রয় করিতে পারিত তাহা হইলে উক্ত ক্ষতির $\frac{2}{3}$ লাভ থাকিত। বাড়ীর প্রকৃত মূল্য কত ? [বর্ধমান—মধ্য ছাত্র. 1921]

20. 4000 টাকায় একখানি বাড়ী বিক্রয় করায় এক ব্যক্তির কিছু ক্ষতি হইল ; যদি সে ঐ বাড়ীখানি 5000 টাকায় বিক্রয় করিত তাহা হইলে পূর্বোক্ত ক্ষতির তিন-পঞ্চমাংশ লাভ হইত। বাড়ীখানির মূল্য কত ?

21. 2576 পাউণ্ডে একটি ঘোড়া বিক্রয় করাতে কোন লোকের 12 % লাভ হইল ; ঘোড়াটির ক্রয়মূল্য 100 পাউণ্ড কম হইলে তাহার শতকরা কত লাভ হইত ?

22. কোন ব্যক্তি একটি গরু 10 % ক্ষতিতে বিক্রয় করিল। গরুটির বিক্রয়মূল্য আরও 9 টাকা বেশী হইলে তাহার 12 % লাভ হইত। গরুটির ক্রয়মূল্য কত ?

23. আনায় 4-টি ও আনায় 3-টি হিসাবে সমসংখ্যক কলা ক্রয় করিয়া 2 আনায় 7-টি হিসাবে বিক্রয় করিলে শতকরা কত লাভ বা ক্ষতি হইবে ?

24. দ্রব্যনির্মাতা দোকানদারকে এবং দোকানদার ক্রেতাকে 10 % লাভে জিনিস বিক্রয় করে। ক্রেতা কোন দ্রব্য 605 পাউণ্ডে ক্রয় করে। এই ক্রয়মূল্য দ্রব্যের উৎপাদন ব্যয় হইতে কত বেশী ? [ক. প্র. 1931]

25. কোন ব্যবসায়ী 100 মণ শস্য খরিদ করিয়া, 9 টাকা মণ দরে 50 মণ বিক্রয় করিল এবং ইহাতে তাহার $7\frac{1}{2}$ % ক্ষতি হইল। বাকী শস্য প্রতিমণ কত দরে বিক্রয় করিলে মোটের উপর তাহার 10 % লাভ হইবে ? [পাঞ্জাব প্র. 1887]

26. একটি দ্রব্য কোন নির্দিষ্ট বিক্রয়মূল্যের দুই-তৃতীয়াংশ মূল্যে বিক্রয় করায় 20 % ক্ষতি হইল। ঐ নির্দিষ্ট মূল্যে বিক্রয় করিলে শতকরা কত লাভ হইত ?

27. 4 শিলিং এবং 3 শি. 6 পে. পাউণ্ড দরের চা সমপরিমাণে মিশ্রিত করিয়া প্রতি পাউণ্ড কত দরে বিক্রয় করিলে 20 % লাভ হইবে ? [ক. প্র. 1930]

28. কোন লোক $7\frac{1}{2}$ % ক্ষতিতে একটি গরু বিক্রয় করিল। কিন্তু গরুটি আর 20 টাকা অধিক মূল্যে বিক্রয় হইলে তাহার $12\frac{1}{2}$ % লাভ হইত। গরুটির ক্রয়মূল্য কত ?

29. আট আনা করিয়া লেবুর কুড়ি ক্রয় করিয়া 7 টাকায় কয়টি লেবু বিক্রয় করিলে 40 % লাভ হইবে? [ঢাকা বোর্ড, 1933]

30. কোন লোক 600 টাকায় একটি ঘোড়া বিক্রয় করিল। ইহাতে তাহার বিক্রয়মূল্যের $\frac{1}{5}$ লাভ হইল। কত টাকায় বিক্রয় করিলে বিক্রয়মূল্যের $\frac{1}{4}$ ক্ষতি হইত?

31. কোন ব্যবসায়ী ক্রয়মূল্যের উপর 60 % লাভ রাখিয়া জিনিসের মূল্য নির্ধারিত করে, কিন্তু ক্রেতাকে 15 % কমিশন দেয়। প্রকৃতপক্ষে তাহার শতকরা কত লাভ হয়? [পাটনা, 1932]

32. এক ব্যক্তি 24 গজ কাপড় বিক্রয় করিয়া 6 গজের ক্রয়মূল্যের সমান লাভ করিল ; ইহাতে তাহার শতকরা কত লাভ হইল?

33. এক ব্যক্তি 24 গজ কাপড় বিক্রয় করিয়া 6 গজের বিক্রয়মূল্যের সমান লাভ করিল ; ইহাতে তাহার শতকরা কত লাভ হইল?

34. এক ব্যক্তি 24 গজ কাপড় যে মূল্যে ক্রয় করিয়াছিল, 20 গজ সেই মূল্যে বিক্রয় করিল ; ইহাতে তাহার শতকরা কত লাভ হইল?

35. কোন লোক প্রতি গ্যালন 5 শিলিং দরে মদ্য ক্রয় করিয়া জল মিশ্রিত করিল এবং জলমিশ্রিত মদ্য প্রতি গ্যালন 4 শিলিং দরে বিক্রয় করিয়া $12\frac{1}{2}$ % লাভ করিল। মিশ্রিত মদ্যের প্রতি গ্যালনে কত জল ছিল? [ক. প্র. 1903]

36. কোন দোকানদার ক্রেতাকে 5 % কমিশন দেয়। যে দ্রব্যের ক্রয়মূল্য 712 টা. 8 আ. তাহার মূল্য কত নির্ধারিত করিলে তাহার $33\frac{1}{3}$ % লাভ হইবে?

37. কোন দ্রব্য 12 % ক্ষতিতে বিক্রয় করিলে যে মূল্য পাওয়া যায়, 8 % লাভে বিক্রয় করিলে তদপেক্ষা 5 টা. বেশী পাওয়া যায়। দ্রব্যটির ক্রয়মূল্য কত?

38. কোন ক্রিকেট খেলায় একজন কণ্ট্রাক্টর 24 জন খেলোয়াড়কে খাদ্য দিবার ভার নেন। $12\frac{1}{2}$ % লাভ রাখিয়া তিনি খাদ্যদ্রব্যের মূল্য স্থির করেন, কিন্তু 3 জন লোক অনুপস্থিত হন এবং বাকী 21 জন নির্ধারিত মূল্য দেন ; ইহাতে কণ্ট্রাক্টরের 2 টাকা লোকসান হয়। প্রত্যেক লোকের খাদ্যের জন্য কত মূল্য নির্ধারিত হইয়াছিল?

39. 100 খানি পুস্তক ক্রয় করিয়া প্রত্যেকখানি 3 টা. 50 ন. প. দরে 50 খানি এবং বাকীগুলি ক্রয়মূল্যে বিক্রয় করিয়া কোন পুস্তকবিক্রেতা মোটের উপর 20 % লাভ করিল। প্রতি পুস্তকের ক্রয়মূল্য কত ?

40. একটি দ্রব্য 12 % লাভে বিক্রয় করা হইল। যদি উহার ক্রয়মূল্য 10 % কম এবং বিক্রয়মূল্য 2 টা. 50 ন. প. বেশী হইত, তবে 30 % লাভ হইত। দ্রব্যটির ক্রয়মূল্য কত ?

41. এক ব্যক্তি একটি দ্রব্য 10 % ক্ষতিতে বিক্রয় করিল। যদি তাহার ক্রয়মূল্য 20 % কম এবং বিক্রয়মূল্যও $\frac{3}{16}$ টাকা কম হইত, তবে তাহার $6\frac{1}{4}$ % লাভ হইত। দ্রব্যটির ক্রয়মূল্য কত ?

42. এক ব্যক্তি একটি ঘোড়া ও একটি গরু মোট 650 টাকায় ক্রয় করিল। $12\frac{1}{2}$ % লাভে ঘোড়া এবং 10 % ক্ষতিতে গরু বিক্রয় করিয়া সে মোট 52 টাকা লাভ করিল। ঘোড়ার ক্রয়মূল্য কত ?

43. এক ব্যক্তি প্রত্যেকটি 7920 টাকা দরে দুইটি বাড়ী বিক্রয় করিল। একটিতে তাহার 10 % লাভ এবং অপরটিতে 10 % ক্ষতি হইল ; তাহার মোট কত টাকা লাভ বা ক্ষতি হইল ?

ত্রয়োদশ অধ্যায়

অনুপাত ও সমানুপাত

1. অনুপাত। এক রাশির সহিত তজ্জাতীয় অপর একটি রাশির পরস্পর সম্বন্ধকে অনুপাত (Ratio) বলে। একটি রাশি ঐ জাতীয় অপর একটি রাশির কত অংশ বা কত গুণ ইহা অনুপাত দ্বারা প্রকাশ করা হয়। 3 টাকার সহিত 4 টাকার অনুপাত কত ইহা বুঝাইতে 3 টাকা, 4 টাকার কত ভগ্নাংশ ইহাই বুঝায়। আবার, 3 টাকাকে 4 টাকার ভগ্নাংশে প্রকাশ করিলে উত্তর হয় $\frac{3}{4}$ ($\frac{3}{4}$ টাকা নহে)। সুতরাং 3 টাকার সহিত 4 টাকার অনুপাত $=\frac{3 \text{ টাকা}}{4 \text{ টাকা}}=\frac{3}{4}$. দুইটি রাশির মধ্যে ' : ' এইরূপ চিহ্ন দ্বারা অনুপাত প্রকাশ করা হয়। অতএব 3 টাকা : 4 টাকা $=\frac{3 \text{ টাকা}}{4 \text{ টাকা}}=\frac{3}{4}$.

' : ' এই চিহ্নটি প্রকৃতপক্ষে পূর্ণ ভাগ চিহ্নের (÷) সংক্ষিপ্ত আকার।

এক জাতীয় দুইটি মিশ্র রাশি যদি বিভিন্ন এককে প্রকাশিত হয় তাহা হইলে উহাদের অনুপাত নির্ণয় করিতে হইলে মিশ্র রাশি দুইটিকে একই এককে পরিণত করিয়া লইতে হয়। 60 নয়া পয়সার সহিত 2 টাকার অনুপাত কত নির্ণয় করিতে হইলে 2 টাকাকে নয়া পয়সায় পরিবর্তিত করিয়া অথবা 60 নয়া পয়সাকে টাকায় পরিবর্তিত করিয়া লইতে হয়।

∴ 60 নয়া পয়সার সহিত 2 টাকার অনুপাত = 60 ন. প. : 200 ন. প. $\frac{60}{200}=\frac{3}{10}$ অথবা, 60 ন. প. : 2 টাকা $=\frac{60}{100}$ টাকা : 2 টাকা $=\frac{60}{100\times2}=\frac{3}{10}$.

2. দুইটি বদ্ধ বা মিশ্র রাশির অনুপাত গঠিত হইবার পরই উহা আর মিশ্র রাশি বা বদ্ধ সংখ্যা থাকে না—শুদ্ধ সংখ্যা হইয়া যায়। সুতরাং 3 টাকা : 4 টাকা, 3 মণ : 4 মণ, 6 ফুট : 8 ফুট এই তিনটি অনুপাত পরস্পর সমান, কারণ প্রত্যেক অনুপাতই $\frac{3}{4}$ এই ভগ্নাংশের সমান।

আর একটি বিষয় স্মরণ রাখা বিশেষ প্রয়োজন যে, দুইটি রাশির অনুপাত কোন ভগ্নাংশ দ্বারা প্রকাশ করা হইলে বুঝিতে হইবে যে ভগ্নাংশটির লব ও হরের সংখ্যা যত যত কোন নির্দিষ্ট এককের তত তত গুণ রাশি দুইটির সমান। 20 টাকা : 30 টাকা $= 20 : 30 = \frac{2}{3}$; এস্থলে 10 টাকা একক ধরিলে 10 টাকার 2 গুণ = 20 টাকা = প্রথম রাশি, এবং 10 টাকার 3 গুণ = 30 টাকা = দ্বিতীয় রাশি। দুইটি বালকের বয়সের অনুপাত 3 : 4, ইহার অর্থ এই যে কোন নির্দিষ্ট এককের 3 গুণ ও 4 গুণ বালক দুইটির বয়স। 1 বৎসর একক ধরিলে উহাদের বয়স হইবে 3 বৎসর ও 4 বৎসর ; 2 বৎসর একক ধরিলে বয়স হইবে 6 বৎসর ও 8 বৎসর ; 5 বৎসর একক ধরিলে বয়স হইবে 15 বৎসর ও 20 বৎসর।

3. যে দুইটি রাশির অনুপাত গঠিত হয় তাহাদের প্রথমটিকে **পূর্ব রাশি** (Antecedent) এবং দ্বিতীয়টিকে **উত্তর রাশি** (Consequent) বলে। 3 : 4—এস্থলে 3 পূর্ব রাশি, 4 উত্তর রাশি। পূর্ব রাশি ও উত্তর রাশিকে অনুপাতের **পদ** (Terms of the ratio) বলে। 3 টাকা : 4 টাকা—এস্থলে 3 টাকা ও 4 টাকা অনুপাতের পদ।

ভগ্নাংশের লব ও হর উভয়কেই একই সংখ্যা দ্বারা গুণ বা ভাগ করিলে যেমন ভগ্নাংশের মানের কোন পরিবর্তন হয় না, অনুপাতেরও পূর্ব রাশি ও উত্তর রাশি উভয় পদকে একই সংখ্যা দ্বারা গুণ বা ভাগ করিলে অনুপাতের মানের কোন পরিবর্তন হয় না। যথা—

$3 : 4 = (3 \times 5) : (4 \times 5) = 15 : 20$; $10 : 14 = (10 \div 2) : (14 \div 2) = 5 : 7.$

কোন অনুপাতের পদ দুইটি সমান হইলে তাহাকে **সাম্যানুপাত** (Ratio of equality) এবং পদ দুইটি অসমান হইলে **বৈষম্যানুপাত** (Ratio of inequality) বলে। কোন অনুপাতের পূর্ব রাশি উত্তর রাশি অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে তাহাকে **গুরু বৈষম্যানুপাত** (Ratio of greater inequality) এবং পূর্ব রাশি উত্তর রাশি অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইলে তাহাকে **লঘু বৈষম্যানুপাত** (Ratio of less inequality) বলে। 1 : 1, 3 : 3, 5 : 5 ইত্যাদি সাম্যানুপাত, 6 : 5, 7 : 4, 8 : 3 ইত্যাদি গুরু বৈষম্যানুপাত এবং 1 : 2, 6 : 7, 9 : 20 ইত্যাদি লঘু বৈষম্যানুপাত।

4. কোন অনুপাতের পূর্ব রাশি ও উত্তর রাশিকে যথাক্রমে উত্তর রাশি ও পূর্ব রাশি রূপে লিখিলে যে অনুপাত উৎপন্ন হয় তাহাকে প্রথম অনুপাতটির **ব্যস্ত** বা **বিপরীত অনুপাত** (Inverse ratio or reciprocal) বলে। যথা—2 : 3 অনুপাতের ব্যস্ত অনুপাত 3 : 2.

5. দুই বা ততোধিক অনুপাতের পূর্ব রাশিসমূহের ক্রমিক গুণফলকে পূর্ব রাশি এবং উত্তর রাশিসমূহের ক্রমিক গুণফলকে উত্তর রাশিরূপে লিখিলে যে অনুপাত উৎপন্ন হয় তাহাকে প্রদত্ত অনুপাতসমূহের **মিশ্র** বা **যৌগিক অনুপাত** (Compound ratio) বলে। যথা—2 : 3, 3 : 4, 5 : 6 অনুপাত তিনটির যৌগিক অনুপাত হইবে $(2 \times 3 \times 5) : (3 \times 4 \times 6)$ বা 5 : 12.

6. **সমানুপাত।** চারিটি রাশি যদি এরূপ সম্বন্ধযুক্ত হয় যে প্রথম ও দ্বিতীয় রাশির অনুপাত তৃতীয় ও চতুর্থ রাশির অনুপাতের সমান, তবে প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয় ও চতুর্থ রাশি **সমানুপাত** (Proportion) উৎপন্ন করে এবং উহাদিগকে **সমানুপাতী** (Proportional) বলা হয়, অর্থাৎ দুইটি অনুপাত পরস্পর সমান হইলে অনুপাত দুইটির চারিটি পদ সমানুপাতী। 2 টাকা : 3 টাকা = 6 ফুট : 9 ফুট, কারণ উভয় অনুপাতের মান $\frac{2}{3}$; সুতরাং 2 টাকা, 3 টাকা, 6 ফুট, 9 ফুট ইহারা সমানুপাতী। সমানুপাতে '=' চিহ্নের পরিবর্তে সাধারণতঃ ' : : ' এই চিহ্ন ব্যবহৃত হয়।

প্রত্যেক অনুপাতের দুইটি পদ এক জাতীয় হওয়া প্রয়োজন। সুতরাং চারিটি রাশি সমানুপাতী হইলে, প্রথম দুই পদ এক জাতীয় রাশি এবং শেষের দুই পদ অন্য জাতীয় রাশি হইতে পারে ; কারণ, অনুপাত গঠিত হইবার পরই উহা শুদ্ধ সংখ্যা ব্যতীত আর কিছুই হইতে পারে না।

সমানুপাতের প্রথম ও চতুর্থ রাশিকে **অন্ত্য** (Extreme) রাশি, দ্বিতীয় ও তৃতীয় রাশিকে **মধ্যরাশি** বা **মধ্যক** (Mean) এবং চতুর্থ রাশিকে প্রথম তিন রাশির **চতুর্থ সমানুপাতী** (Fourth proportional) বলে। 2 : 3 : : 6 : 9 ; এস্থলে 2 ও 9 অন্ত্য রাশি, 3 ও 6 মধ্যক এবং 9 চতুর্থ সমানুপাতী।

চারিটি শুদ্ধ সংখ্যা সমানুপাতী হইলে **প্রান্তীয় সংখ্যাদ্বয়ের গুণফল মধ্যকদ্বয়ের গুণফলের সমান।**

2 : 3 : : 6 : 9 বলিয়া $2 \times 9 = 18 = 3 \times 6$.

7. তিনটি এক জাতীয় রাশি যদি এরূপ সম্বন্ধযুক্ত হয় যে প্রথম ও দ্বিতীয় রাশির অনুপাত, দ্বিতীয় ও তৃতীয় রাশির অনুপাতের সমান, তাহা হইলে রাশি তিনটিকে **ক্রমিক সমানুপাতী** (In continued proportion) বলে এবং দ্বিতীয় রাশিকে **মধ্য-সমানুপাতী** (Mean proportional) ও তৃতীয় রাশিকে প্রথম দুই রাশির **তৃতীয় সমানুপাতী** (Third proportional) বলে।

4, 12, 36 সংখ্যা তিনটি ক্রমিক সমানুপাতী, কারণ 4 : 12 : : 12 : 36. এস্থলে 4 ও 36 এর মধ্য-সমানুপাতী 12 এবং 4 ও 12 এর তৃতীয় সমানুপাতী 36.

উদা. 1. 2·25 টাকা : 3·50 টাকা এর মান লঘিষ্ঠ আকারে প্রকাশ কর।

$$\text{টা. } 2{\cdot}25 : \text{টা. } 3{\cdot}50 = \frac{\text{টা. } 2{\cdot}25}{\text{টা. } 3{\cdot}50} = \frac{225 \text{ ন. প.}}{350 \text{ ন. প.}} = \frac{225}{350} = \frac{9}{14} = 9 : 14.$$

উদা. 2. দুইটি রাশির অনুপাত 3 : 4; পূর্ব রাশিটি 27 হইলে উত্তর রাশিটি কত ?

$$\frac{27}{\text{উত্তর রাশি}} = \frac{3}{4} = \frac{3\times 9}{4\times 9} = \frac{27}{36}.$$

$\therefore$ উত্তর রাশি = 36.

উদা. 3. 4, 6 ও 9 এর চতুর্থ সমানুপাতী নির্ণয় কর।

4 : 6 : : 9 : নির্ণেয় সংখ্যা ; $\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা $= \frac{6\times 9}{4} = \frac{27}{2} = 13\frac{1}{2}$.

উদা. 4. $\frac{2}{3}$ ও $\frac{1}{2}$ এর তৃতীয় সমানুপাতী নির্ণয় কর।

$\frac{2}{3} : \frac{1}{2} : : \frac{1}{2}$: নির্ণেয় সংখ্যা ;

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা $= (\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}) \div \frac{2}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{8}$.

উদা. 5. 7 ও 175 এর মধ্য-সমানুপাতী নির্ণয় কর।

7 : নির্ণেয় সংখ্যা : : নির্ণেয় সংখ্যা : 175 ;

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যার বর্গ $= 7 \times 175$;

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা $= \sqrt{7\times 175} = \sqrt{1225} = 35$.

উদা. 6. ক, খ, গ, ঘ চারিটি সংখ্যার মধ্যে **ক** ও **খ** এর অনুপাত 2 : 3, **খ** ও **গ** এর অনুপাত 3 : 4 এবং **গ** ও **ঘ** এর অনুপাত 4 : 5. **ক** ও **ঘ** এর অনুপাত কত ?

$$\frac{\text{ক}}{\text{খ}}=\frac{2}{3},\quad \frac{\text{খ}}{\text{গ}}=\frac{3}{4},\quad \frac{\text{গ}}{\text{ঘ}}=\frac{4}{5}$$

$$\therefore\ \frac{\text{ক}}{\text{খ}}\times\frac{\text{খ}}{\text{গ}}\times\frac{\text{গ}}{\text{ঘ}}=\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5},\ \text{অথবা}\ \frac{\text{ক}}{\text{ঘ}}=\frac{2}{5}\quad\therefore\ \text{ক} : \text{ঘ}=2:5.$$

8. এক জাতীয় কতিপয় রাশির পরস্পর সম্বন্ধ বুঝাইবার জন্য রাশিসমূহকে অনুপাতের চিহ্ন দ্বারা যুক্ত করিয়া প্রকাশ করা যাইতে পারে।

উদা. 7. ক : খ = 2 : 3, খ : গ = 5 : 6, গ : ঘ = 8 : 9 হইলে ক, খ, গ, ঘ এর ক্রমিক অনুপাত নির্ণয় কর।

ক : খ = 2 : 3,

খ : গ = 5 : 6 = 1 : $\frac{6}{5}$ = 3 : $\frac{18}{5}$,

গ : ঘ = 8 : 9 = 1 : $\frac{9}{8}$ = $\frac{18}{5}$: $\frac{81}{20}$;

$\therefore$ ক : খ : গ : ঘ = 2 : 3 : $\frac{18}{5}$: $\frac{81}{20}$ = 40 : 60 : 72 : 81.

উদা. 8. কোন মিশ্রিত দুগ্ধে দুগ্ধ ও জলের অনুপাত 7 : 3 হইলে, 3 মণ 10 সের মিশ্রিত দুগ্ধে দুগ্ধ ও জলের পরিমাণ কত নির্ণয় কর।

প্রতি 7 সের দুগ্ধের সহিত 3 সের জল মিশাইয়া 10 সের মিশ্রিত দুগ্ধ হয়।

সুতরাং মিশ্রিত দুগ্ধের $\frac{7}{10}$ অংশ দুগ্ধ এবং $\frac{3}{10}$ অংশ জল।

$\therefore$ 3 মণ 10 সের বা 130 সের মিশ্রিত দুগ্ধে দুগ্ধের পরিমাণ = 130 সেরের $\frac{7}{10}$ = 91 সের এবং জলের পরিমাণ = 130 সেরের $\frac{3}{10}$ = 39 সের।

উদা. 9. 85 গ্যালন মিশ্রিত মদ্যে মদ্য ও জলের অনুপাত 3 : 2. ইহাতে আর কত জল মিশাইলে মদ্য ও জলের অনুপাত 4 : 3 হইবে ?

85 গ্যালন মিশ্রিত মদ্যে মদ্যের পরিমাণ = $\frac{85}{3+2}\times 3$ গ্যালন = 51 গ্যালন এবং জলের পরিমাণ = 85 − 51 গ্যালন = 34 গ্যালন। নূতন মিশ্রণে মদ্যের পরিমাণ 51 গ্যালনই থাকিবে অথচ মদ্য ও জলের অনুপাত 4 : 3 হইবে। সুতরাং 51 গ্যালন : জলের পরিমাণ (গ্যালনে) : : 4 : 3 ;

$\therefore$ জলের পরিমাণ = $\frac{51\times 3}{4}$ গ্যালন = $\frac{153}{4}$ গ্যালন = $38\frac{1}{4}$ গ্যালন।

নূতন মিশ্রণে জলের পরিমাণ হইবে $38\frac{1}{4}$ গ্যালন ; কিন্তু পূর্বে জলের পরিমাণ ছিল 34 গ্যালন। $\therefore$ $(38\frac{1}{4} - 34)$ বা $4\frac{1}{4}$ গ্যালন জল মিশ্রিত করিতে হইবে।

প্রশ্নমালা 26

নিম্নলিখিত অনুপাতগুলির মান লঘিষ্ঠাকারে প্রকাশ কর :

1. $42 : 63$ **2.** $6\frac{1}{2} : 13$ **3.** $5\frac{1}{2} : 4\frac{1}{4}$

নিম্নলিখিত অনুপাতগুলির যৌগিক অনুপাত নির্ণয় কর :

4. $3 : 4,\ 5 : 7,\ 14 : 15$ **5.** $4\frac{1}{2} : 13\frac{1}{2},\ 5\frac{2}{5} : 10\frac{1}{2},\ 1\frac{1}{6} : 1\frac{1}{19}$

6. কোন অনুপাতের মান $\frac{3}{7}$; যদি উত্তর রাশি 112 হয়, তবে পূর্বরাশি কত ?

নিম্নলিখিত রাশিসমূহের চতুর্থ সমানুপাতী নির্ণয় কর :

7. 6, 10, 12 **8.** 39, 26, 51

নিম্নলিখিত দুই দুইটি রাশির তৃতীয় সমানুপাতী নির্ণয় কর :

9. 8, 20 **10.** 1·2, 1·8 **11.** $1\frac{11}{16}, 2\frac{1}{4}$

নিম্নলিখিত দুই দুইটি রাশির মধ্য-সমানুপাতী নির্ণয় কর :

12. 49, 81 **13.** $1\frac{2}{5}, 5\frac{3}{5}$ **14.** ·09, ·36

15. **ক**-এর বয়স : **খ**-এর বয়স $= 3 : 4$; **ক**-এর বয়স 12 বৎসর হইলে, **খ**-এর বয়স কত ?

16. **ক**-এর বয়স **খ**-এর বয়সের $2\frac{1}{2}$ গুণ এবং **গ**-এর বয়স **খ**-এর বয়সের $1\frac{1}{3}$ গুণ ; **ক**-এর বয়স ও **গ**-এর বয়সের অনুপাত নির্ণয় কর।

17. **ক** 3 ঘণ্টায় 10 কি. মি. এবং **খ** $2\frac{1}{2}$ ঘণ্টায় 9 কি. মি. হাঁটিতে পারে ; **ক** ও **খ**-এর বেগের অনুপাত নির্ণয় কর।

18. 210 গ্যালন জলমিশ্রিত মদ্যে মদ্য ও জলের অনুপাত $11 : 3$; মদ্য ও জলের পরিমাণ নির্ণয় কর।

19. 36 সের মিশ্রিত দুগ্ধে সমপরিমিত দুগ্ধ ও জল মিশ্রিত আছে ; ইহাতে আর কত সের দুগ্ধ মিশাইলে দুগ্ধ ও জলের অনুপাত $5 : 3$ হইবে ?

20. 1 মণ জলমিশ্রিত দুগ্ধে দুগ্ধ ও জলের অনুপাত $4 : 1$ আছে ; ইহাতে আর কত দুগ্ধ মিশাইলে দুগ্ধ ও জলের অনুপাত $9 : 2$ হইবে ?

21. পিতা ও পুত্রের বর্তমান বয়সের সমষ্টি 66 বৎসর এবং তাহাদের বয়সের অনুপাত 8 : 3. 6 বৎসর পূর্বে তাহাদের বয়সের অনুপাত কত ছিল? 6 বৎসর পরে তাহাদের বয়সের অনুপাত কত হইবে?

22. পিতা ও পুত্রের বয়সের সমষ্টি 74 বৎসর। 10 বৎসর পূর্বে তাহাদের বয়সের অনুপাত ছিল 7 : 2 ; 10 বৎসর পরে তাহাদের বয়সের অনুপাত কত হইবে?

23. যে সময়ে **ক** 5 বার পদক্ষেপ করে, **খ** সেই সময়ে 6 বার পদক্ষেপ করে ; কিন্তু **ক** 4 বার পদক্ষেপে যত দূর যায়, **খ** 5 বার পদক্ষেপে তত দূর যায়। **ক** ও **খ**-এর বেগের অনুপাত নির্ণয় কর।

সামানুপাতিক ভাগহার

9. কোন প্রদত্ত রাশিকে কতিপয় নির্দিষ্ট সংখ্যার অনুপাতে বিভক্ত করাকে **সামানুপাতিক ভাগহার** (Division into proportional parts) বলা হয়।

মনে কর **ক** ও **খ**-এর মধ্যে 10 টাকা 2 : 3 অনুপাতে ভাগ করিয়া দিতে হইবে। $2+3=5$; এক্ষণে ক সম্পূর্ণ টাকার 5 ভাগের 2 ভাগ এবং **খ** 5 ভাগের 3 ভাগ পাইবে।

সুতরাং **ক**-এর অংশ $=10\times\frac{2}{5}=4$ টাকা

এবং **খ**-এর অংশ $=10\times\frac{3}{5}=6$ টাকা [অথবা, 10 টা. $-$ 4 টা. $=$ 6 টা.]

এইরূপে, 140 টাকাকে 2 : 3 : 4 : 5-এর অনুপাতে বিভক্ত করিতে হইলে, $2+3+4+5=14$,

সুতরাং প্রথম ভাগ $=$ 140 টা. $\times\frac{2}{14}=$ 20 টা. ;

দ্বিতীয় ভাগ $=$ 140 টা. $\times\frac{3}{14}=$ 30 টা. ;

তৃতীয় ভাগ $=$ 140 টা. $\times\frac{4}{14}=$ 40 টা. ;

চতুর্থ ভাগ $=$ 140 টা. $\times\frac{5}{14}=$ 50 টা.

উদা. 1. **ক, খ** ও **গ**-এর মধ্যে কতকগুলি লেবু 2 : 3 : 5 অনুপাতে ভাগ করিয়া দেওয়ায় **গ**-এর অংশে 20-টি লেবু পড়িল ; ক কয়টি লেবু পাইল?

$2+3+5=10$; সুতরাং মোট লেবুর $\frac{5}{10}$ অংশ **গ** এবং $\frac{2}{10}$ অংশ **ক** পাইল।

এখন, $\frac{5}{10}$ অংশ $=$ 20-টি $\therefore$ $\frac{2}{10}$ অংশ $=20\times\frac{10}{5}\times\frac{2}{10}=$ 8-টি।

$\therefore$ ক 8-টি লেবু পাইল।

উদা. 2. একটি বাক্সে টাকা, আধুলি, সিকি ও দশ ন. প. মুদ্রা লইয়া মোট 32 টা. 50 ন. প. আছে। যদি উক্ত মুদ্রাসমূহের সংখ্যার অনুপাত 1 : 2 : 3 : 5 হয়, তাহা হইলে কোন্ মুদ্রা কয়টি আছে ?

ধরা যাউক টাকা, আধুলি, সিকি ও দশ ন. প. মুদ্রার সংখ্যা যথাক্রমে x, $2x$, $3x$, $5x$.

এখন x টাকা = $100x$ ন. প., $2x$ আধুলি = $100x$ ন. প.

$3x$ সিকি = $75x$ ন. প., $5x$ দশ ন. প. = $50x$ ন. প.

এবং 32 টা. 50 ন. প. = 3250 ন. প.

$\therefore\ 100x + 100x + 75x + 50x = 3250$

বা, $325x = 3250$, $\therefore\ x = 10$;

$\therefore$ টাকার সংখ্যা 10, আধুলির সংখ্যা 20, সিকির সংখ্যা 30, দশ নয়া পয়সার সংখ্যা 50.

উদা. 3. ক, খ, গ-এর মধ্যে 50 টাকা এরূপে ভাগ করিয়া দাও যেন ক-এর অংশের অর্ধ, খ-এর অংশের এক-তৃতীয়াংশ এবং গ-এর অংশের এক-পঞ্চমাংশ পরস্পর সমান হয়।

খ-এর অংশের $\frac{1}{3}$ = ক-এর অংশের $\frac{1}{2}$

$\therefore$ খ-এর অংশ = ক-এর অংশের $\frac{3}{2}$

আবার, গ-এর অংশের $\frac{1}{5}$ = ক-এর অংশের $\frac{1}{2}$

$\therefore$ গ-এর অংশ = ক-এর অংশের $\frac{5}{2}$

$\therefore$ ক-এর অংশ : খ-এর অংশ : গ-এর অংশ

= ক-এর অংশ : ক-এর অংশের $\frac{3}{2}$: ক-এর অংশের $\frac{5}{2}$

অর্থাৎ, $= 1 : \frac{3}{2} : \frac{5}{2} = 2 : 3 : 5$;

এখন, $2 + 3 + 5 = 10$;

সুতরাং ক-এর অংশ = 50 টা. × $\frac{2}{10}$ = 10 টা.

খ-এর অংশ = 50 টা. × $\frac{3}{10}$ = 15 টা.

গ-এর অংশ = 50 টা. × $\frac{5}{10}$ = 25 টা.

প্রশ্নমালা 27

1. তিনজন লোকের মধ্যে 450 টাকা এমনভাবে ভাগ করিয়া দাও যেন তাহাদের অংশের অনুপাত 2 : 3 : 4 হয়।

2. **ক**, **খ**, **গ**-এর মধ্যে 240 টাকা এরূপে ভাগ করিয়া দাও যেন **ক** 3 টাকা পাইলে **খ** 4 টাকা এবং **খ** 8 টাকা পাইলে **গ** 10 টাকা পায়।

3. **ক**, **খ**, **গ**-এর মধ্যে 3720 টাকা এরূপে ভাগ করিরা দাও যেন **ক** ও **খ**-এর অংশের অনুপাত 5 : 4 এবং **খ** ও **গ**-এর অংশের অনুপাত 3 : 1 হয়।

4. চেন সমেত একটি ঘড়ির মূল্য 5 পা. 5 শি.; কিন্তু চেন ও ঘড়ির মূল্যের অনুপাত 3 : 4. প্রত্যেকটির মূল্য কত?

5. 12 জন পুরুষ, 16 জন স্ত্রীলোক এবং 30 জন বালকের মধ্যে 41 পা. 5 শি. এইরূপে ভাগ করিয়া দিতে হইবে যেন প্রত্যেক পুরুষ প্রত্যেক স্ত্রীলোকের দ্বিগুণ এবং প্রত্যেক স্ত্রীলোক প্রত্যেক বালকের তিনগুণ পায়। প্রত্যেকের প্রাপ্য নির্ণয় কর।

6. 3-টি ঘোড়া, 5-টি গরু এবং 87-টি ভেড়া বিক্রয় করিয়া কোন কৃষক মোট 262 টাকা 50 ন. প. পাইল। যদি প্রত্যেক গরুর মূল্য প্রত্যেক ভেড়ার মূল্যের 8 গুণ এবং প্রত্যেক ঘোড়ার মূল্যের অর্ধেক হয়, তাহা হইলে প্রত্যেকটির মূল্য কত?

7. 15 জন পুরুষ, 20 জন স্ত্রীলোক এবং 30 জন বালকের মধ্যে 180 টাকা এমনভাবে ভাগ করিয়া দেওয়া হইল যে 2 জন স্ত্রীলোক যাহা পাইল 1 জন পুরুষ এবং 1 জন বালক একত্রে তাহা পাইল। যদি স্ত্রীলোকেরা মোট 60 টাকা পাইয়া থাকে, তাহা হইলে প্রত্যেকে কত করিয়া পাইয়াছিল?

8. চারিজন লোকের মধ্যে 154 টাকা এমনভাবে ভাগ করিয়া দাও যেন উহাদের অংশের অনুপাত $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4} : \frac{1}{5}$ হয়।

9. 146000 টাকার সম্পত্তি পিতার উইল অনুসারে তিন ভ্রাতা $\frac{1}{6} : \frac{1}{7} : \frac{1}{8}$-এর অনুপাতে ভাগ করিয়া লইল; প্রত্যেকের প্রাপ্য নির্ণয় কর।

10. কোন ত্রিভুজের বাহু তিনটির দৈর্ঘ্যের অনুপাত 4 : 5 : 6 এবং উহার পরিসীমা 120 ইঞ্চি। বৃহত্তম বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

11. বিলাতী বারুদে সোরা 75 ভাগ, গন্ধক 10 ভাগ এবং কয়লা 15 ভাগ। 10 হন্দর বারুদে প্রত্যেক দ্রব্যের পরিমাণ নির্ণয় কর। [বো. প্র. 1864]

12. কোন বাক্সে টাকা, আধুলি ও সিকি লইয়া মোট 160 টাকা আছে। যদি উক্ত মুদ্রাগুলির সংখ্যার অনুপাত 4 : 5 : 6 হয়, কোন্ মুদ্রা কয়টি আছে ?

13. কোন বাক্সে টাকা, আধুলি ও সিকি লইয়া মোট 1400 মুদ্রা আছে। যদি প্রত্যেক প্রকার মুদ্রার মূল্য সমান হয়, তাহা হইলে কোন্ মুদ্রা কয়টি ছিল এবং বাক্সে মোট কত ছিল ?

14. তিনজন পথিকের একজনের নিকট 3 খানি রুটি এবং আর একজনের নিকট 5 খানি রুটি ছিল ; তৃতীয় ব্যক্তির নিকট কিছুই ছিল না। তাহারা তিনজনে সমস্ত রুটি সমান ভাগ করিয়া খাইল এবং তৃতীয় ব্যক্তি রুটির মূল্য বাবদ 64 ন. প. দিল। প্রথম দুই পথিক ইহা কিরূপে ভাগ করিয়া লইবে ?

সম্ভূয়সমুত্থান

10. স্ব স্ব মূলধন লইয়া একাধিক ব্যক্তি একত্রে ব্যবসায় করিলে উহাকে যৌথ ব্যবসায় বলা হয় এবং যাহাদের মূলধনে ব্যবসায় পরিচালিত হয় তাহাদের প্রত্যেককে ঐ যৌথ ব্যবসায়ের **অংশীদার** (Partner বা fellow) বলা হয়।

যৌথ ব্যবসায়ের অংশীদারদিগের মধ্যে লাভ-ক্ষতির বণ্টন প্রণালীকে **সম্ভূয়-সমুত্থান** (Partnership বা fellowship) বলে।

সম্ভূয়সমুত্থান দ্বিবিধ—**সরল** (Simple) ও **মিশ্র** (Compound)। সমস্ত অংশীদারের মূলধন একই সময়ের জন্য ব্যবসায়ে খাটিলে লাভ বা ক্ষতি অংশীদারদের প্রত্যেকের নিয়োজিত মূলধনের অনুপাতে বণ্টন করা হইয়া থাকে। এইরূপ বণ্টন প্রক্রিয়াকে সরল সম্ভূয়সমুত্থান বলে। সমস্ত অংশীদারের মূলধন একই সময়ের জন্য না খাটিলে, মূলধন এবং সময় এতদুভয়ের হিসাবে লাভ-ক্ষতি বণ্টন করা হইয়া থাকে। এইরূপ বণ্টন প্রক্রিয়াকে মিশ্র সম্ভূয়সমুত্থান বলে।

বণ্টন প্রক্রিয়া সামানুপাতিক ভাগহারের প্রক্রিয়ার অনুরূপ। সরল সম্ভূয়সমুত্থানে লাভ-ক্ষতি অংশীদারদের প্রত্যেকের নিয়োজিত মূলধনের অনুপাতে বণ্টন করা হইয়া থাকে, কিন্তু মিশ্র সম্ভূয়সমুত্থানে প্রত্যেক অংশীদারের মূলধন ও সময়ের গুণফলের অনুপাতে লাভ-ক্ষতি বণ্টন করা হইয়া থাকে।

উদা. 1. ক ও খ 1500 টা. এবং 2500 টা. মূলধন লইয়া একত্র ব্যবসায় আরম্ভ করিল। বৎসরান্তে ব্যবসায়ে 800 টা. লাভ হইল। লাভের টাকার কাহার প্রাপ্য কত ?

ক-এর মূলধন : **খ**-এর মূলধন $= 1500 : 2500 = 3 : 5$; এখন, $3 + 5 = 8$;

সুতরাং **ক**-এর লাভাংশ = 800 টা. $\times \frac{3}{8}$ = 300 টা.

এবং **খ**-এর লাভাংশ = 800 টা. $\times \frac{5}{8}$ = 500 টা.

[অথবা 800 টা. − 300 টা. = 500 টা.]

উদা. 2. ক 3 মাসের জন্য 400 টাকা, খ 6 মাসের জন্য 500 টাকা এবং গ 8 মাসের জন্য 300 টাকা কোন ব্যবসায়ে খাটাইয়া মোট 1980 টাকা লাভ করিল। প্রত্যেকের লাভাংশ নির্ণয় কর।

ক-এর মূলধন : **খ**-এর মূলধন : **গ**-এর মূলধন

$= 400 \times 3 : 500 \times 6 : 300 \times 8 = 1200 : 3000 : 2400$

$= 2 : 5 : 4$; এখন, $2 + 5 + 4 = 11$;

সুতরাং **ক**-এর লাভাংশ = 1980 টা. $\times \frac{2}{11}$ = 360 টা.

খ-এর লাভাংশ = 1980 টা. $\times \frac{5}{11}$ = 900 টা.

গ-এর লাভাংশ = 1980 টা. $\times \frac{4}{11}$ = 720 টা.।

প্রশ্নমালা 28

1. ক ও খ 5000 টাকায় একখানি বাড়ী কিনিল। **ক** ইহার 2800 টাকা এবং **খ** বাকী টাকা দিল। 5500 টাকায় বাড়ীখানি বিক্রয় করিয়া লাভাংশের কে কত পাইবে ?

2. কোন ব্যবসায়ে 80 টাকা লাভ হয়। **ক** ঐ ব্যবসায়ে 500 টাকা এবং **খ** অবশিষ্ট মূলধন নিয়োজিত করিয়াছিল। যদি **ক**-এর লাভাংশ 50 টাকা হয়, তাহা হইলে **খ**-এর মূলধন কত ?

3. ক, খ ও গ যথাক্রমে 400 টাকা, 500 টাকা ও 600 টাকা মূলধন লইয়া একত্র ব্যবসায় আরম্ভ করিল। ব্যবসায়ে 750 টাকা লাভ হইলে, কাহার অংশে কত পড়িবে ?

4. কোন কারবারে **ক** 3 মাসের জন্য 1020 টাকা এবং **খ** 4 মাসের জন্য 680 টাকা খাটাইয়া মোট 510 টাকা লাভ করিল। প্রত্যেকের লাভাংশের পরিমাণ নির্ণয় কর।

5. কোন যৌথ কারবারে **ক**, **খ** ও **গ**-এর মূলধনের অনুপাত $\frac{1}{2}:\frac{1}{3}:\frac{1}{4}$. 4 মাস পরে **ক** তাহার মূলধনের অর্ধেক তুলিয়া লইল এবং আরও 8 মাস পরে 2024 টাকা লাভ হইল। ইহাতে **ক**-এর লাভের পরিমাণ কত? [পা. প্র. 1910]

6. **ক** 2000 টাকা মূলধন লইয়া কোন ব্যবসায় আরম্ভ করিয়া 3 মাস পরে **খ**-কে অংশীদাররূপে গ্রহণ করে। যদি **খ**-এর মূলধন 4000 টাকা হয় এবং বৎসরান্তে 1230 টাকা লাভ হয়, লাভাংশের কে কত পাইবে?

7. 1-লা জানুয়ারী 4000 টাকা লইয়া **ক** একটি ব্যবসায় আরম্ভ করেন, 1-লা এপ্রিল 5000 টাকা লইয়া **খ** ঐ ব্যবসায়ে যোগ দেন এবং 1-লা জুলাই **গ** 7000 টাকা লইয়া উক্ত ব্যবসায়ে যোগদান করেন। বৎসরের শেষে 13500 টাকা লাভ হইল এবং উহার 10 % মজুত তহবিলে রাখিয়া বাকী টাকা তিনজনে ভাগ করিয়া লইলেন। কাহার অংশে কত পড়িল?

8. কোন যৌথ কারবারে **খ**-এর মূলধন **ক**-এর মূলধনের দেড়গুণ। 8 মাস পরে **খ** তাঁহার মূলধনের অর্ধাংশ তুলিয়া লইলেন, তৎপর 2 মাস পরে **ক** তাঁহার মূলধনের এক-চতুর্থাংশ তুলিয়া লইলেন। বৎসরান্তে 530 পাউণ্ড লাভ হইলে, কাহার কত প্রাপ্য হইবে? [সি. সা.]

9. **ক**, **খ** ও **গ** একত্র ব্যবসায় করিয়া 1000 টাকা লাভ করে। যদি **ক** ও **খ**-এর মূলধনের অনুপাত 2 : 3 এবং **খ** ও **গ**-এর মূলধনের অনুপাত 2 : 5 হয়, তবে লাভের টাকার কে কত পাইবে? [ক. প্র. 1932]

10. **ক** ও **খ** একত্রে কোন ব্যবসায় আরম্ভ করেন, কিন্তু ব্যবসায়ের সমগ্র মূলধন 45000 টাকা **ক** নিয়োজিত করেন এই শর্তে যে লাভাংশ উভয়ের মধ্যে সমভাবে বণ্টন করা হইবে। **খ** মূলধনের অর্ধাংশের উপর 10 % হারে **ক**-কে সুদ দেন এবং ব্যবসায় চালাইবার জন্য মাসিক 120 টাকা করিয়া পারিশ্রমিক নিয়া থাকেন। বৎসরান্তে **খ**-এর প্রাপ্য **ক**-এর অর্ধেক হইলে, লাভের পরিমাণ কত? [ঢাকা, 1930]

মিশ্রণ

1. বিভিন্ন মূল্যের বিভিন্ন পরিমাণের দ্রব্য একত্র করিয়া এক নূতন প্রকারের দ্রব্য প্রস্তুত করার নাম **মিশ্রণ**।

প্রত্যেক বস্তুর মূল্য ও পরিমাণ জানা থাকিলে উহাদের সমবায়ে উৎপন্ন মিশ্রিত দ্রব্যের মূল্য (চলিত কথায় 'পড়তা') নির্ণয় করা যায়। পড়তা প্রকৃতপক্ষে বিভিন্ন দ্রব্যের গড় মূল্য ছাড়া আর কিছুই নহে।

আবার বিভিন্ন মূল্যযুক্ত দ্রব্যের কোন্‌টি কি পরিমাণে অথবা কি অনুপাতে মিশ্রিত করিলে সর্বনিম্ন ও সর্বোচ্চ মূল্যের অন্তর্বর্তী কোন অভীষ্ট মূল্যযুক্ত দ্রব্য উৎপন্ন হয় তাহাও নির্ণয় করা যায়।

নিম্নোক্ত উদাহরণগুলিতে উভয় প্রক্রিয়াই প্রদর্শিত হইবে :

উদা. 1. 24 টাকা মণ দরের 12 মণ চাউলের সহিত 23·25 টাকা মণ দরের 8 মণ চাউল মিশ্রিত করিলে, মিশ্রিত চাউলের মণ কত করিয়া পড়ে ?

$$\text{নির্ণেয় মূল্য (বা পড়তা)} = \frac{24 \text{ টা.} \times 12 + 23{\cdot}25 \text{ টা.} \times 8}{12+8} = \frac{288+186}{20} \text{ টাকা}$$

$$= \tfrac{474}{20} \text{ টাকা} = 23 \text{ টাকা } 70 \text{ ন. প.}$$

উদা. 2. 2·75 টাকা পাউণ্ড দরের চায়ের সহিত 3·25 টাকা পাউণ্ড দরের চা কি অনুপাতে মিশ্রিত করিয়া মিশ্রিত চা 2·95 টাকা পাউণ্ড দরে বিক্রয় করা যায় ?

এস্থলে মিশ্রিত চায়ের প্রতি পাউণ্ডের পড়তা দর 2·95 টাকা।

পড়তা দর প্রথম প্রকার চায়ের দর অপেক্ষা প্রতি পাউণ্ডে (2·95 – 2·75) টাকা বা 20 নয়া পয়সা বেশী ; সুতরাং 30 পাউণ্ডে (20 × 30) নয়া পয়সা বা 600 নয়া পয়সা বেশী। ঐ পড়তা দর দ্বিতীয় প্রকার চায়ের দর অপেক্ষা প্রতি পাউণ্ডে (3·25 – 2·95) টাকা বা 30 ন. প. কম ; সুতরাং 20 পাউণ্ডে (30 × 20) ন. প. বা 600 ন. প. কম। সুতরাং এই আধিক্য ও অল্পতা সমান হইবে প্রথম প্রকারের 30 পাউণ্ডের সহিত দ্বিতীয় প্রকারের 20 পাউণ্ড মিশ্রিত করিলে। সুতরাং প্রথম প্রকার ও দ্বিতীয় প্রকার চা মিশ্রিত করিতে হইবে 30 : 20 বা 3 : 2 অনুপাতে।

কার্যতঃ প্রথম ও দ্বিতীয় দরের সহিত পড়তা দরের পার্থক্যের ব্যস্ত অনুপাত করিলেই নির্ণেয় অনুপাত পাওয়া যাইবে।

উদা. 3. 20 টাকা ও 24 টাকা মণ দরের দুই প্রকার চাউল কি অনুপাতে মিশ্রিত করিয়া মিশ্রিত চাউল প্রতি মণ 25 টা. 8 নয়া পয়সা দরে বিক্রয় করিলে 10 % লাভ হয় ?

1 মণ মিশ্রিত চাউলের পড়তা দর = টা. $25{\cdot}08 \times \frac{100}{110}$ টা. = $22{\cdot}80$;

এখন প্রথম প্রকার চাউলের প্রতি মণের দর = 20 টাকা,

দ্বিতীয় " " " " " = 24 টাকা,

মিশ্রিত " " " " = 22·80 টাকা।

এখন, যেহেতু 22·80 টা. − 20 টা. = 2·80 টাকা,

এবং 24 টা. − 22·80 টা. = 1·20 টাকা।

∴ মিশ্রণের অনুপাত = 1·20 : 2·80 = 120 : 280 = 3 : 7.

উদা. 4. তিনটি সমান আকারের গ্লাসে মদ্য ও জল যথাক্রমে 2 : 3, 3 : 4 এবং 4 : 5 অনুপাতে মিশ্রিত আছে, তিনটি গ্লাসের মিশ্রিত মদ্য ও জল আর একটি পাত্রে ঢালা হইলে, চতুর্থ পাত্রে মদ্য ও জলের অনুপাত কিরূপ হইবে ? [ক. প্র. 1929]

প্রথম গ্লাসে মদ্য = $\frac{2}{5}$ অংশ এবং জল = $\frac{3}{5}$ অংশ।

দ্বিতীয় " " = $\frac{3}{7}$ " " " = $\frac{4}{7}$ অংশ।

তৃতীয় " " = $\frac{4}{9}$ " " " = $\frac{5}{9}$ অংশ।

সুতরাং চতুর্থ গ্লাসে $\frac{\text{মদ্য}}{\text{জল}} = \frac{\frac{2}{5}+\frac{3}{7}+\frac{4}{9}}{\frac{3}{5}+\frac{4}{7}+\frac{5}{9}} = \frac{\frac{401}{315}}{\frac{544}{315}} = \frac{401}{544}$ বা 401 : 544.

উদা. 5. একটি পাত্রে 3 ভাগ দুধ ও 1 ভাগ জল আছে। এই জলমিশ্রিত দুধের কতটুকু তুলিয়া তাহার বদলে জল ঢালিলে, অর্ধেক দুধ ও অর্ধেক জল হইবে ? [যুক্ত প্র. 1911]

পাত্রটিতে সম্পূর্ণ মিশ্রিত দুধের $\frac{3}{4}$ অংশ দুধ এবং $\frac{1}{4}$ অংশ জল।

যদি পাত্রটি হইতে x পরিমাণ জলীয় দুধ তুলিয়া x পরিমাণ জল মিশ্রিত করা যায় তাহা হইলে দুধের পরিমাণ থাকিবে $(\frac{3}{4}-\frac{3}{4}x)$ এবং জলের পরিমাণ থাকিবে $(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}x)$ এবং x পরিমাণ জল মিশ্রিত করিলে মোট জলের পরিমাণ হইবে $(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}x+x)$

সুতরাং প্রশ্ন অনুসারে, $\frac{\frac{3}{4}-\frac{3}{4}x}{\frac{1}{4}-\frac{1}{4}x+x} = \frac{1}{1}$ অর্থাৎ, $\frac{3}{4}-\frac{3}{4}x = \frac{1}{4}+\frac{3}{4}x$

অথবা, $\frac{1}{2} = \frac{3}{2}x$, ∴ $x = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ (অংশ)।

প্রশ্নমালা 29

1. 96 ন. প. ও 1 টাকা 5 ন. প. সের দরের দুই প্রকার চিনি কি অনুপাতে মিশ্রিত করিলে মিশ্রিত চিনির সের 1 টাকা পড়িবে ?

2. 80 ন. প. ও 92 ন. প. সের দরের দুগ্ধ কি অনুপাতে মিশ্রিত করিয়া 84 ন. প. দরে বিক্রয় করা যায় ?

3. 21·20 টাকা এবং 24·50 টাকা মণ দরের চাউল কি অনুপাতে মিশ্রিত করিয়া 23·50 টাকা দরে প্রতি মণ বিক্রয় করা যায় ?

4. টা. 1·75 এবং টা. 2·50 পাউণ্ডের চা কি অনুপাতে মিশ্রিত করিয়া প্রতি পাউণ্ড টা. 2·25 দরে বিক্রয় করিলে $12\frac{1}{2}$ % লাভ হইবে ?

5. 20 টা. মণ দরের চাউলের সহিত 25 টা. মণ দরের চাউল কি অনুপাতে মিশ্রিত করিয়া প্রতি মণ 25·30 টা. দরে বিক্রয় করিলে 10 % লাভ হইবে ?

6. এক ব্যক্তি দুগ্ধ ক্রয় করিয়া জল মিশাইয়া খরিদ দরেই বিক্রয় করে। যদি উহাতে তাহার 20 % লাভ হয়, তাহা হইলে মিশ্রিত দুগ্ধের প্রতি সেরে জলের পরিমাণ কত ছটাক ?

7. কোন ব্যবসায়ী প্রতি পাউণ্ড 2 শি. 8 পে. ও প্রতি পাউণ্ড 4 শি. 6 পে- দরের দুই প্রকারের চা মিশ্রিত করিয়া, মিশ্রিত চা প্রতি পাউণ্ড 4 শি. দরে বিক্রয় করিয়া 20 % লাভ করিল। কি অনুপাতে উক্ত দুই প্রকার চা মিশ্রিত করা হইয়াছিল ?

8. একটি পাত্রে জল ও সিরাপ 3 : 5 অনুপাতে মিশ্রিত ছিল। ঐ মিশ্রিত পদার্থের কত অংশ তুলিয়া লইয়া উহাতে সমপরিমাণ জল মিশ্রিত করিলে, নূতন মিশ্রণে জল ও সিরাপের পরিমাণ সমান হইবে ?

9. তিনটি সমান আকারের গ্লাসে জলমিশ্রিত দুগ্ধ আছে। দুগ্ধ ও জলের অনুপাত প্রথম গ্লাসে 3 : 1, দ্বিতীয় গ্লাসে 5 : 3 এবং তৃতীয় গ্লাসে 9 : 7. তিনটি গ্লাসের মিশ্রিত দুগ্ধ আর একটি পাত্রে ঢালা হইল। প্রমাণ কর যে নূতন পাত্রটিতে দুগ্ধ ও জলের অনুপাত 31 : 17.

চতুর্দশ অধ্যায়

ঐকিক নিয়ম

আয়-কর

1. ঐকিক নিয়মের সাধারণ অঙ্ক এবং সময়-কার্য ও সময়-দূরত্ব বিষয়ক প্রশ্নের সমাধান-প্রণালী পূর্বে আলোচিত হইয়াছে। এস্থলে আয়-কর বিষয়ক প্রশ্নের সমাধান-প্রণালী আলোচিত হইতেছে।

2. প্রত্যেক ব্যক্তিকে বা যৌথ পরিবারকে বা ব্যবসায় প্রতিষ্ঠানকে বার্ষিক আয়ের উপর গভর্ণমেণ্টকে কর দিতে হয়। এই করকে **আয়-কর (Income-tax)** বলা হয়। যে ব্যক্তির বার্ষিক আয় গভর্ণমেণ্ট কর্তৃক নির্দিষ্ট একটি সীমা অতিক্রম করিয়া যায় তাহাকেই আয়কর দিতে হয়। আয়ের সীমা এবং আয়-করের হার গভর্ণমেণ্ট কর্তৃক স্থিরীকৃত হয়। আয়ের মাত্রা অনুযায়ী আয়-করের হার ক্রমশঃ বৃদ্ধি পায়। আয়-অনুযায়ী করের হারের তালিকা (schedule) অনুসারে আয়করের হিসাব প্রস্তুত করিতে হয়।

উদা. 1. টাকা প্রতি 3 নয়া পয়সা হারে 3650 টাকার আয়কর কত ?

1 টাকার আয়কর 3 ন. প.

∴ 3650 " 3×3650 ন. প. = 10950 ন. প. = 109 টা. 50 ন. প.

উদা. 2. এক ব্যক্তির বার্ষিক আয় 4500 টাকা। আয়ের প্রথম 3000 টাকা কর-মুক্ত হইলে এবং আয়করের হার 3 % হইলে, ঐ ব্যক্তিকে কত আয়-কর দিতে হইবে ?

4500 টাকার মধ্যে 3000 টাকার উপর আয়-কর দিতে হয় না। সুতরাং (4500 − 3000) বা 1500 টাকার উপর আয়-কর দিতে হইবে।

এখন, 100 টাকার আয়কর = 3 টাকা

∴ 1 " " $= \frac{3}{100}$ "

∴ 1500 " " $= \frac{3 \times 1500}{100}$ টাকা = 45 টাকা।

অথবা, সংক্ষেপে, নির্ণেয় আয়কর = (4500 − 3000) টাকার 3 %

= 1500 টাকা × $\frac{3}{100}$ = 45 টাকা।

উদা. 3. এক ব্যক্তির বার্ষিক আর 3720 টাকা। টাকায় 3 ন. প. হারে আয়-কর দিয়া আয়-কর বাদে তাহার কত টাকা থাকে ?

1 টাকার আয়-কর = 3 ন. প.

∴ 3720 „ = 3 × 3720 ন. প.

= 11160 ন. প. = 111 টাকা 60 নয়া পয়সা।

∴ আয়-কর দিয়া তাহার থাকে 3720 টা. − 111 টা. 60 ন. প.

= 3608 টা. 40 ন. প.

উদা. 4. এক ব্যক্তিকে তাহার আয়ের প্রথম 3000 টাকার উপর আয়-কর দিতে হয় না। আয়ের অবশিষ্ট অংশের উপর 3 % হারে তাহাকে কর দিতে হয় 61 টাকা 50 ন. প.। তাহার মোট আয় কত ছিল ?

3 টাকা আয়-কর দিতে হয় 100 টাকার উপর

∴ 1 „ „ „ $\frac{100}{3}$ „

∴ 61·50 „ „ $\frac{100 \times 61{\cdot}50}{3}$ টাকার উপর

= $\frac{6150}{3}$ টাকার উপর = 2050 টাকার উপর।

তাহার আয়ের প্রথম 3000 টাকার উপর কর দিতে হয় নাই, সুতরাং তাহার মোট আয় ছিল (3000 + 2050) টাকা = 5050 টাকা।

প্রশ্নমালা 30

1. প্রতি টাকায় 3 ন. প. হারে 3875 টাকার আয়-কর কত ?

2. এক ব্যক্তির বার্ষিক আয় 4275 টাকা। 3 % হারে আয়-কর দিয়া তাহার প্রকৃত আয় কত নির্ণয় কর।

3. এক ব্যক্তির বার্ষিক আয় 5220 টাকা। আয়ের প্রথম 3000 টাকা আয়-কর মুক্ত হইলে 3 % হারে তাহাকে কত আয়-কর দিতে হয় ?

4. 5 % হারে এক ব্যক্তিকে 178 টাকা 75 ন. প. আয়-কর দিতে হয়। ঐ ব্যক্তির স্থূল আয় কত ?

5. 4 % হারে আয়-কর দিয়া যে ব্যক্তির প্রকৃত আয় 3744 টাকা তাহার স্থূল আয় কত ?

6. এক ব্যক্তির বার্ষিক আয় 4932 টাকা। আয়ের প্রথম 2500 টাকা আয়-কর মুক্ত হইলে এবং আয়-করের হার 4 % হইলে, তাহাকে কত আয়-কর দিতে হয় ?

7. এক ব্যক্তির বার্ষিক আয় 5196 টাকা। আয়ের প্রথম 3000 টাকার উপর কোন আয়-কর দিতে হয় না। আয়ের অবশিষ্ট অংশের উপর টাকায় 3 ন. প. হারে আয়-কর দিয়া তাহার কত টাকা থাকে ?

8. এক ব্যক্তির বার্ষিক আয় 6925 টাকা। আয়ের প্রথম 3500 টাকার উপর তাহাকে কর দিতে হয় না। অবশিষ্ট আয়ের উপর 3 % হারে আয়-কর দিতে হয়। জীবন বীমার জন্য তাহাকে বার্ষিক 135 টাকা ব্যয় করিতে হয় এবং এই টাকার উপর 1·5 % হারে আয়-কর হইতে রেহাই দেওয়া হয়। তাহাকে মোট কত আয়-কর দিতে হয় ?

9. এক ব্যক্তি তাহার বেতনের প্রতি টাকায় 3 ন. প. হিসাবে আয়-কর এবং 6 ন. প. হিসাবে প্রভিডেণ্ট ফণ্ডে দেন। অতঃপর যদি তাহার 3505 টাকা 32 ন. প. থাকে, তবে তাহার বেতন কত ?

10. এক ব্যক্তিকে তাঁহার আয়ের প্রথম 3000 টাকার উপর কোন আয়-কর দিতে হয় না। আয়ের অবশিষ্ট অংশের উপর প্রতি টাকায় 9 পাই হারে আয়-কর দেওয়াতে তাঁহাকে মোট 120 টাকা আয়-কর দিতে হইল। তাঁহার মোট আয় নির্ণয় কর এবং মোট আয়ের উপর প্রতি টাকায় গড়ে কত আয়-কর দিতে হইল তাহাও নির্ণয় কর। (W. B. S. F. 1958)

শৃঙ্খল নিয়ম (Chain Rule)

3. শৃঙ্খল নিয়ম। কোন প্রশ্নের সমাধানে পুনঃ পুনঃ ঐকিক নিয়ম প্রয়োগ না করিয়া প্রশ্নের অন্তর্গত রাশিগুলিকে শ্রেণী অনুসারে দুই স্তম্ভে শৃঙ্খলাকারে সাজাইয়া সংক্ষেপে উত্তর নির্ণয় করিবার প্রণালীকে শৃঙ্খল নিয়ম বলা হয়। নিম্নোক্ত উদাহরণসমূহ হইতে নিয়মটি আরও সুস্পষ্টভাবে বুঝা যাইবে।

উদা. 1. 2-টি ঘোড়ার মূল্য 8-টি গরুর মূল্যের সমান, 5-টি গরুর মূল্য 4-টি মহিষের মূল্যের সমান, 45-টি গাধার মূল্য 12-টি মহিষের মূল্যের সমান, 3-টি গাধার মূল্য 12-টি ভেড়ার মূল্যের সমান। যদি 18-টি ভেড়ার মূল্য 50 টাকা হয়, তাহা হইলে 3-টি ঘোড়ার মূল্য কত?

2-টি ঘোড়ার মূল্য	=	8-টি গরুর মূল্য
5-টি গরুর ”	=	4-টি মহিষের ”
12-টি মহিষের ”	=	45-টি গাধার ”
3-টি গাধার ”	=	12-টি ভেড়ার ”
18-টি ভেড়ায় ”	=	50 টাকা
কত টাকা ?	=	3-টি ঘোড়ার মূল্য

নির্ণেয় মূল্য $= \frac{8 \times 4 \times 45 \times 12 \times 50 \times 3}{2 \times 5 \times 12 \times 3 \times 18}$ টাকা $= 400$ টাকা।

প্রদত্ত সম্বন্ধযুক্ত রাশিগুলিকে এমনভাবে দুই স্তম্ভে সাজাইতে হইবে যেন একজাতীয় দুইটি রাশি একই স্তম্ভে দুইবার না বসে; একটি ডান স্তম্ভে বসিলে অপরটি বাম স্তম্ভে বসিবে। উক্তরূপে বসাইয়া শৃঙ্খলাকারে সমশ্রেণীর রাশিগুলিকে যুক্ত করা যায় বলিয়া ইহাকে শৃঙ্খল নিয়ম বলা হয়।

দ্বিতীয়তঃ মনে রাখিতে হইবে উভয় স্তম্ভের রাশিগুলির গুণফল পরস্পর সমান। যে স্তম্ভে নির্ণেয় রাশিটি থাকিবে সেই স্তম্ভের অপর সমস্ত রাশির গুণফল দ্বারা অপর স্তম্ভের রাশিসমূহের গুণফলকে ভাগ করিলে নির্ণেয় উত্তর পাওয়া যাইবে।

উদা. 2. যদি 15 টাকা 1 পাউণ্ডের সমান এবং 21 পাউণ্ড 20 গিনির সমান হয়, তাহা হইলে 8946 টাকার পরিবর্তে কত গিনি পাওয়া যাইবে ?

নির্ণেয় সংখ্যক গিনি = 8946 টাকা

15 টাকা = 1 পাউণ্ড

21 পাউণ্ড = 20 গিনি

∴ নির্ণেয় গিনির সংখ্যা $= \frac{8946 \times 1 \times 20}{15 \times 21} = 568$.

প্রশ্নমালা 31

1. 3-টি মহিষের মূল্য 4-টি গরুর মূল্যের সমান ; 3-টি গরুর মূল্য 10-টি ভেড়ার মূল্যের সমান। 4-টি ভেড়ার মূল্য 18 টাকা হইলে, 10-টি মহিষের মূল্য কত ?

2. 3 পাউণ্ড কফির মূল্য 4 পাউণ্ড চিনির মূল্যের সমান, 4 পাউণ্ড চায়ের মূল্য 9 পাউণ্ড কফির মূল্যের সমান। যদি 1 পাউণ্ড চিনির মূল্য 50 ন. প. হয়, তবে 11·25 টাকাতে কয় পাউণ্ড চা পাওয়া যাইবে ?

3. যদি 2-টি ভেড়ার মূল্য 185 ফ্রাঙ্ক হয় এবং 2-টি বাছুরের মূল্য 1-টি বলদের মূল্যের $\frac{1}{3}$ হয়, এবং যদি 15-টি ভেড়ার মূল্য 2-টি বলদের মূল্যের সমান হয় এবং যদি 55·50 ফ্রাঙ্ক 2 পাউণ্ডের সমান হয়, তাহা হইলে 25 পাউণ্ডে কয়টি বাছুর পাওয়া যাইবে ?

(সি. সা.)

4. যদি 15 টাকা 1 পাউণ্ডের সমান এবং 21 পাউণ্ড 20 গিনির সনান হয়, তবে 4473 টাকা কত গিনির সমান ?

5. 6-টি ঘোড়ার মূল্য 24-টি গরুর মূল্যের সমান, 10-টি গরুর মূল্য 8-টি মহিষের মূল্যের সমান, 4-টি মহিষের মূল্য 15-টি গাধার মূল্যের সমান, 8-টি গাধার মূল্য 32-টি ভেড়ার মূল্যের সমান। যদি 9-টি ভেড়ার মুল্য 75 টাকা হয়, তবে একটি ঘোড়ার মূল্য কত ?

চেক, বিল বা হুণ্ডি, ড্রাফ্‌ট

4. ব্যবসায়ের একটি সমস্যা হইল এক স্থান হইতে অন্য স্থানে অর্থ প্রেরণ। ইহার জন্য অনেক ব্যবস্থা আছে। তন্মধ্যে কয়েকটি প্রধান পদ্ধতি নিম্নে প্রদত্ত হইল।

(1) পোষ্টাল মনি অর্ডার (Postal Money Order)।

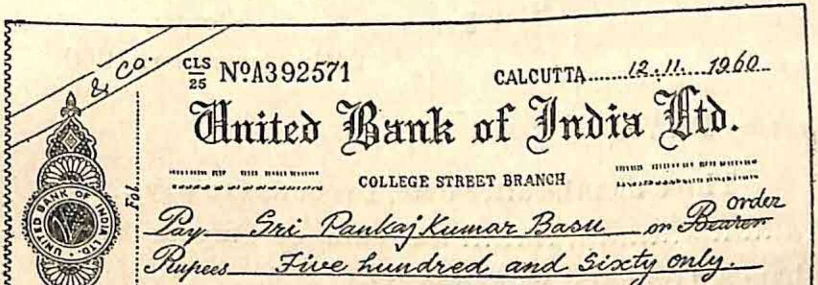
প্রেরক পোষ্টাফিসে টাকা জমা দেয়। পোষ্টাফিস প্রাপ্তার (Payee) নিকটবর্তী পোষ্ট অফিসে উক্ত টাকা প্রাপ্তাকে দেওয়ার জন্য নির্দেশ দেয় এবং শেষোক্ত পোষ্টাফিস প্রাপ্তাকে উক্ত টাকা দিয়া একটি রসিদ লয়।

পোষ্টাল ইনসিওরেন্স করিয়াও টাকা পাঠান চলে।

(2) চেক (Cheque)।

অধমর্ণ (Debtor) উত্তমর্ণ (Creditor)-কে টাকা দেওয়ার জন্য ব্যাঙ্কের চেক ব্যবহার করিতে পারে।

ব্যাঙ্কে যাহার নামে হিসাব থাকে তাহাকে অর্থাৎ চেকের স্বাক্ষরকারীকে বলে 'Drawer', যে ব্যাঙ্কের উপর চেক লেখা হয় তাহাকে বলে 'Drawee' এবং যাহার নামে চেক লিখিত হয় তাহাকে বলে 'Payee'। চেকের নমুনা নীচে দেওয়া হইল।


& Co.
CLS/25 No. A392571 CALCUTTA 12.11.1960
United Bank of India Ltd.
COLLEGE STREET BRANCH
Pay Sri Pankaj Kumar Basu or ~~Bearer~~ order
Rupees Five hundred and Sixty only.
Rs. 560/-
A/c
Fol.
Entd.
C.C. Chakravorty

যে চেকে 'Bearer' কথাটি লেখা থাকে সেই চেক যে কোন লোক ব্যাঙ্কে জমা দিয়া চেকে লিখিত টাকা তুলিয়া লইতে পারে। যে চেকের উপর দুইটি সমান্তরাল

রেখা টানিয়া উহার মধ্যে '& Co.' লেখা হয় এবং 'Bearer' শব্দটি কাটিয়া 'order' কথা লেখা থাকে তাহাকে 'Crossed Cheque' বলা হয়। Crossed Cheque জমা দিয়া সরাসরি ব্যাঙ্ক হইতে টাকা তুলিয়া লওয়া যায় না। এই প্রকার চেকের টাকা ব্যাঙ্কের মারফৎ Payee-র হিসাবে জমা করা হয়। যাহার নামে চেক লেখা হয় সে অর্থাৎ Payee ইচ্ছা করিলে এই চেকের উপর অপর কাহাকেও টাকা দিয়া দেওয়ার নির্দেশ দিয়া "pay to..." লিখিয়া স্বাক্ষর করিয়া উক্ত ব্যক্তিকে টাকা দেওয়ার ব্যবস্থা করিতে পারে। চেকে এইরূপ নির্দেশ দেওয়াকে চেক 'endorse' করা বলে। যে ব্যক্তি endorse করে তাহাকে বলে 'endorser' এবং যাহার নামে endorse করা হয় তাহাকে বলে 'endorsee'।

(3) প্রমিসরি নোট (Promissory Note)।

দ্রব্য ক্রয় করিয়া বিক্রেতাকে মূল্য নগদ না দিয়া চাহিবা মাত্র বা কোন নির্দিষ্ট তারিখে দেওয়ার জন্য ক্রেতা একটি অঙ্গীকার-পত্র লিখিয়া দেয়। এই অঙ্গীকার পত্রকে প্রমিসরি নোট বলে।

প্রমিসরি নোটের নমুনা—

> Stamp
>
> 11, A. B. C. Road,
> Calcutta
> 24th December, 1960
>
> Rs. 700/-
>
> Three months after date, I promise to pay.........
> .... the sum of Rupees Seven hundred only, for value received,
>
> X. Y. Z.

(4) বিল বা হুণ্ডি (Bill of Exchange)।

কোন দ্রব্য ধারে বিক্রয় করিবার সময় বিক্রেতা ক্রেতাকে একটি লিখিত আদেশ পাঠায়। উহাতে লেখা থাকে যে ক্রেতা দ্রব্যমূল্য বাবদ নির্দিষ্ট টাকা নির্দিষ্ট সময়

অন্তে বিক্রেতাকে বা বিক্রেতার নির্দেশ মত অপর কোন ব্যক্তিকে দিবে। এই লিখিত আদেশকে বিল বা হুণ্ডি (Bill of exchange) বলে। ক্রেতা বিল পাইয়া বিলের উপর 'accepted' (স্বীকৃত) কথাটি লিখিয়া নীচে নিজের নাম স্বাক্ষর করে এবং বিক্রেতাকে বিলটি পাঠাইয়া দেয়।

বিলের নমুনা—

Stamp

3/1, ...Street,
Calcutta,
15th December, 1960

Rs. 1750/-

Accepted
Payable at United Bank
of India Ltd., College
Street Branch.
A. B. C.

Three months after date pay to me or my order the sum of Rupees one thousand seven hundred and fifty only for value received.

X. Y. Z.

To
Sri A. B. C.
College Street,
Calcutta

নির্দিষ্ট সময়ান্তে বিক্রেতা বা তাহার কোন প্রতিনিধি বা বিক্রেতার নির্দেশ মত অপর কোন ব্যক্তি ক্রেতার নিকট হইতে বা ক্রেতার নির্দেশ মত ব্যাঙ্ক হইতে বিলটি জমা দিয়া টাকা তুলিয়া লয়।

বিলের লিখিত সময়ের পূর্বেই বিলের মালিকের টাকার প্রয়োজন হইলে সে ঐ বিল কোন ব্যাঙ্কে জমা দিয়া তাহার পরিবর্তে নগদ টাকা পাইতে পারে। ইহাকে বিল ভাঙ্গান (Discounting a bill) বলে।

বিল ভাঙ্গাইলে বিলের লিখিত সম্পূর্ণ মূল্য পাওয়া যায় না। বিল ভাঙ্গাইবার সময় পূর্ণ হইতে যত দিন বাকী থাকে ব্যাঙ্ক কোন নির্দিষ্ট হারে তত দিনের সুদ কাটিয়া লইয়া বাকী টাকা বিলের মালিককে দিয়া দেয়। ব্যাঙ্ক যে সুদ কাটিয়া রাখে তাহাকে **ব্যাঙ্কারের বাটা** বা **ব্যাজ** (Banker's Discount বা Commercial Discount) বলে।

বিলের টাকা পরিশোধের যে নির্দিষ্ট তারিখ থাকে প্রয়োজন হইলে ক্রেতা বা অধমর্ণ তাহার পর 3 দিনের মধ্যে বিলের টাকা দিতে পারে। এই অতিরিক্ত 3 দিনকে অনুগ্রহের তিন দিন (Three days of grace) বলা হয়। ব্যাঙ্ক বিল ভাঙ্গাইয়া টাকা দেওয়ার সময় এই তিন দিনের সুদও কাটিয়া রাখে।

বিলে লিখিত সময়ানুসারে যে তারিখে বিলের টাকা দেয় সেই তারিখে বিলটি নামে মাত্র দেয় (Nominally due) এবং অনুগ্রহের তিন দিন ধরিয়া যে তারিখে টাকা দেয় সেই তারিখে উহা আইনতঃ দেয় (Legally due)।

উদাহরণ। মার্চ মাসের 4 তারিখে লিখিত 10 মাস পরে দেয় 25500 টাকার একখানি বিল পরবর্তী আগষ্ট মাসের 14 তারিখে ব্যাঙ্কে ভাঙ্গান হইল। সুদের হার 5 % হইলে ব্যাঙ্কারের বাটা কত এবং বিলের মালিক বিল ভাঙ্গাইয়া কত টাকা পাইবে নির্ণয় কর।

মার্চ মাসের 4 তারিখে লিখিত 10 মাস পরে দেয় বিল পরবর্তী বৎসরের জানুয়ারী মাসের 4 তারিখে নামে মাত্র দেয় এবং অনুগ্রহের তিন দিন লইয়া উহা জানুয়ারী মাসের 7 তারিখে আইনতঃ দেয়। 14-ই আগষ্ট বিল ভাঙ্গান হইল। 14-ই আগষ্ট হইতে 7-ই জানুয়ারী পর্যন্ত সময়

আ. সে. অ. ন. ডি. জা.

$$=(31-14)+30+31+30+31+7=146 \text{ দিন} = \tfrac{2}{5} \text{ বৎসর।}$$

এখন, 100 টাকার 1 বৎসরের সুদ = 5 টাকা

$\therefore$ 1 „ 1 „ „ $= \frac{5}{100}$ টাকা

$\therefore$ 25500 „ $\frac{2}{5}$ „ „ $= \dfrac{5 \times 25500 \times 2}{100 \times 5}$ টাকা = 510 টাকা

$\therefore$ ব্যাঙ্কারেরবাটা = 510 টাকা

এবং বিলের মালিক পাইবে (25500 – 510) টাকা = 24990 টাকা।

(5) ড্রাফ্‌ট (**Draft**)।

ক্রেতা ও বিক্রেতা পরস্পর বহুদূরে থাকিলে প্রত্যেকেরই প্রত্যক্ষভাবে প্রাপ্য টাকার আদান প্রদান সর্বত্র সম্ভব নহে। এইরূপ স্থলে ড্রাফ্‌টের সাহায্যে টাকা আদায়ের ব্যবস্থা প্রচলিত আছে। বিক্রেতা মাল পাঠাইবার সময় মালের মূল্য সম্বলিত চালান এবং মাল পাঠাইবার রেলওয়ে বা এয়ারওয়ে রসিদ ক্রেতার নির্দেশমত ব্যাঙ্কে পাঠায়। ক্রেতা চালানের টাকা দিয়া ব্যাঙ্কের নিকট হইতে রেলওয়ে বা এয়ারওয়ে রসিদ ছাড়াইয়া লয়। এই ব্যাঙ্ক চালানের সমমূল্যের একখানি চেক বিক্রেতাকে পাঠায়। বিক্রেতা উহা এই ব্যাঙ্কের কোন শাখায় বা অপর কোন স্থানীয় ব্যাঙ্কে সহজে ভাঙ্গাইয়া লইতে পারে।

কোন ব্যাঙ্ক স্বদেশে বা বিদেশে অবস্থিত উহার কোন শাখা অফিসকে বা উহার কোন এজেন্টকে প্রাপ্তা (Payee)-কে কোন নির্দিষ্ট অর্থ দেওয়ার জন্য যে লিখিত আদেশ দেয় তাহাকে **ড্রাফ্‌ট (Draft)** বলে। ড্রাফ্‌টের নমুনা—

United Bank of India Ltd.
Calcutta.

Rs. .... Dated,...........

On demand pay to...
or order the sum of Rupees.................................for
value received.

To For United Bank of India Ltd.
United Bank of India Ltd. ....Agent
.................Branch ....Accountant

বৈদেশিক মুদ্রা বিনিময়

5. বিভিন্ন দেশে বিভিন্ন প্রকারের মুদ্রা প্রচলিত। যে প্রণালী দ্বারা এক দেশীয় মুদ্রার মানকে অপর এক দেশীয় মুদ্রার মানে পরিবর্তিত করা যায় তাহাকে **মুদ্রা বিনিময় বা পরিবর্তন** (Exchange) বলে।

দুই দেশের মধ্যে এক দেশের কোন মুদ্রার বিনিময়ে অপর দেশে যে পরিমাণ মুদ্রা পাওয়া যায় তাহাকে **বিনিময়ের হার** (Rate or course of exchange) বলে।

সকল দেশেই প্রচলিত মুদ্রা ধাতু-নির্মিত। অনেক দেশের প্রচলিত প্রধান মুদ্রা স্বর্ণ-নির্মিত, আবার কোন কোন দেশের প্রচলিত প্রধান মুদ্রা রৌপ্য-নির্মিত। দুই দেশের প্রধান মুদ্রার মধ্যে যে পরিমাণ স্বর্ণ বা রৌপ্য থাকে তাহাদের প্রকৃত মূল্যের অনুপাত ধরিয়াই দুই দেশের মধ্যে মুদ্রা বিনিময়ের হার নির্দিষ্ট করা হয়। দুই দেশের মুদ্রার প্রকৃত মূল্যের (স্বর্ণ বা রৌপ্যের পরিমাণ অনুযায়ী) অনুপাতকে **বিনিময়ের সমতা** (Par of exchange) বলে। একখানি ইংলণ্ডীয় মুদ্রা সভারিণ বা পাউণ্ডে একখানি ফরাসী দেশীয় মুদ্রা নেপোলিয়ানের (=20 ফ্রাঙ্ক) 1·26 গুণ স্বর্ণ আছে। সুতরাং বিনিময়ের সমতা হিসাবে 1 পাউণ্ড = 1·26 নেপোলিয়ান = 25·20 ফ্রাঙ্ক।

বিবিধ আন্তর্জাতিক কারণে ও অতিরিক্ত নোটের প্রচলনের জন্য বিনিময়ের সমতা সর্বদা ঠিক থাকে না।

6. এক দেশ হইতে অপর দেশে অর্থ প্রেরণের প্রয়োজন হইলে প্রকৃত-পক্ষে এক দেশের মুদ্রা অপর দেশে পাঠান হয় না। যদি পার্সেল করিয়া এক দেশের মুদ্রা অন্য দেশে পাঠান হয়, তাহাতেও কোন লাভ হয় না, কারণ এক দেশের মুদ্রা অপর দেশে চলে না। বিভিন্ন দেশে অর্থ প্রেরণ করার প্রণালী উদাহরণ সাহায্যে বুঝাইয়া দেওয়া হইতেছে।

কলিকাতার ব্যবসায়ী **ক** লণ্ডনের ব্যবসায়ী **খ**-এর নিকট 1000 পাউণ্ড মূল্যের মাল খরিদ করিবে। এখন **ক** কি ভাবে **খ**-কে 1000 পাউণ্ড পাঠাইবে ? **ক** কোন প্রথম শ্রেণীর ব্যাঙ্কে গিয়া দেখিল ইংলণ্ড ও ভারতবর্ষের বিনিময়ের হার 1 টাকা = 1 শি. 6 পে.। এই হিসাবে 1000 পাউণ্ড = $13333\frac{1}{3}$ টা.। **ক** ব্যাঙ্কে $13333\frac{1}{3}$ টা. জমা দিয়া তৎপরিবর্তে ব্যাঙ্ক হইতে একখানি 1000 পাউণ্ডের বৈদেশিক বিল (Foreign Bill of Exchange) পাইল। এই বিলে লেখা থাকিবে লণ্ডনে কোন্ ব্যাঙ্কে ইহা জমা দিলে 1000 পাউণ্ড পাওয়া যাইবে। **ক** এই বিল লণ্ডনে **খ**-এর নিকট ডাকযোগে পাঠাইয়া দিল। **খ** এই বিল পাইয়া লণ্ডনে নির্দিষ্ট ব্যাঙ্কে জমা দিল এবং ব্যাঙ্ক হইতে 1000 পাউণ্ড পাইল।

কয়েকটি দেশের মধ্যে প্রথম ও দ্বিতীয়ের বিনিময়ের হার, দ্বিতীয় ও তৃতীয়ের বিনিময়ের হার, তৃতীয় ও চতুর্থের বিনিময়ের হার, এই প্রকার বিভিন্ন হার যদি দেওয়া থাকে, তাহা হইলে, শৃঙ্খল নিয়মের সাহায্যে, প্রথম ও শেষ দেশের বিনিময়ের হার নির্ণয় করা যায়। এই প্রকার বিনিময়ের হার নির্ণয়কে **সালিশী বিনিময়** (Arbitration of exchange) এবং লব্ধ হারকে **সালিশীকৃত হার** (Arbitrated rate) বলে।

বিনিময়ের হার সমতা অপেক্ষা অধিক হইলে তাহাকে **অধিহার** (Premium) এবং সমতা অপেক্ষা কম হইলে তাহাকে **উনহার** (Discount) বলে।

উদা 1. ভারতীয় মুদ্রায় 225 পাউণ্ডের বিলের মূল্য কত? (বাজার-দর 1 টাকা = 1 শি. 4 পে.)

$$1 \text{ শি. } 4 \text{ পে.} = \tfrac{1}{15} \text{ পা.}$$

$$\text{নির্ণেয় মূল্য} = \frac{225 \text{ পা.}}{1 \text{ শি. } 4 \text{ পে.}} \text{ টাকা} = \frac{225}{\frac{1}{15}} \text{ টাকা}$$

$$= 225 \times 15 \text{ টাকা} = 3375 \text{ টাকা।}$$

উদা. 2. বিনিময়ের সমতা 1 টাকা = 2 শিলিং, এবং ইংলণ্ডের মুদ্রার অধিহার (Premium) 15 % হইলে, 17250 টাকার বিনিময়ে কত পাউণ্ড পাওয়া যাইবে?

বিনিময়ের সমতায় 2 শি. = 1 টাকা ;

$\therefore$ 15 % অধিহারে 2 শি. $= 1 \times \frac{115}{100}$ টাকা $= \frac{23}{20}$ টাকা।

$\therefore$ 1 টাকা $= \frac{20}{23} \times 2$ শি. $= \frac{2}{23}$ পাউণ্ড।

$\therefore$ 17250 টাকা $= \frac{2}{23} \times 17250$ পাউণ্ড $= 1500$ পাউণ্ড।

উদা. 3. বোম্বাই হইতে কোন ব্যবসায়ী লণ্ডনে অপর এক ব্যবসায়ীর নিকট 1000 পাউণ্ড পাঠাইতে গিয়া লক্ষ্য করিল যে, সে যদি লণ্ডনে সোজাসুজি না পাঠাইয়া প্যারিসের মারফৎ পাঠায় তবে তাহার 200 টাকা বাঁচে। বোম্বাই ও প্যারিসের বিনিময়ের হার 2016 ফ্রাঙ্ক = 617 টাকা এবং লণ্ডন ও প্যারিসের বিনিময়ের হার 50·40 ফ্রাঙ্ক = 1 পাউণ্ড হইলে, লণ্ডন ও বোম্বাইয়ের বিনিময়ের হার কত?

[বোম্বাই প্র. 1922]

1000 পাউণ্ড = x টাকা (ধর)

617 টাকা = 2016 ফ্রাঙ্ক

50·40 ফ্রাঙ্ক = 1 পাউণ্ড

$$\therefore \quad x = \frac{1000 \times 617 \times 50{\cdot}40}{2016} \text{ টাকা} = 15425 \text{ টাকা।}$$

তাহা হইলে, লণ্ডন ও বোম্বাইয়ের বিনিময়ের হারে,

1000 পাউণ্ড = (15425 + 200) টাকা = 15625 টাকা।

$\therefore$ 1 পাউণ্ড $= \frac{15625}{1000}$ টাকা $= 15{\cdot}625$ টাকা।

প্রশ্নমালা 32

1. বিনিময়ের হার 1 টাকা = 1 শি. 5 পে. হইলে, 11000 টাকা কত পাউণ্ডের সমান ?

2. 1 ডলার = 4 শি. 2 পে. ও 1 টাকা = 1 শি. 6 পে. হইলে, 675 ডলারকে ভারতীয় মুদ্রায় পরিবর্তিত কর।

3. ভারতবর্ষ ও লণ্ডনের মধ্যে বিনিময়ের সমতা 2 শিলিং = 1 টাকা এবং শিলিং-এর বাজার-দর বিনিময়ের সমতা অপেক্ষা 10 % বেশী হইলে, 11550 টাকাকে ইংলণ্ডীয় মুদ্রায় পরিণত কর।

4. যদি ভারতীয় 10 টাকার বিনিময়ে ইংলণ্ডীয় 15 শিলিং পাওয়া যায়, এবং লণ্ডনের 5 শিলিংএর বিনিময়ে প্যারিসের 6 ফ্রাঙ্ক পাওয়া যায়, তবে ভারতীয় কত টাকার পরিবর্তে প্যারিসের 450 ফ্রাঙ্ক পাওয়া যাইবে ?

5. ভারতবর্ষে 1 টাকার বিনিময়ে ইংলণ্ডের 1 শি. 9 পে. পাইলে যদি $16\frac{2}{3}$ % লাভ হয়, তবে বিনিময়ের সমতা কত ?

6. লণ্ডনে কোন এজেন্টকে পাঠাইবার জন্য 45900 টাকা একটি ব্যাঙ্কে জমা দিলাম। বিনিময়ের হার 1 টাকা = 1 শি. 4 পে.। লণ্ডনে এজেন্ট যত পাইবে তাহার উপর 2 % হারে ব্যাঙ্ককে দিতে হইল। লণ্ডনের এজেন্ট কত পাইল ?

7. নিউইয়র্কের কোন ব্যবসায়ী লণ্ডনের কোন ব্যবসায়ীর নিকট 5000 ডলার মূল্যের মাল ক্রয় করিল। যদি 1 ডলার, 4 শি. 6 পে.-এর সমান হয়, এবং লণ্ডনের মুদ্রার অধিহার $9\frac{1}{2}$ % হয়, তাহা হইলে নিউইয়র্কের ব্যবসায়ী ইংলণ্ডীয় মুদ্রায় কত দিয়া লণ্ডনের ব্যবসায়ীর প্রাপ্য শোধ করিবে ?

8. 5-ই মার্চ লিখিত 4 মাস পরে দেয় 2525 টাকার একখানি বিল 26-শে এপ্রিল ভাঙ্গান হইল। সুদের হার 5 % হইলে ব্যাঙ্কারের বাটা কত এবং বিলের মালিক বিল ভাঙ্গাইয়া কত পাইবে নির্ণয় কর।

9. 31-শে জুলাই লিখিত 2 মাস পরে দেয় 1460 পাউণ্ডের একখানি বিল 3-রা সেপ্টেম্বর ভাঙ্গান হইল। সুদের হার 4 % হইলে ব্যাঙ্কারের বাটা নির্ণয় কর।

10. 5 % হারে 3300 টাকার একখানি বিল 16-ই এপ্রিল ব্যাঙ্কে ভাঙ্গাইয়া 3234 টাকা পাওয়া গেল। বিল কোন্ তারিখে দেয় ?

পরিমিতি

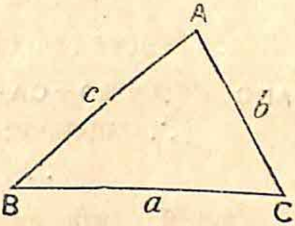
(MENSURATION)

প্রথম অধ্যায়

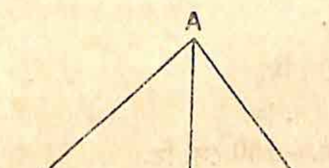
ত্রিভুজ ও বৃত্ত

1. আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল ও আয়তঘন বা চৌপলের ঘনফল অষ্টম শ্রেণীর পাঠ্যাংশের অন্তর্গত। এস্থলে ত্রিভুজ ও বৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের সূত্রগুলি প্রদত্ত হইল।

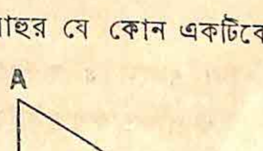
2. ABC ত্রিভুজে BAC, ABC ও BCA কোণগুলিকে যথাক্রমে A, B ও C দ্বারা এবং উক্ত কোণগুলির বিপরীত বাহুগুলিকে যথাক্রমে a, b ও c দ্বারা সূচিত করা হইয়া থাকে।



3. কোন ত্রিভুজের যে কোন বাহুকে ভূমি ধরা হইলে উহার বিপরীত শীর্ষ হইতে ঐ ভূমির উপর পাতিত লম্বকে ঐ ত্রিভুজের **উন্নতি** বা **উচ্চতা** (Altitude or Height) বলে। ABC ত্রিভুজের BC বাহুকে ভূমি ধরা হইলে এবং A হইতে BC-এর উপর AD লম্ব টানা হইলে, AD ত্রিভুজটির উন্নতি।



সুতরাং সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ভিন্ন অপর দুই বাহুর যে কোন একটিকে ভূমি ধরিলে অপরটি হইবে উহার উন্নতি। ABC সমকোণী ত্রিভুজের AC অতিভুজ ; সুতরাং BCকে ভূমি ধরা হইলে, AB হইবে উহার উন্নতি ; আবার ABকে ভূমি ধরিলে, BC হইবে উহার উন্নতি।



সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের বর্গ উহার অপর বাহুদ্বয়ের বর্গের সমষ্টির সমান। সুতরাং ABC ত্রিভুজের B কোণ সমকোণ হইলে,

$$b^2 = a^2 + c^2 \quad \therefore \quad b = \sqrt{a^2 + c^2}$$

আবার $a^2 = b^2 - c^2 \quad \therefore \quad a = \sqrt{b^2 - c^2}$

তদ্রূপ $c = \sqrt{b^2 - a^2}$

উদা. 1. কোন সমকোণী ত্রিভুজের বাহু দুইটির দৈর্ঘ্য 3·9 সে. মি. ও 5·2 সে. মি. হইলে, উহার কর্ণের দৈর্ঘ্য কত ?

কর্ণের দৈর্ঘ্য = $\sqrt{(3{\cdot}9)^2 + (5{\cdot}2)^2}$ সে. মি. = $\sqrt{15{\cdot}21 + 27{\cdot}04}$ সে. মি.

= $\sqrt{42{\cdot}25}$ সে. মি. = 6·5 সে. মি.

4. ত্রিভুজের তিন বাহুর সমষ্টিকে উহার **পরিসীমা** (Perimeter) বলে। ABC ত্রিভুজের BC + CA + AB = $a + b + c$ ঐ ত্রিভুজের পরিসীমা।

$\therefore$ সাধারণতঃ $a + b + c$ কে $2s$ দ্বারা সূচিত করা হয়।

$$\therefore \quad s = \tfrac{1}{2}(a + b + c)$$

উদা. 2. কোন সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ 65 সে. মি. এবং একটি বাহু 25 সে. মি. হইলে ত্রিভুজটির পরিসীমা কত ?

ত্রিভুজের তৃতীয় বাহু = $\sqrt{(65)^2 - (25)^2}$ সে. মি.

= $\sqrt{(65 + 25)(65 - 25)}$ সে. মি.

= $\sqrt{90 \times 40}$ সে. মি. = 60 সে. মি.

$\therefore$ ত্রিভুজটির পরিসীমা = 65 + 25 + 60 সে. মি. = 150 সে. মি.

5. ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের সূত্র ঃ

ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}$ × ভূমি × উন্নতি ......(1)

= $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ......(2)

(এস্থলে s অর্ধ পরিসীমা)

উল্লিখিত সূত্র দুইটির প্রমাণ জ্যামিতি অংশের 35 ও 51 পৃষ্ঠায় আছে।

সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}$ × (অতিভুজ ব্যতীত অপর বাহুদ্বয়ের গুণফল)

সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল = $\frac{\sqrt{3}}{4}$ × (বাহু)^2

উদা. 3. কোন ত্রিভুজের ভূমি 18 ফুট এবং উন্নতি 7 ফুট ; উহার ক্ষেত্রফল কত ?

ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times 18 \times 7$ বর্গফুট $= 63$ বর্গফুট।

উদা. 4. কোন সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ভিন্ন অপর বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য 12 ফুট ও 10 ফুট ; উহার ক্ষেত্রফল কত ?

নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times 12 \times 10$ বর্গফুট $= 60$ বর্গফুট।

উদা. 5. কোন ত্রিভুজাকার জমির তিন ধারের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 40 ফুট, 60 ফুট এবং 80 ফুট ; ঐ জমির ক্ষেত্রফল কত ?

এস্থলে $s = \frac{1}{2}(40 + 60 + 80) = 90$ ফুট ;

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= \sqrt{90(90-40)(90-60)(90-80)}$ বর্গফুট

$= \sqrt{90 \times 50 \times 30 \times 10}$ বর্গফুট

$= \sqrt{1350000}$ বর্গফুট $= 1161{\cdot}9$ বর্গফুট (প্রায়)।

উদা. 6. কোন ত্রিভুজাকার জমির প্রত্যেক ধারের দৈর্ঘ্য 50 চেন ; উহার ক্ষেত্রফল কত একর ?

[1 চেন $= 22$ গজ, $\therefore$ 1 বর্গচেন $= 22 \times 22$ বর্গগজ।]

উক্ত জমির ক্ষেত্রফল $= \frac{\sqrt{3}}{4} \times 50^2$ বর্গচেন $= 625\sqrt{3}$ বর্গচেন

$= 1082{\cdot}5$ বর্গচেন $= 1082{\cdot}5 \times 22 \times 22$ বর্গগজ

$= \frac{1082{\cdot}5 \times 22 \times 22}{4840}$ একর $= 108{\cdot}25$ একর (প্রায়)

উদা. 7. কোন ত্রিভুজাকার জমির ক্ষেত্রফল 200 বর্গগজ এবং একটি কৌণিক বিন্দু হইতে উহার বিপরীত বাহুর উপর পাতিত লম্বের দৈর্ঘ্য 16 গজ ; ঐ বাহুর দৈর্ঘ্য কত ?

জমির ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ ভূমি $\times 16$ গজ $= 200$ বর্গগজ

$\therefore$ ভূমি $= \frac{200}{8}$ গজ $= 25$ গজ।

উদা. 8. কোন ত্রিভুজাকার জমির ক্ষেত্রফল 187 বর্গগজ 4 বর্গফুট 72 বর্গইঞ্চি এবং উহার ভূমি 25 গজ। উহার উন্নতি কত ?

187 ব. গ. 4 ব. ফু. 72 ব. ই. $= 187\frac{1}{2}$ বর্গগজ $= \frac{375}{2}$ বর্গগজ।

$\therefore$ $\frac{1}{2} \times 25$ গজ $\times$ উন্নতি $= \frac{375}{2}$ বর্গগজ।

$\therefore$ উন্নতি $= \frac{375 \times 2}{2 \times 25}$ গজ $= 15$ গজ।

প্রশ্নমালা 1

ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর, যাহার—

1. ভূমি $= 8$ গজ 1 ফুট এবং উন্নতি $= 7$ ফুট 6 ইঞ্চি।

2. ভূমি $= 50$ মিটার এবং উন্নতি $= 13 \cdot 5$ মিটার।

3. কোন ত্রিভুজের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য 18 গজ এবং ঐ বাহুর বিপরীত শীর্ষ হইতে উহার উপর পাতিত লম্বের দৈর্ঘ্য 16 ফুট। ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

ABC ত্রিভুজের $\angle A$ সমকোণ ; উহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর, যদি—

4. $AB = 8$ মিটার এবং $AC = 7 \cdot 5$ মিটার।

5. $AB = 10 \cdot 6$ ফুট এবং $AC = 8$ ফুট।

6. $AB = 12$ মিটার এবং $BC = 20$ মিটার।

7. $AB = 2 \cdot 1$ ফুট এবং $BC = 3 \cdot 5$ ফুট।

ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে ; ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর :

8. 6 ফুট, 8 ফুট, 10 ফুট। **9.** 5 মিটার, 12 মিটার, 13 মিটার।

10. 10·2 ফুট, 13·6 ফুট, 17 ফুট। **11.** 25 মিটার, 35 মিটার, 20 মিটার।

12. যে সমবাহু ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য 16 ফুট, তাহার ক্ষেত্রফল কত ?

13. কোন সমবাহু ত্রিভুজের প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য 20 মিটার ; উহার ক্ষেত্রফল কত ?

14. কোন সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ভিন্ন অপর বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য 6 ফুট এবং 4·5 ফুট হইলে, উহার ক্ষেত্রফল কত ?

15. কোন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল 200 বর্গমিটার ; ইহার ভূমি 12·5 মিটার হইলে, উন্নতি কত ?

16. যে ত্রিভুজের ভূমি 6 ফুট 8 ইঞ্চি এবং ক্ষেত্রফল 54 বর্গফুট, তাহার উন্নতি কত ?

17. কোন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল 198·4 বর্গফুট ; ইহার উন্নতি 12·8 ফুট হইলে, ভূমির দৈর্ঘ্য কত ?

18. কোন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল 11·25 বর্গ সেন্টিমিটার এবং উন্নতি 4·5 সেন্টিমিটার হইলে, ভূমি কত ?

19. ত্রিভুজাকার একখানি জমির ভূমি 5 চেন এবং উন্নতি 3 চেন ; প্রতি বিঘা 2·50 টাকা হিসাবে ঐ জমির খাজনা কত ?

দ্রষ্টব্য। চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল বিষয়ক সূত্রাবলী ও অনুশীলনী জ্যামিতি অংশের 36—37পৃষ্ঠায় আছে।

বৃত্তের পরিধি ও ক্ষেত্রফল

6. কোন বৃত্তের পরিধি ও ব্যাসের অনুপাত ধ্রুবক এবং এই অনুপাতকে π (পাই) বলা হয়, অর্থাৎ $\frac{\text{পরিধি}}{\text{ব্যাস}} = \pi$.

ব্যবহারিক পরীক্ষা দ্বারা π-এর মান স্থূলভাবে $\frac{22}{7}$ এবং সূক্ষ্মভাবে 3·1415927 স্থির করা হইয়াছে।

বিশেষ কিছু উল্লেখ না থাকিলে π-এর মান $\frac{22}{7}$ ধরিয়াই সাধারণতঃ অঙ্ক কষিতে হয়।

7. বৃত্তের পরিধি ও ক্ষেত্রফলের সূত্র ঃ

(1) বৃত্তের পরিধি = ব্যাস × π = 2 × ব্যাসার্ধ × $\pi = 2\pi r = \pi d$

(এস্থলে r = ব্যাসার্ধ এবং d = ব্যাস)

(2) বৃত্তের ক্ষেত্রফল = π × (ব্যাসার্ধ)$^2 = \pi r^2$ (এস্থলে r = ব্যাসার্ধ)

উদা. 1. একটি আধুলির ব্যাস 1 ইঞ্চি ; ইহার পরিধি কত ?

পরিধি = $1 \times \frac{22}{7}$ ইঞ্চি = $3\frac{1}{7}$ ইঞ্চি।

উদা. 2. একখানি রেলগাড়ীর চাকার ব্যাস 3 ফুট ; প্রতি 3 সেকেণ্ডে চাকাটি 7 বার আবর্তন করিলে গাড়ীর বেগ ঘণ্টায় কত মাইল ?

চাকার পরিধি = $3 \times \frac{22}{7}$ ফুট

∴ 3 সেকেণ্ডে গাড়ী চলে $\frac{3 \times 22 \times 7}{7}$ ফুট = 66 ফুট = 22 গজ।

∴ 1 ঘন্টা বা (60×60) সেকেণ্ডে গাড়ী চলে $\frac{22 \times 60 \times 60}{3}$ গজ

$= \frac{22 \times 60 \times 60}{3 \times 1760}$ মাইল $= 15$ মাইল।

∴ গাড়ীর বেগ ঘন্টায় 15 মাইল।

উদা. 3. একখানি সাইকেলের চাকা 1 ফার্লং যাইতে 70 বার ঘোরে। উহার ব্যাসার্ধ কত ?

চাকাটি 220 গজ যাইতে 70 বার ঘোরে, সুতরাং উহার পরিধি

$= \frac{220}{70}$ গজ $= \frac{66}{7}$ ফুট।

∴ $2 \times$ ব্যাসার্ধ $\times \frac{22}{7} = \frac{66}{7}$ ফুট।

∴ ব্যাসার্ধ $= \frac{66 \times 7}{7 \times 2 \times 22}$ ফুট $= \frac{3}{2}$ ফুট $= 1$ ফুট 6 ইঞ্চি।

উদা. 4. যে বৃত্তের ব্যাসার্ধ 1 ফুট 9 ইঞ্চি, তাহার ক্ষেত্রফল কত ?

ক্ষেত্রফল $= \frac{22}{7} \times (1\frac{3}{4})^2$ বর্গফুট $= \frac{22}{7} \times \frac{7}{4} \times \frac{7}{4}$ বর্গফুট

$= \frac{77}{8}$ বর্গফুট $= 9$ বর্গফুট 90 বর্গ ইঞ্চি।

উদা. 5. বৃত্তাকার একখণ্ড জমির ক্ষেত্রফল 3·85 একর; উহার ব্যাসার্ধ কত ?

$\frac{22}{7} \times$ (ব্যাসার্ধ $)^2 = 3{\cdot}85 \times 4840$ বর্গগজ।

∴ ব্যাসার্ধ $= \sqrt{\frac{3{\cdot}85 \times 4840 \times 7}{22}}$ গজ $= \sqrt{3{\cdot}85 \times 220 \times 7}$ গজ

$= \sqrt{38{\cdot}5 \times 22 \times 7}$ গজ $= \sqrt{\frac{77}{2} \times 2 \times 11 \times 7}$ গজ $= 77$ গজ।

প্রশ্নমালা 2

(নিম্নলিখিত প্রশ্নে $\pi = \frac{22}{7}$ ধরিয়া উত্তর নির্ণয় করিবে।)

1. যে বৃত্তের ব্যাসার্ধ 4 গজ 2 ফুট, তাহার পরিধি কত ?

2. যে বৃত্তের ব্যাসার্ধ 7·7 কিলোমিটার, তাহার পরিধি কত ?

3. 4 গজ 1 ফুট 5 ইঞ্চি ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের পরিধির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

4. কোন বৃত্তের ব্যাস 1 ফুট 9 ইঞ্চি ; ইহার পরিধির দৈর্ঘ্য কত ?

5. যে বৃত্তের পরিধি অর্ধমাইল, তাহার ব্যাসার্ধ কত ?

6. 176 কিলোমিটার পরিধিবিশিষ্ট একটি বৃত্তাকার মাঠের ব্যাসের দৈর্ঘ্য কত ?

7. কোন বৃত্তের ব্যাস 14 সেন্টিমিটার ; উহার পরিধির দৈর্ঘ্য এবং ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

8. বৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর, যখন ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য—

(1) 2 গজ 1 ফুট, (2) 1 ফুট 2 ইঞ্চি, (3) 2 ফুট 11 ইঞ্চি।

9. ধর পৃথিবী সম্পূর্ণ গোলাকার এবং উহার পরিধি 25000 মাইল। উহার ব্যাসার্ধ কত ? আসন্ন মাইলে উত্তর নির্ণয় কর।

10. একখানি রেলগাড়ীর চাকার ব্যাস 3 ফুট ; প্রতি সেকেণ্ডে চাকাটি 3 বার ঘুরিলে গাড়ীর বেগ ঘণ্টায় কত মাইল নির্ণয় কর।

11. সাইকেলের 26 ইঞ্চি ব্যাসের চাকা $3\frac{1}{4}$ মাইল পথ যাইতে কতবার আবর্তন করে ?

12. একটি অর্ধবৃত্তের পরিসীমা উহার ব্যাস অপেক্ষা 8 ফুট দীর্ঘতর। অর্ধবৃত্তের ক্ষেত্রফল কত ?

13. দুইটি এককেন্দ্রীয় বৃত্তের ব্যাস 8 ইঞ্চি ও 6 ইঞ্চি। পরিধি দুইটির অন্তর্গত ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত ?

14. বৃত্তাকার দুইটি স্বর্ণখণ্ডের ব্যাসার্ধের অনুপাত 2 : 3 এবং উহাদের বেধের অনুপাত 9 : 10। বৃহত্তর খণ্ডের মূল্য 7 টাকা 50 ন. প. হইলে, ক্ষুদ্রতর খণ্ডের মূল্য কত ?

15. একটি বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা একটি বৃত্তের পরিধির সমান। বৃত্তের ব্যাসার্ধ 3 ফুট 6 ইঞ্চি হইলে, বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য কত ?

16. একটি অর্ধবৃত্তের পরিসীমা 18 সেন্টিমিটার হইলে, উহার ব্যাসার্ধ কত ?

17. বৃত্তাকার একখণ্ড জমি বহির্দেশে সমান প্রস্থ বিশিষ্ট একটি পথ দ্বারা পরিবেষ্টিত। পথের বহিঃস্থ সীমারেখা (পরিধি) অন্তঃস্থ সীমারেখা হইতে 44 গজ দীর্ঘতর হইলে, পথের প্রস্থ কত ?

18. একটি অর্ধবৃত্তাকার বাগানের ব্যাস 17 গজ 1 ফুট 6 ইঞ্চি। প্রতি গজ 4 টাকা দরে এই বাগান বেড়া দিয়া ঘিরিতে কত ব্যয় হইবে ?

দ্বিতীয় অধ্যায়

ঘনক্ষেত্রের তলপরিমাণ ও ঘনপরিমাণ

চৌপল ও ঘনক

(Parallelepiped and Cube)

1. এই পুস্তকের পাটীগণিত অংশে নবম শ্রেণীর পাঠ্যাংশের সপ্তম অধ্যায়ে ঘনপরিমাণ বিষয়ক বিস্তৃত আলোচনা করা হইয়াছে। এস্থলে কয়েকটি উদাহরণ ও একটি প্রশ্নমালা দেওয়া হইল।

2. আয়তঘনের ঘনফল = দৈর্ঘ্য × বিস্তার × বেধ ; সুতরাং আয়তঘনের ঘনফলকে যে কোন একটি মাত্রা (দৈর্ঘ্য, বিস্তার বা বেধের যে কোন একটি) দ্বারা ভাগ করিলে অপর দুইটি মাত্রাবিশিষ্ট আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল পাওয়া যায় এবং ঘনফলকে দুই মাত্রাবিশিষ্ট আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল দ্বারা ভাগ করিলে তৃতীয় মাত্রা পাওয়া যায়।

ঘনকের ঘনফলের ঘনমূল নির্ণয় করিলে ছয়টি সমান বর্গাকার ক্ষেত্রের যে কোন একটির বাহু পাওয়া যায়।

উদা. 1. ঢাকনি সমেত একটি বাক্সের বহির্দেশের মাপ যথাক্রমে 21 ইঞ্চি, 17 ইঞ্চি এবং 16 ইঞ্চি। বাক্সটি যদি $\frac{1}{2}$ ইঞ্চি তক্তা দ্বারা নির্মিত হইয়া থাকে তাহা হইলে উহার ভিতরের ঘনফল কত এবং উহা নির্মাণে কত ঘনফুট কাঠ লাগিয়াছে ?

বাহিরের মাপে বাক্সটির ঘনফল = $21 \times 17 \times 16$ ঘন ইঞ্চি = 5712 ঘ. ই.।

বাক্সটির ভিতরের ঘনফল = $(21-1)(17-1)(16-1)$ ঘন ইঞ্চি

= $20 \times 16 \times 15$ ঘ. ই.

= 4800 ঘ. ই, = $2\frac{7}{9}$ ঘন ফুট।

∴ কাঠের ঘনফল = $(5712-4800)$ ঘন ই.

= 912 ঘ. ই. = $\frac{19}{36}$ ঘন ফুট।

উদা. 2. একটি চৌবাচ্চার ভিতরের দিকের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ এবং গভীরতা যথাক্রমে 3 ফুট, 2 ফুট 6 ইঞ্চি এবং 7 ফুট। চৌবাচ্চাটিতে কত গ্যালন জল ধরে

এবং ঐ জলের ওজন কত পাউণ্ড ? (যদি 1 পাইন্ট = 34·7 ঘ. ই. এবং 1 গ্যালন জলের ওজন = 10 পাউণ্ড হয়।) [C. U. 1944]

3 ফুট = 36 ই. ; 2 ফু. 6 ই. = 30 ই. ; 7 ফুট = 84 ই.

চৌবাচ্চার ঘনফল = 36 × 30 × 84 ঘ. ই.

$$= \frac{36 \times 30 \times 84}{34 \cdot 7} \text{ পাইন্ট}$$

$$= \frac{36 \times 30 \times 84}{34 \cdot 7 \times 8} \text{ গ্যালন} = \frac{113400}{347} \text{ গ্যালন} = 326\tfrac{278}{347} \text{ গ্যালন।}$$

∴ চৌবাচ্চায় $326\frac{278}{347}$ গ্যালন জল ধরে

এবং এই জলের ওজন = $\frac{113400}{347} \times 10$ পাউণ্ড

$= \frac{1134000}{347}$ পাউণ্ড $= 3268\frac{4}{347}$ পাউণ্ড।

প্রশ্নমালা 3

1. 3 ইঞ্চি-বর্গ মুখবিশিষ্ট একটি নল দিয়া প্রতি মিনিটে 1333 ফুট 4 ইঞ্চি বেগে জল নির্গত হইলে 312500 পাউণ্ড জল নির্গত হইতে কত সময় লাগিবে ?

[1 ঘনফুট জলের ওজন = 1000 আউন্স]

2. একটি আয়তঘন চৌবাচ্চার দৈর্ঘ্য বিস্তারের সমান এবং গভীরতা $5\frac{5}{7}$ ফুট। যদি চৌবাচ্চায় 5 টন জল ধরে এবং প্রতি ঘনফুট জলের ওজন 1000 আউন্স হয়, তবে চৌবাচ্চার দৈর্ঘ্য ও বিস্তার কত ?

3. 5 ফুট দীর্ঘ, 4 ফুট বিস্তৃত, $3\frac{3}{8}$ ফুট গভীর একটি চৌবাচ্চায় 30 ঘনফুট জল আছে। সচ্ছিদ্র ইট এক একখানি করিয়া ঐ জলে নিক্ষেপ করিতে করিতে চৌবাচ্চার জল কানায় কানায় পূর্ণ হইল। প্রতি ইটের দৈর্ঘ্য, বিস্তার ও উচ্চতা যথাক্রমে 9 ইঞ্চি, 3 ইঞ্চি এবং $2\frac{3}{8}$ ইঞ্চি হইলে এবং প্রতি ইট নিজ আয়তনের $\frac{1}{17}$ অংশ জল শোষণ করিলে, কতগুলি ইট জলের মধ্যে নিক্ষেপ করা হইয়াছিল নির্ণয় কর।

4. 9 ফুট দীর্ঘ একখানি কড়ির ওজন $3\frac{1}{2}$ হন্দর। প্রতি ঘনফুট কড়ির ওজন 32 পাউণ্ড। যদি কড়ির এক প্রান্তের ছিন্ন তল বর্গাকার হয়, তবে কড়ির বেধ কত ?

5. $\frac{1}{2}$ ইঞ্চি পুরু তক্তা দ্বারা নির্মিত ডালা সমেত একটি বাক্সের বহির্দেশের মাপে দৈর্ঘ্য, বিস্তার ও উচ্চতা যথাক্রমে 26 ইঞ্চি, 19 ইঞ্চি ও 18 ইঞ্চি। প্রতি ঘনফুট কাঠের ওজন 40 পাউণ্ড হইলে, বাক্সটির ওজন কত ?

6. 30 ফুট দীর্ঘ, 24 ফুট বিস্তৃত এবং 18 ফুট উচ্চ একখানি ঘরের মধ্যে দীর্ঘতম কত দৈর্ঘ্যের একখানি লৌহদণ্ড স্থাপন করা যাইতে পারে ?

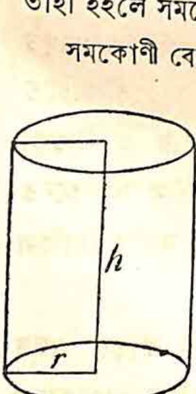
7. একটি জলাধারের দৈর্ঘ্য 24 ফুট 8 ইঞ্চি ও বিস্তার 12 ফুট 9 ইঞ্চি এবং উহা জলে পূর্ণ। ঐ জলাধার হইতে কত ঘনফুট জল তুলিয়া লইলে, জলাধারের 1 ফুট জল কমিয়া যাইবে ?

সমকোণী বেলন
(Right Circular Cylinder)

3. কোন আয়তক্ষেত্রের একটি বাহু স্থির রাখিয়া উহার চারিদিকে আয়তক্ষেত্রটিকে একটি পূর্ণ আবর্তন করাইলে যে ঘন উৎপন্ন হয় তাহাকে সমকোণী বেলন (right circular cylinder) বলে।

একখণ্ড আয়তাকার কাগজ পাকাইয়া যদি এক ধার উহার বিপরীত ধারের সহিত মিলাইয়া ধরা যায়, তাহা হইলে কাগজখানির অপর বিপরীত দুইটি ধার দুইটি সমান বৃত্তের পরিধি হইবে। এখন কাগজখানি একটি দুই দিকে উন্মুক্ত শূন্যগর্ভ বেলনের আকৃতি ধারণ করিবে এবং সমতল কাগজখানি বক্রতলে পরিণত হইবে। উন্মুক্ত বৃত্তাকার ধার দুইটি আবৃত করা হইলে একটি সমকোণী বেলন উৎপন্ন হইবে। তাহা হইলে সমকোণী বেলন দুইটি বৃত্তাকার সমতল ও একটি বক্রতল দ্বারা সীমাবদ্ধ।

সমকোণী বেলনের ভূমির ব্যাসার্ধ r এবং উচ্চতা h হইলে, উহার



(i) **বক্রতলের ক্ষেত্রফল** $= 2\pi rh.$

(ii) **বৃত্তাকার ভূমির ক্ষেত্রফল** $= \pi r^2$

(iii) **সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল** $= 2\pi rh + 2\pi r^2$

$= 2\pi r(h+r)$

সমকোণী বেলনের ঘনফল = ভূমির ক্ষেত্রফল × উচ্চতা

$= \pi r^2 \times h$

$= \pi r^2 h.$

উদা. 1. একটি সমকোণী বেলনের উচ্চতা 14 ইঞ্চি এবং ভূমির ব্যাসার্ধ $9\frac{1}{3}$ ইঞ্চি। ইহার সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল এবং ঘনফল নির্ণয় কর। ($\pi = \frac{22}{7}$)

সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল $= 2\pi r\ (h + r)$

$= 2.\frac{22}{7} \times \frac{28}{3}\ (14 + \frac{28}{3})$ বর্গ ইঞ্চি

$= \frac{176}{3} \times \frac{70}{3}$ বর্গ ইঞ্চি $= \frac{12320}{9}$ বর্গ ইঞ্চি

$= 1368\frac{8}{9}$ বর্গ ইঞ্চি।

ঘনফল $= \pi . r^2 h = \frac{22}{7} \times \frac{28}{3} \times \frac{28}{3} \times 14$ ঘন ইঞ্চি

$= \frac{34496}{9}$ ঘন ইঞ্চি $= 3832\frac{8}{9}$ ঘন ইঞ্চি।

উদা. 2. একটি সমকোণী বেলনের উচ্চতা 10 ফুট, উহার ভূমির পরিধি $3\frac{4}{5}$ ফুট; উহার বক্রতলের ক্ষেত্রফল কত? ($\pi = \frac{22}{7}$)

বক্রতলের ক্ষেত্রফল $= 2\ \pi r h$

$=$ পরিধি $\times$ উচ্চতা

$= 3\frac{4}{5} \times 10$ বর্গ ফুট $= 38$ বর্গ ফুট।

উদা. 3. একটি রোলারের দৈর্ঘ্য 5 ফুট এবং ব্যাস $4\frac{2}{3}$ ফুট; রোলারটি কতবার আবর্তন করিলে উহা 1 একর পরিমিত জমির উপর দিয়া যাইবে?

এস্থলে সমকোণী বেলনের উচ্চতা $= 5$ ফুট

এবং ভূমির ব্যাসার্ধ $= 4\frac{2}{3}$ ফুট $\div 2 = 2\frac{1}{3}$ ফুট $= \frac{7}{3}$ ফুট।

$\therefore$ বক্রতলের ক্ষেত্রফল $= 2 \times \pi \times r \times h$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{3} \times 5$ বর্গফুট

$= \frac{220}{3}$ বর্গফুট $= \frac{220}{27}$ বর্গগজ।

$\therefore$ রোলারটি প্রতি আবর্তনে যাইবে $\frac{220}{27}$ বর্গগজ

$\therefore$ 1 একর বা 4840 বর্গগজ যাইতে ইহাকে আবর্তন করিতে হইবে $(4840 \div \frac{220}{27}) = \frac{4840 \times 27}{220} = 594$ বার।

প্রশ্নমালা 4

1. সমকোণী বেলনের বক্রতলের ক্ষেত্রফল, সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল এবং ঘনফল নির্ণয় কর, যখন—

   (*i*) ভূমির ব্যাসার্ধ 5 সে. মি. এবং উচ্চতা 7 সে. মি.;

   (*ii*) ভূমির ব্যাস 8 ইঞ্চি এবং উচ্চতা 1 ফুট 2 ইঞ্চি;

   (*iii*) ভূমির ব্যাস 12 ফুট এবং উচ্চতা 3 গজ 2 ফুট।

2. এক ঘন ইঞ্চি স্বর্ণ হইতে $38\frac{1}{2}$ ইঞ্চি দীর্ঘ একটি সমকোণী বেলনের আকারের তার প্রস্তুত করা হইল ; তারের ব্যাস কত ? [Utkal U. 1944]

3. একটি সমকোণী বেলনাকৃতি প্রস্তর-স্তম্ভের উচ্চতা 12 ফুট এবং ভূমির ব্যাস 3 ফুট 6 ইঞ্চি। প্রতি বর্গফুট 5 আনা হিসাবে প্রস্তর-স্তম্ভের বক্রতল পালিশ করিবার ব্যয় নির্ণয় কর।

4. একটি সমকোণী বেলনের ভূমির ব্যাস 10 ইঞ্চি এবং উহার বক্রতলের ক্ষেত্রফল 3 বর্গগজ 118 বর্গ ইঞ্চি। উহার উচ্চতা কত ?

5. উভয় প্রান্ত খোলা একটি সমকোণী বেলনের উচ্চতা 1 ফুট ; উহা 1 ইঞ্চি পুরু এবং উহার বহির্ব্যাস 10 ইঞ্চি হইলে সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

6. কত ঘনফুট মৃত্তিকা খনন করা হইলে 6 ফুট ব্যাস ও $38\frac{1}{2}$ ফুট গভীর একটি কূপ নির্মিত হইবে ?

7. সমকোণী বেলনাকৃতি নল দ্বারা কোন চৌবাচ্চা হইতে 1 ঘণ্টায় 9240 গ্যালন জল নিকাশিত করা যায়। নল দিয়া জল যদি সমভাবে প্রতি মিনিটে 144 ফুট বেগে প্রবাহিত হয়, তবে নলের অন্তর্ব্যাসার্ধ কত ? 1 ঘনফুট $= 6\frac{1}{4}$ গ্যালন।

[Utkal U. 1950]

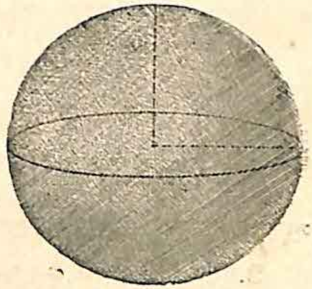
8. সমকোণী বেলনাকৃতি একটি নলের ব্যাস 2·2 ইঞ্চি। ইহা দ্বারা প্রতি মিনিটে 720 ফুট বেগে জল প্রবাহিত হয়। $5\frac{1}{2}$ ফুট দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও বেধ বিশিষ্ট একটি ঘনকাকৃতি চৌবাচ্চা পূর্ণ করিতে কত সময় লাগিবে ?

9. সমকোণী বেলনাকৃতি কোন জলাধারের উচ্চতা $12\frac{1}{2}$ ফুট এবং ইহাতে 110 হন্দর জল ধরে। 1 ঘনফুট জলের ওজন 100 আউন্স হইলে জলাধারের ভূমির ব্যাস নির্ণয় কর।

10. সমকোণী বেলনাকৃতি 1 ইঞ্চি পুরু একটি লোহার নলের দৈর্ঘ্য 6 ফুট এবং ইহার ভূমির বহির্ব্যাস 1 ফুট 10 ইঞ্চি। নলটিতে কত ঘনফুট লোহা আছে নির্ণয় কর।

গোলক (Sphere)

4. কোন বৃত্তের ব্যাসকে স্থির রাখিয়া এই ব্যাসের উপর বৃত্তকে ঘুরাইয়া আনিলে একটি পূর্ণ আবর্তনে যে ঘন উৎপন্ন হয় উহাকে গোলক (sphere) বলে।



একটি বক্রতল দ্বারা কোন ঘনক্ষেত্র যদি এমনভাবে পরিবেষ্টিত হয় যে বক্রতলের সমস্ত বিন্দুই উক্ত ঘনক্ষেত্রের মধ্যস্থিত কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে সমদূরবর্তী হয়, তাহা হইলে উক্ত ঘনক্ষেত্রকে গোলক বলা হয় এবং উক্ত নির্দিষ্ট বিন্দুকে গোলকের কেন্দ্র ও কেন্দ্র হইতে গোলকের পৃষ্ঠতল পর্যন্ত প্রসারিত যে কোন সরলরেখাকে গোলকের ব্যাসার্ধ বলা হয়।

গোলকের তলের ক্ষেত্রফল $= 4\pi r^2$.

গোলকের ঘনফল $= \frac{4}{3}\pi r^3$.

উদা. 1. পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 4000 মাইল। ইহাকে একটি সম্পূর্ণ গোলক মনে করিয়া ইহার ঘনফল এবং বক্রতলের পরিমাণ নির্ণয় কর।

ঘনফল $= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 4000 \times 4000 \times 4000$ ঘন মাইল

$= \frac{5632000000000}{21}$ ঘন মাইল

$= 268190476190\frac{10}{21}$ ঘন মাইল।

তলের ক্ষেত্রফল $= 4 \times \frac{22}{7} \times 4000 \times 4000$ বর্গ মাইল

$= \frac{1408000000}{7}$ বর্গ মাইল $= 201142857\frac{1}{7}$ বর্গ মাইল।

উদা. 2. প্রতি ঘনফুট ইস্পাতের ওজন 6 মণ 16 সের হইলে $\frac{1}{8}$ ইঞ্চি ব্যাসার্ধ-বিশিষ্ট 4536-টি ইস্পাতের গুলির ওজন কত?

4536-টি গুলির ঘনফল $= 4536 \times \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{8}$ ঘন ইঞ্চি

$= \frac{4536 \times 4 \times 22}{3 \times 7 \times 8 \times 8 \times 8 \times 12 \times 12 \times 12}$ ঘন ফুট

$= \frac{11}{8 \times 8 \times 8}$ ঘন ফুট

. প্রতি ঘনফুট ইস্পাতের ওজন = 6 মণ 16 সের

= 256 সের

$\therefore$ 4536-টি গুলির ওজন = $\frac{11 \times 256}{8 \times 8 \times 8}$ সের

= $\frac{11}{2}$ সের = $5\frac{1}{2}$ সের।

প্রশ্নমালা 5

1. 7 ইঞ্চি, 1 ফুট 2 ইঞ্চি, 3·5 ইঞ্চি ও 4·2 ইঞ্চি ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট গোলক সমূহের ঘনফল এবং বক্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

2. একটি গোলকের ঘনফল 310464 ঘন সে. মি. ; ইহার ব্যাস কত ? ইহার বক্রতলের ক্ষেত্রফল কত ?

3. প্রতি ঘনফুট ইস্পাতের ওজন 256 সের হইলে, $\frac{1}{2}$ ইঞ্চি ব্যাস বিশিষ্ট 189 গ্রোস ইস্পাতের গুলির ওজন কত ?

4. শূন্যগর্ভ একটি লৌহ গোলকের বহির্ব্যাস ও অন্তর্ব্যাসের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 14 ইঞ্চি ও 10 ইঞ্চি ; 1 ঘনফুট লৌহের ওজন 480 পাউণ্ড হইলে, গোলকটির ওজন কত ?

5. 14 সে.মি. ব্যাস বিশিষ্ট একটি সীসকের গোলক হইতে $\frac{1}{2}$ সে.মি. ব্যাস বিশিষ্ট কতগুলি গুলি প্রস্তুত করা যাইতে পারে ?

6. 3 ফুট 6 ইঞ্চি ব্যাসের একটি অর্ধগোলকের ঘনফল এবং সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

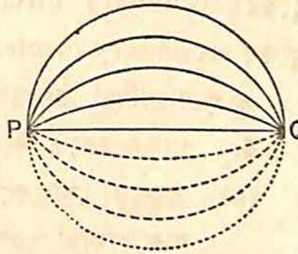
7. পৃথিবী ও চন্দ্রের ব্যাসের অনুপাত 100 : 27 ; উহাদের ঘনফলের অনুপাত কত ?

8. 6 সে. মি., 8 সে. মি. এবং 10 সে. মি. ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট তিনটি ধাতু নির্মিত গোলক গালাইয়া একটি গোলক প্রস্তুত করা হইল। এই গোলকের ব্যাসার্ধ কত ?

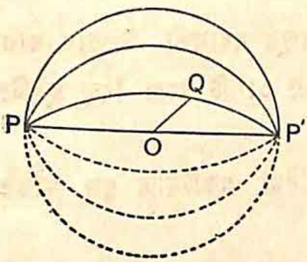
গোলক জ্যামিতি

(GEOMETRY OF SPHERE)

1. গোলক (sphere) ঃ কোন অর্ধবৃত্তের ব্যাসকে স্থির রাখিয়া উহার চতুর্দিকে অর্ধবৃত্তটিকে একবার পূর্ণ আবর্তন করাইলে যে বর্তুলাকার ঘনক্ষেত্রটি উৎপন্ন হয় তাহাকে গোলক বলে।



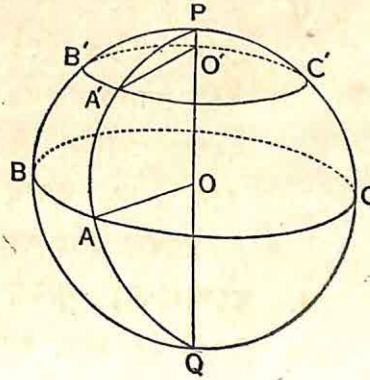
গোলকের উপরিভাগ একটি বক্রতল দ্বারা বেষ্টিত। পূর্বোক্ত অর্ধবৃত্তের কেন্দ্রই **গোলকের কেন্দ্র** (Centre of the sphere) এবং কেন্দ্র হইতে গোলকের পৃষ্ঠতল পর্যন্ত প্রসারিত সরলরেখাকে **গোলকের ব্যাসার্ধ** (Radius of the sphere) বলা হয়। নীচের চিত্রে, O গোলকের কেন্দ্র এবং OQ, OP, OP′ গোলকের ব্যাসার্ধ। গোলকের সমস্ত ব্যাসার্ধই সমান।



গোলকের কেন্দ্রগামী কোন সরলরেখা উভয় দিকে গোলকের পৃষ্ঠতল পর্যন্ত প্রসারিত হইলে উহাকে **গোলকের ব্যাস** (Diameter of the sphere) বলা হয়। চিত্রে PP′ ব্যাস।

গোলক উহার যে কোন ব্যাসের উপর প্রতিসম।

2. কোন সমতল দ্বারা গোলক ছিন্ন হইলে একটি বৃত্ত উৎপন্ন হয়। কেন্দ্রগামী কোন সমতল দ্বারা গোলকটি ছিন্ন হইলে যে বৃত্ত উৎপন্ন হয় তাহাকে **গুরুবৃত্ত** (Great circle) বলে। গুরুবৃত্তের ব্যাসার্ধ গোলকের ব্যাসার্ধের সমান। ABC বৃত্তটি গুরুবৃত্ত। কেন্দ্রগামী নহে এমন যে কোন সমতল দ্বারা গোলক ছিন্ন হইলে যে বৃত্ত উৎপন্ন হয় তাহাকে **লঘুবৃত্ত** (Small circle) বলে। A′B′C′ বৃত্তটি লঘুবৃত্ত।



3. অক্ষ ও মেরু (Axis and poles) :

অনু. 2-এর চিত্রে কেন্দ্রগামী POQ সরলরেখা ABC বৃত্ততলের উপর লম্ব হইলে, PQ কে ছেদ-অক্ষ (Axis of Section) বলা হয় এবং P, Q বিন্দু দুইটিকে বৃত্তীয় ছেদ-তলের **মেরুবিন্দু** (Poles) বলা হয়।

গোলকের উপরিস্থিত কোন বৃত্তের মেরুবিন্দু দিয়া অঙ্কিত গুরুবৃত্তকে উক্ত বৃত্তের secondary circle বলা হয়। PA′AQ গুরুবৃত্তটি ABC এবং A′B′C′ বৃত্তের secondary circle.

ভূ-পৃষ্ঠে দ্রাঘিমা রেখাগুলি নিরক্ষবৃত্ত বা সমাক্ষ রেখাগুলির secondary circle.

4. গোলক সম্বন্ধে নিম্নোক্ত বিষয়গুলি জানা প্রয়োজন :

(*a*) গুরুবৃত্ত গোলককে সমদ্বিখণ্ডিত করে এবং যতগুলি গুরুবৃত্ত অঙ্কিত করা যায় তাহারা পরস্পর সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

(*b*) গোলকতলের মেরুবিন্দু দুইটি ভিন্ন যে কোন দুইটি বিন্দু দিয়া একটিমাত্র গুরুবৃত্ত অঙ্কিত করা যায়।

(*c*) গোলকের গুরুবৃত্তের উপরিস্থিত দুইটি বিন্দুর মধ্যবর্তী উপচাপ দ্বারা বিন্দু দুইটির ন্যূনতম দূরত্ব সূচিত হয় এবং ঐ চাপটি দ্বারা বিন্দু দুইটির কৌণিক দূরত্বও সূচিত হয়।

(*d*) গোলকের পৃষ্ঠতলে অবস্থিত তিনটি বিন্দু দিয়া একটিমাত্র বৃত্ত অঙ্কিত হইতে পারে।

(*e*) দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দুর মধ্য দিয়া অসংখ্য গোলক অঙ্কিত হইতে পারে।

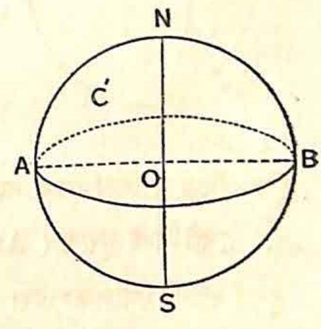
(*f*) এক সমতলে অবস্থিত নহে এরূপ চারিটি বিন্দুর মধ্য দিয়া একটিমাত্র গোলক অঙ্কিত হইতে পারে।

(*g*) দুইটি গোলক পরস্পর ছেদ করিলে একটি বৃত্ত উৎপন্ন হয় এবং ঐ বৃত্তের সমতল গোলক দুইটির কেন্দ্রযোজক সরলরেখার সহিত লম্বভাবে ছেদ করে এবং উৎপন্ন বৃত্তের কেন্দ্র উক্ত গোলকদ্বয়ের কেন্দ্রযোজক সরলরেখার উপর অবস্থিত হয়।

4. ভূগোলক : পৃথিবী পূর্ণগোলক না হইলেও উহাকে মোটামুটি হিসাবে গোলক বলিয়াই ধরা হইয়া থাকে। পৃথিবীর উত্তর ও দক্ষিণ মেরুপ্রদেশ কিঞ্চিৎ

চাপা বলিয়া উহার অন্যান্য ব্যাস অপেক্ষা মেরুব্যাস কিঞ্চিৎ ক্ষুদ্রতর। কিন্তু পৃথিবীর ব্যাসের দৈর্ঘ্যের তুলনায় মেরুব্যাস এবং অপর ব্যাসের দৈর্ঘ্যের পার্থক্য অতি ক্ষুদ্র। এই হিসাবে পৃথিবীকে একটি পূর্ণগোলক বলিয়া ধরা হয়।

পৃথিবীর কেন্দ্র দিয়া ভূপৃষ্ঠ পর্যন্ত উত্তর দক্ষিণে প্রসারিত যে কাল্পনিক ব্যাসের চতুর্দিকে পৃথিবী আবর্তন করে তাহাকে পৃথিবীর **অক্ষ** (Axis of the Earth) বা **মেরুরেখা** বলা হয়। মেরুরেখা পৃথিবীর পৃষ্ঠকে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করে। ইহাদের উত্তর দিকের মেরুবিন্দুটিকে **উত্তর মেরু বা সুমেরু** (North Pole) এবং দক্ষিণ দিকের মেরুবিন্দুটিকে **দক্ষিণ মেরু বা কুমেরু** (South Pole) বলে।



পার্শ্বের চিত্রে O ভূ-কেন্দ্র, NOS মেরুরেখা (Polar Axis), অক্ষ বা আবর্তন অক্ষ (Rotation Axis).

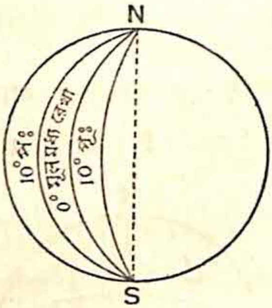
N উহার উত্তর মেরুবিন্দু এবং S দক্ষিণ মেরুবিন্দু।

6. নিরক্ষ রেখা ও সমাক্ষরেখা (Equator and Parallels of Latitude) :

NS অক্ষের O বিন্দু দিয়া একটি লম্ব সমতল ভূগোলকটিকে ছেদ করিলে একটি গুরুবৃত্ত উৎপন্ন হয়। এই গুরুবৃত্ত ভূগোলকটিকে উত্তর-দক্ষিণে সমান দুই ভাগে বিভক্ত করে। ইহাদের উত্তর অর্ধকে বলা হয় উত্তর গোলার্ধ (Northern Hemisphere) এবং দক্ষিণার্ধকে বলা হয় দক্ষিণ গোলার্ধ (Southern Hemisphere)। ঐ গুরুবৃত্তটিকে বলা হয় **বিষুব রেখা** বা **নিরক্ষ রেখা** (Equator)। NABC′ উত্তর গোলার্ধ এবং ASBC′ দক্ষিণ গোলার্ধ।

ABC′ বৃত্তের সমান্তরাল সমতল দ্বারা ভূগোলকটিকে ছেদ করাইলে উত্তর ও দক্ষিণ গোলার্ধে যে সকল লঘুবৃত্ত উৎপন্ন হয় তাহাদিগকে **সমাক্ষ রেখা** (Parallels of Latitude) বা শুধু অক্ষরেক্ষাও বলা হয়।

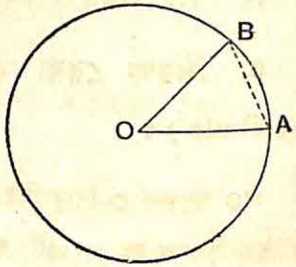
7. **দ্রাঘিমা রেখা** (Lines of Longitude or Meridians) ঃ



যে সকল অর্ধবৃত্ত নিরক্ষবৃত্তকে সমকোণে ছেদ করিয়া উভয় মেরুবিন্দু পর্যন্ত বিস্তৃত তাহাদিগকে দ্রাঘিমা রেখা বা মধ্যরেখা বলা হয়। লণ্ডনের উপকণ্ঠে গ্রীণিচের উপর দিয়া ঐরূপ কল্পিত অর্ধবৃত্তটিকে **মূল মধ্যরেখা** বা **আদি দ্রাঘিমা রেখা** (Prime Meridian) বলিয়া ধরা হয়। মূল মধ্যরেখার পূর্ব দিকের দ্রাঘিমা রেখাগুলিকে পূর্ব দ্রাঘিমা এবং পশ্চিম দিকের দ্রাঘিমা রেখাগুলিকে পশ্চিম দ্রাঘিমা রেখা বলা হয়।

8. **কৌণিক দূরত্ব** (Angular distance) ঃ

ভূপৃষ্ঠ একটি গোলক এবং গোলকের উপরিভাগ একটি বক্রতল। বক্রতলে দুইটি বিন্দুর দূরত্ব সরল-রৈখিক একক দ্বারা পরিমাণ করা যায় না। এইজন্য কোণের হিসাবে উহার পরিমাণ স্থির করা হয়।



মনে কর O কোন বৃত্তের কেন্দ্র এবং পরিধির উপর A ও B দুইটি বিন্দু। AB বৃত্তের একটি চাপ, সুতরাং AB একটি বক্ররেখা। AB-র দৈর্ঘ্য AB চাপের সম্মুখীন O বিন্দুস্থ কোণের হিসাবে স্থির করা হয়। সমতলের যে কোন বিন্দুস্থ সমগ্র কোণ চারি সমকোণ বা 360 ডিগ্রীর সমান, সুতরাং O বিন্দুস্থ সমগ্র কোণটিও চারি সমকোণের সমান। এখন, যদি A ও B বিন্দু দুইটি কেন্দ্র O-তে $45°$ কোণ ধারণ করে, তাহা হইলে A ও B এর কৌণিক দূরত্ব $45°$ এইরূপ বলা হয়।

নিরক্ষরেখাটি ভূগোলকের একটি গুরুবৃত্তের পরিধি। যদি ভূকেন্দ্র O হইতে এক এক ডিগ্রী অন্তর একটি করিয়া ব্যাসার্ধ টানা যায় তাহা হইলে নিরক্ষ বৃত্তের পরিধিটি 360 সংখ্যক সমান সমান চাপে বিভক্ত হইবে। এখন বৃত্তের ঐ 360টি বিভাগ বিন্দু দিয়া নিরক্ষবৃত্তের সহিত সমকোণে অবস্থিত এবং উত্তর ও দক্ষিণ মেরুবিন্দু

পর্যন্ত প্রসারিত 360টি অর্ধবৃত্ত অর্থাৎ দ্রাঘিমারেখা অঙ্কিত করিলে দুই দুইটি দ্রাঘিমারেখার ব্যবধান হইবে $1°$, অর্থাৎ দুইটি দ্রাঘিমারেখার কৌণিক দূরত্ব $1°$। এই কৌণিক দূরত্বকে **দ্রাঘিমা** (Longitude) বলে।

উক্ত 360টি দ্রাঘিমারেখার পূর্ব দিকের 180টি পূর্ব দ্রাঘিমা এবং পশ্চিম দিকের 180টি পশ্চিম দ্রাঘিমা রেখা। সুতরাং পূর্ব ও পশ্চিমের 180-তম দ্রাঘিমা দুইটি পরস্পর সমাপতিত হইয়া অভিন্ন হইয়া যায়।

5-অনুচ্ছেদের চিত্রে BON এবং BOS কোণ দুইটির প্রত্যেকটিই $90°$। সুতরাং নিরক্ষ বৃত্ত হইতে $1°$ অন্তর এবং উহার সমান্তরাল লঘুবৃত্ত অঙ্কন করিলে উহারা দ্রাঘিমারেখাকে উত্তর ও দক্ষিণে 90টি করিয়া সমান ভাগে বিভক্ত করিবে এবং প্রত্যেক ভাগের কৌণিক দূরত্ব হইবে $1°$. নিরক্ষরেখার উত্তরের কৌণিক দূরত্বকে উত্তর অক্ষাংশ এবং দক্ষিণের কৌণিক দূরত্বকে দক্ষিণ অক্ষাংশ বলে।

বিষুববৃত্তের দুইটি মধ্যরেখার মধ্যবর্তী চাপের কৌণিক দূরত্ব যত বিষুববৃত্তের সমান্তরাল যে কোন লঘুবৃত্তের অনুরূপ ছিন্ন চাপের কৌণিক দূরত্বও তত।

প্রয়োজন মত ডিগ্রীর সূক্ষ্মতর অংশ মিনিট এবং সেকেণ্ড কৌণিক মানে ব্যবহৃত হইয়া থাকে।

পূর্ব বা পশ্চিম বুঝাইবার জন্য দ্রাঘিমা মানের পরে পূর্ব (পূঃ) বা পশ্চিম (পঃ) লেখা হয় এবং উত্তর ও দক্ষিণ বুঝাইবার জন্য অক্ষাংশ মানের পরে উত্তর (উঃ) বা দক্ষিণ (দঃ) লেখা হয়।

রাশি-বিজ্ঞান

প্রথম অধ্যায়

রাশি-বিজ্ঞান—উহার উৎপত্তি ও ব্যবহার

The Science of Statistics—its origin and uses.

1. রাশি-বিজ্ঞান (The Science of Statistics) ঃ

বিরাট সৃষ্টির যে দিকে দৃষ্টিপাত করা যায় সেই দিকেই, মনে হয়, প্রকৃতি যেন তাঁর নব নব বৈশিষ্ট্য ও বৈচিত্র্য প্রকাশের মধ্য দিয়া সৃষ্টির আনন্দ উপভোগে ব্যস্ত। মনে হয়, প্রকৃতি যেন তাঁর খেয়ালখুশিমতই সৃষ্টি করিয়া চলিয়াছেন—সেখানে নিয়ম বা শৃঙ্খলা বলিয়া কোন কিছুর অস্তিত্ব নাই। সমপর্যায়ের বহুসংখ্যক বস্তুর বিশেষ ধর্ম বা গুণের তথ্য যথাসম্ভব সুনিপুণ এবং শুদ্ধ ভাবে সংগ্রহ করিয়া উহার আলোচনা ও গবেষণা দ্বারা বৈজ্ঞানিকগণ প্রকৃতির আপাত বৈচিত্র্যের মধ্যে সুনির্দিষ্ট ঐক্য ও নিয়মের সন্ধান পাইয়াছেন। একটি বা দুইটির মধ্যে কোন নিয়মের ব্যতিক্রম পরিদৃষ্ট হইলেও বহুর মধ্যে এই নিয়মের অভিব্যক্তি সুস্পষ্ট।

এইরূপে গণনা ও পরিমাপকে ভিত্তি করিয়া বিজ্ঞানের যে শাখাতে বিবিধ তথ্য ও বস্তুধর্মের আলোচনা হয় তাহাকে রাশি-বিজ্ঞান বলে। সংখ্যা রাশি-বিজ্ঞানের মূল ভিত্তি হইলেও রাশি-বিজ্ঞান সংখ্যাতত্ত্ব সম্বন্ধে কোন আলোচনা করে না। রাশি-বিজ্ঞানের মুখ্য উদ্দেশ্য বিভিন্ন সমস্যার সমাধান ও প্রকৃতির প্রচ্ছন্ন নিয়মগুলির সুষ্ঠু প্রকাশ।

কোন বস্তু বা ধর্মের সমগ্রকের তথ্য বা ধর্মের সর্বাত্মক তথ্য সংগ্রহ করা অসম্ভব হইলেও অপেক্ষাকৃত ক্ষুদ্রতর **নমুনা** বা **অংশক** (Sample) হইতে **সমগ্রক** সম্বন্ধে অনুমানমূলক সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া যায়। সুতরাং সম্ভাবনা-শাস্ত্রের (Science of Probability) মৌলিক ভিত্তির উপর নির্ভর করিয়া অংশকের কোন ধর্ম হইতে সমগ্রকের ঐ ধর্ম সম্বন্ধে সম্ভাব্য সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়াই রাশি-বিজ্ঞামের মুখ্য উদ্দেশ্য।

2. রাশি-বিজ্ঞানের উৎপত্তি ও ব্যবহার (Origin and uses of the Science of statistics) ঃ

অতি আদিমযুগে মানুষ ইতস্ততঃ বাস করিত, কিন্তু ক্রমশঃ তাহারা সঙ্ঘবদ্ধভাবে ভূপৃষ্ঠের এক এক স্থানে বাস করিতে আরম্ভ করিল। কোন না কোন কারণে দুই দল লোকের মধ্যে প্রায়ই সংঘর্ষ বাধিয়া যাইত। সুতরাং সঙ্ঘ, সম্প্রদায় বা জাতির আত্মরক্ষা, অত্মনিয়ন্ত্রণ, আর্থিক উন্নয়ন, শিল্পোন্নয়ন প্রভৃতি সমস্যা-সংক্রান্ত প্রয়োজনীয় সংখ্যাত্মক তথ্য সংগ্রহ করিয়া মানুষ বিভিন্ন সমস্যার সমাধানে সচেষ্ট হইল। রাজ্যের গণশক্তি (man-power) এবং সম্পৎ-শক্তির (material strength) একটা গণনা বা পরিমাণমূলক তথ্য সংগ্রহের প্রয়োজনীয়তা দেখা দিল। বর্তমান রাশি-বিজ্ঞানের আকারে বা নামে না হইলেও, উহার মৌলিক সিদ্ধান্তগুলি কোন না কোন আকারে ব্যবহৃত হইয়া আসিতেছে সেই আদিমকাল হইতে।

বহু প্রাচীনকাল হইতেই ইহুদী এবং রোমানদের মধ্যে জন-গণনা বা আদমশুমারির ব্যবস্থা ছিল। শিল্প-প্রসারের সঙ্গে সঙ্গে ইংলণ্ডেও নানারূপ সমস্যার সমাধানে পরিসংখ্যান প্রণালীর ব্যবহারের প্রয়াস চলিতে লাগিল।

বহু বৈজ্ঞানিক অক্লান্ত পরিশ্রম ও গবেষণা দ্বারা পরিসংখ্যান প্রণালীকে একটি বৈজ্ঞানিক ভিত্তির উপর প্রতিষ্ঠিত করিবার চেষ্টা করেন। **বৃহৎ সংখ্যকের সমতা** (Constancy of great numbers) এই মূল সূত্রটি অনুধাবন করিয়া রাশি-বিজ্ঞানকে সুষ্ঠু বিজ্ঞানের আসনে প্রতিষ্ঠিত করিয়াছেন বৈজ্ঞানিকেরা। এই বিজ্ঞান এখনও পরিবর্তন ও পরিবর্ধন সাপেক্ষ।

বর্তমান প্রগতিশীল যুগে প্রত্যেক রাষ্ট্রই পরিসংখ্যান প্রণালীকে বিবিধ সমস্যা সমাধানের অপরিহার্য অঙ্গ হিসাবে ব্যবহার করিতেছে।

বিভিন্ন পরিকল্পনা (Planning), নূতন নূতন আইন প্রণয়ন (Legislation), বাণিজ্য (Trade) ও শিল্প (Industry), ভেষজ বিজ্ঞান (Medical Science), কৃষি (Agriculture) শিক্ষা ও মনোবিজ্ঞান (Education and Psychology) প্রভৃতির বহুমুখী সমস্যা সমাধানে এবং উন্নতিসাধনে পরিসংখ্যান প্রণালীর অবদান অপরিসীম।

দ্বিতীয় অধ্যায়

তথ্যসংগ্রহ, শ্রেণীবিভাগ ও ছকবিন্যাস

Collection, Classification and Tabulation of Data

1. তথ্য সংগ্রহ (Collection of Data) :

পূর্বোক্ত আলোচনা হইতে ইহা সুস্পষ্ট যে সংগৃহীত তথ্যপুঞ্জই রাশি-বিজ্ঞানের মুখ্য উপাদান। তথ্যসংখ্যা বা পরিমাণ যত বেশী হইবে সিদ্ধান্তও তত বেশী নির্ভরযোগ্য হইবে। কোন বিশেষ বস্তুর গুণ বা ধর্মের তথ্য যত বাস্তব হইবে সিদ্ধান্তও তত বেশী শুদ্ধ হইবে ; তথ্য নির্ভুল এবং যথোপযোগী না হইলে সিদ্ধান্তের কোন মূল্য থাকে না। এইজন্য অতি সাবধানে সুপরিকল্পিত উপায়ে তথ্য সংগ্রহ করা প্রয়োজন। সাধারণতঃ যে প্রণালীতে তথ্য সংগ্রহ করা হয় তাহা নিম্নে বিবৃত করা হইল :

(1) প্রত্যক্ষভাবে স্বয়ং বিষয়বস্তুর সহিত যোগাযোগ স্থাপন করিয়া প্রয়োজনীয় তথ্য সংগ্রহ করাই শ্রেষ্ঠ উপায়।

(2) প্রত্যক্ষ যোগাযোগ অসম্ভব হইলে সরকারী রিপোর্ট, দৈনিক সংবাদপত্র এবং মাসিক পত্রিকা প্রভৃতি হইতে তথ্য সংগ্রহ করা যাইতে পারে।

(3) যে বিষয়ের তথ্য সংগ্রহ করা প্রয়োজন তাহার সংশ্লিষ্ট বিষয়সমূহ প্রশ্নাকারে (Question Blank) ছাপাইয়া যথাসম্ভব প্রভূত উত্তর সংগ্রহ করিতে হইবে। এই বিষয়ে মনে রাখিতে হইবে, প্রশ্নের ভাষা সরল ও সুস্পষ্ট হইবে, প্রতি প্রশ্নের একটি মাত্র উত্তর সম্ভব হইবে এবং কোন প্রশ্নেরই একাধিক উত্তরের অবকাশ থাকিবে না।

2. শ্রেণীবিন্যাস এবং ছকবিন্যাস (Classification and Tabulation of Data) :

সংখ্যা রাশি-বিজ্ঞানের মূলভিত্তি হইলেও অতি বৃহৎ সংখ্যার ধারণা ও তৎসম্বন্ধে আলোচনা সাধারণ চিন্তাশক্তির পক্ষে প্রায় অসম্ভব। দ্বিতীয়তঃ, ইতস্ততঃ সংগৃহীত তথ্যগুলিকে বিশেষ কোন ক্রমে সজ্জিত না করিলে উহাদের অন্তর্নিহিত নিয়মটি বা সাধ্য বিষয়টি আমাদের চিন্তাশক্তির গণ্ডির ভিতরে পরিস্ফুট হয় না।

কোন বস্তুর যে গুণ বা ধর্মের আমরা তথ্য সংগ্রহ করিতে চাই তাহার সমগ্র বস্তুকে আমরা **সমগ্রক** বলিব। এখন সমগ্রকের যে গুণটি সম্বন্ধে আমরা আলোচনা করিতে চাই সেই গুণের প্রতীকস্বরূপ কতিপয় অংশক (Sample) আমাদিগকে বাছিয়া লইতে হইবে। ঐ অংশকগুলির রাশিতথ্য সংগ্রহ করিয়া উহাদের **শ্রেণী-বিন্যাস** (Classification) করিতে হইবে। এই শ্রেণীবিন্যাসের জন্য প্রথমতঃ **তালিকা প্রণয়ন** (Tabulation) করিতে হইবে। সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন সীমার মধ্যবর্তী অংশকে কয়েকটি শ্রেণীতে বিভক্ত করিয়া প্রত্যেক শ্রেণীর অন্তর্গত তথ্য-সমূহের সংখ্যা নির্ণয় করিতে হইবে। প্রত্যেক সীমার অন্তর্গত তথ্যসংখ্যাকে **পরিসংখ্যা** (Frequency) বলা হয়। এইরূপ তথ্য-তালিকাকে **পরিসংখ্যা ছক** (Frequency distribution table) বলা হয়।

পরিসংখ্যা প্রস্তুতের একটি আদর্শ নিম্নে দেওয়া হইল ঃ

মনে কর তৃতীয় শ্রেণীর 20 জন বালকের বানানের পরীক্ষায় 25 নম্বরের মধ্যে যে যত নম্বর পাইয়াছে তাহার একটি ছক প্রস্তুত করিতে হইবে।

নম্বর	0—4	5—9	10—14	15—19	20—24
বালকের সংখ্যা	׀׀	׀׀׀׀	׀׀׀׀׀ ׀׀	׀׀׀׀׀	׀׀

উক্ত তালিকা হইতে দেখা যায়—

(1) **2** জন বালক (0—4)-এর মধ্যে নম্বর পাইয়াছে,

(2) 4 জন বালক (5—9)-এর মধ্যে নম্বর পাইয়াছে,

(3) 7 জন বালক (10—14)-এর মধ্যে নম্বর পাইয়াছে,

(4) 5 জন বালক (15—19)-এর মধ্যে নম্বর পাইয়াছে,

(5) 2 জন বালক (20—24)-এর মধ্যে নম্বর পাইয়াছে।

উক্ত স্থলে (0—4), (5—9), (10—14), (15—19), (20—24) এই পাঁচটি শ্রেণী-অন্তর এবং ইহাদের প্রথম শ্রেণী-অন্তরের পরিসংখ্যা (Frequency) 2,

দ্বিতীয় শ্রেণী-অন্তরের পরিসংখ্যা 4, তৃতীয়ের 7, চতুর্থের 5 এবং পঞ্চমের পরিসংখ্যা 2.

প্রাপ্ত নম্বরগুলি পরীক্ষা করিয়া দেখা গেল সর্বনিম্ন নম্বর 0 হইতে 4-এর মধ্যে এবং সর্বোচ্চ নম্বর 20 হইতে 24-এর মধ্যে এবং কেহই পূর্ণ নম্বর অর্থাৎ 25 পায় নাই। এখন যে শ্রেণী-অন্তরের মধ্যে যত যত জন ছাত্র নম্বর পাইয়াছে তাহাদের প্রত্যেকের জন্য একটি করিয়া উল্লম্ব (vertical) রেখা টানা হইল, যে শ্রেণী-অন্তরে (10—14) 7টি ছাত্রের নম্বর আছে তাহাদের প্রত্যেকের জন্য এক একটি করিয়া ঐরূপ রেখা টানিয়া পাঁচটির থাক সাজান হইল। দেখ ঐ ঘরে 5টি রেখার একটি থাক এবং আরও 2টি রেখা টানা হইয়াছে। এইভাবে প্রত্যেক ঘরের পরিসংখ্যা পাঁচ-এর থাকে প্রকাশ করিবার প্রণালীকে **পাঁচ-এর থাক মিলান** (Tally Method of fives) বলে।

আরও বৃহত্তর সংখ্যকের ছক-বিন্যাসের আর একটি আদর্শ দেখান হইল।

মনে কর, 50টি বালকের ইতিহাসের পরীক্ষার নম্বরের তালিকা প্রস্তুত করিতে হইবে।

প্রাপ্ত নম্বরের শ্রেণী অন্তর (Class-interval)	সংখ্যা মিলাইবার সংকেত (Results of checking)	পরিসংখ্যা (Frequencies)
91—100	||||	4
81—90	||||| ||	7
71—80	||||| ||||| ||||| |	16
61—70	||||| ||||| ||||| ||	17
51—60	|||||	5
41—50	|	1

মোট সংখ্যা = 50

নম্বরের তালিকা হইতে দেখা গেল সর্বনিম্ন নম্বর 41—50-এর মধ্যে এবং সর্বোচ্চ নম্বর কয়টি 91 হইতে 100-এর মধ্যে। সুতরাং সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন নম্বর দৃষ্টে ছয়টি

শ্রেণী-অন্তরে ভাগ করা হইয়াছে। প্রয়োজন মত আরও ক্ষুদ্রতর বা বৃহত্তর প্রসারের শ্রেণী-অন্তরে ছক প্রস্তুত করা যায়।

বিভাগ-সীমা 41—50-এর প্রকৃত অর্থ হইল 40·5—49·5, 51—60-এর অর্থ হইল 50·5—59·5 ইত্যাদি।

প্রত্যেক বিভাগ-সীমার মধ্যবিন্দুকে ঐ বিভাগের প্রতীক (representative) নম্বর হিসাবে ধরিতে হয়। এই হিসাবে 60 নম্বরের অর্থ হইল 59·5—60·5.

বিভাগ সীমার মধ্যবিন্দু নির্ণয় ঃ

$$\text{মধ্যবিন্দু} = \text{নিম্নসীমা} + \frac{\text{উচ্চসীমা} - \text{নিম্নসীমা}}{2}$$

165—169 এই বিভাগ-সীমার

$$\text{মধ্যবিন্দু} = 164{\cdot}5 + \frac{169{\cdot}5 - 164{\cdot}5}{2} = 164{\cdot}5 + \tfrac{5}{2} = 164{\cdot}5 + 2{\cdot}5 = 167.$$

বিভাগের নিম্ন মানের সহিত উচ্চ ও নিম্নমানের অন্তরের অর্ধ যোগ করিলেও ঐ বিভাগের মধ্যবিন্দু পাওয়া যায় ; যেমন

$$165 + \tfrac{169 - 165}{2} = 165 + 2 = 167.$$

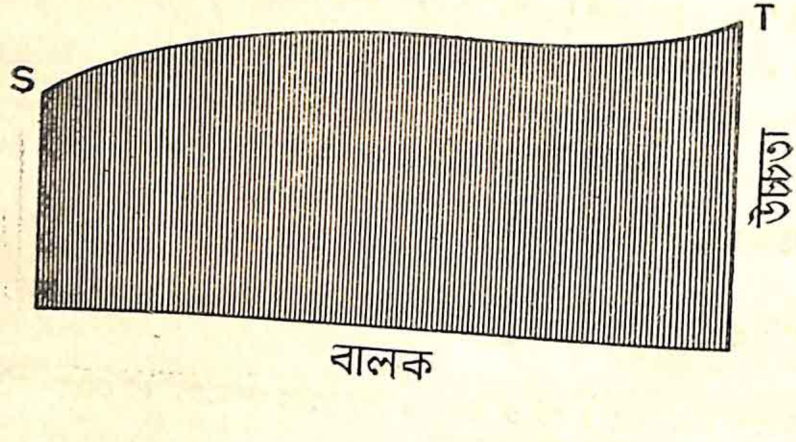
3. পরিসংখ্যা নিবেশনে লেখ-ব্যবহার (Graphical representation of frequencies) ঃ—

নানারকমের লেখ ও চিত্র সাহায্যে পরিসংখ্যা নিবেশন প্রকাশ করিবার রীতি আছে। তন্মধ্যে নিম্নলিখিতগুলি বিশেষ উল্লেখযোগ্য।

(a) ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা রেখা (Ogive Curve) ঃ

মনে কর, কোন দেশের 10 হইতে 12 বৎসরের বহুসংখ্যক বালকের দৈহিক উচ্চতার একটি তালিকা প্রস্তুত করা হইল। এখন, মনে কর একই সরলরেখায় সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন দৈহিক উচ্চতা বিশিষ্ট বালক দুইটিকে দুই প্রান্তে দাঁড় করাইয়া

উচ্চতার ক্রম অনুসারে অবশিষ্ট বালকদিগকে পর পর দাঁড় করান হইল। দণ্ডায়মান বালকদের মাথার উপর দিয়া একটি রেখা কল্পনা করিলে ঐ রেখাটি নীচের চিত্রানুরূপ ST বক্ররেখার রূপ ধারণ করিবে।



উক্ত বক্ররেখাটিকে **ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা রেখা** [Ogive (অজাইভ্) Curve বা Cumulative Frequency Curve] বলা হয়।

এই প্রণালীতে বস্তুর যে কোন গুণ বা ধর্মের পরিসংখ্যা সমূহকে সাজাইলে ঐরূপ বক্ররেখা পাওয়া যায়।

(b) আয়তলেখ (Histogram বা Column Diagram) :

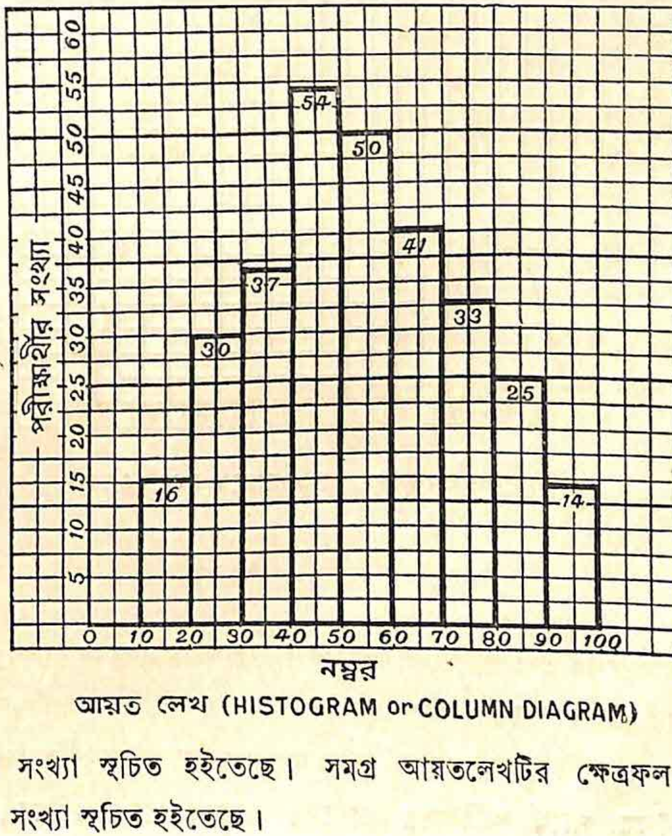
বহুসংখ্যক পরিসংখ্যা পূর্বোক্তরূপে সাজান কার্যতঃ সব সময় সম্ভব নাও হইতে পারে। সেইরূপ স্থলে সংগৃহীত তথ্যগুলিকে শ্রেণীবদ্ধ করিয়া প্রত্যেক শ্রেণীর পরিসংখ্যার অনুপাতে স্তম্ভলেখ অঙ্কিত করিলে তথ্যপুঞ্জের প্রকৃতি অধিকতর সহজবোধ্য হয়। ইহাতে প্রত্যেক স্তম্ভের পরিসর সমান রাখিয়া মাত্র উচ্চতা দ্বারা পরিসংখ্যামান স্থচিত করিতে হয়।

কোন সাধারণ জ্ঞানের পরীক্ষায় 300 জন পরীক্ষার্থী যে নম্বর পাইয়াছে তাহার একটি পরিসংখ্যা-ছক দেওয়া হইল। আয়তলেখ আকারে উহা প্রকাশ কর।

(সর্বনিম্ন নম্বর 12 এবং সর্বোচ্চ নম্বর 95)

শ্রেণী-অন্তর	10-19	20-29	30-39	40-49	50-59	60-69	70-79	80-89	90-99
পরিসংখ্যা (পরীক্ষার্থীর সংখ্যা)	16	30	37	54	50	41	33	25	14 = 300

প্রত্যেক স্তম্ভের বিস্তার সমান ; সুতরাং উহার উচ্চতা (সুতরাং ক্ষেত্রফল) দ্বারা

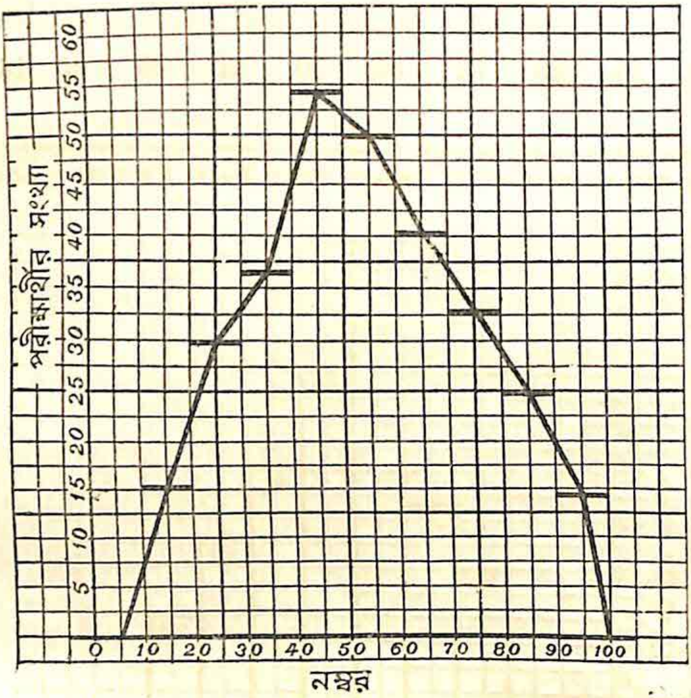


আয়ত লেখ (HISTOGRAM or COLUMN DIAGRAM)

পরীক্ষার্থীর সংখ্যা সূচিত হইতেছে। সমগ্র আয়তলেখটির ক্ষেত্রফল দ্বারা মোট পরীক্ষার্থীর সংখ্যা সূচিত হইতেছে।

(c) পরিসংখ্যা বহুভুজ (Frequency Polygon) :

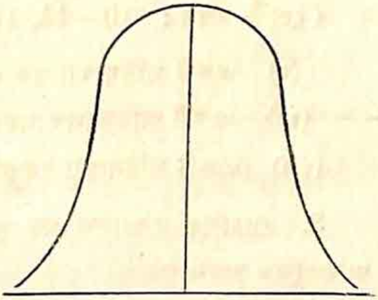
উক্ত আয়তলেখ-এর প্রত্যেক স্তম্ভের মধ্যবিন্দুগুলি পরপর যোগ করিয়া গেলে য বহুভুজটি উৎপন্ন হয় তাহাকে পরিসংখ্যা বহুভুজ বলে।



পরিসংখ্যা বহুভুজ (FREQUENCY POLYGON)

(d) আয়তলেখ এবং পরিসংখ্যা বহুভুজের চিত্র দুইটি লক্ষ্য করিলে দেখা যাইবে যে মধ্যরেখার উভয় পার্শ্বের অংশ দুইটির মধ্যে পূর্ণ প্রতিসমতার অভাব আছে। কিন্তু তথ্যসংখ্যা অতি বৃহৎ এবং নির্ভুলভাবে সংগৃহীত হইলে পরিসংখ্যা বহুভুজটি ধ্যরেখার উভয় পার্শ্বে অধিকতর প্রতিসম আকার ধারণ করিবে। এইরূপে

বহুসংখ্যক তথ্য সংগ্রহ করিয়া এবং শ্রেণী-অন্তর আরও ক্ষুদ্রতর করিয়া পরিসংখ্যা বহুভুজ অঙ্কিত করিলে উহা চিত্রানুরূপ মধ্যরেখার উভয় পার্শ্বে একটি প্রায় সুষম বক্র-রেখার আকার ধারণ করিবে। কোন বস্তুর সর্বাত্মক তথ্য নির্ভুলভাবে সংগৃহীত হইলে, মনে করা যাইতে পারে ঐ বক্ররেখাটি মধ্যরেখার উভয় পার্শ্বে সম্পূর্ণ প্রতিসম হইবে। এই বক্ররেখাটিকে **সুষম নিবেশন রেখা** (Normal Frequency Curve, Probability Curve বা Curve of Error) বলা হয়।



সুষম নিবেশন রেখা

বর্গক্ষেত্র, বৃত্ত-চিত্র (Circle Diagram) বা পাই-চিত্র (Pie Chart)-এর সাহায্যেও পরিসংখ্যা নিবেশনের তুলনামূলক চিত্র প্রদর্শন করার রীতি আছে।

প্রশ্নমালা 1

1. 20 নম্বরের মধ্যে পাটীগণিতের পরীক্ষায় তৃতীয় শ্রেণীর 30 জন ছাত্রের প্রাপ্ত নম্বর দেওয়া হইল :

12, 16, 8, 10, 13, 17, 11, 12, 14, 4, 18, 15, 12, 16, 15, 9, 7, 16, 17, 14, 7, 10, 12, 16, 13, 12, 17, 18, 16, 9.

(শ্রেণী-অন্তর : 0—4, 5—9, 10—14, 15—19 ধরিয়া)

(*i*) একটি পরিসংখ্যা ছক প্রস্তুত কর।

(*ii*) একটি আয়তলেখ অঙ্কন কর।

(*iii*) একটি পরিসংখ্যা বহুভুজ অঙ্কন কর।

2. ভূগোলের পরীক্ষায় 50 নম্বরের মধ্যে পঞ্চম শ্রেণীর 40 জন বালকের প্রাপ্ত নম্বর দেওয়া হইল :

17, 25, 14, 21, 35, 40, 29, 43, 39, 23, 20, 15, 19, 33, 28, 40, 11,

31, 26, 14, 28, 13, 27, 28, 37, 32, 44, 17, 19, 38, 18, 41, 29, 21, 40, 15, 21, 24, 42, 36.

(শ্রেণী-অন্তর : 10—14, 15—19, 20—24, 25—29, ... 40—44 ধরিয়া)

(*i*) একটি পরিসংখ্যা ছক প্রস্তুত কর।

(*ii*) একটি আয়তলেখ অঙ্কন কর।

(*iii*) একটি পরিসংখ্যা বহুভুজ অঙ্কন কর।

3. চেরাপুঞ্জীর মাসিক গড় বৃষ্টিপাতের একটি তালিকা দেওয়া হইল। একটি আয়তলেখ অঙ্কন কর।

মাস	জা.	ফে.	মা.	এ.	মে.	জুন	জু.	আ.	সে.	অ.	ন.	ডি.
বৃষ্টিপাত (ইঞ্চিতে)	·5	2·8	9·6	31·4	50·5	92·9	99·4	62·6	33·4	21·7	2·8	·4

4. অষ্টম শ্রেণীর 50 জন বালিকার বাংলা সাহিত্যের পরীক্ষার নম্বর দেওয়া হইল ; শ্রেণী-অন্তর (0—10, 11—20, 21—30, ··· 71—80) ধরিয়া একটি পরিসংখ্যা বহুভুজ অঙ্কিত কর।

60, 51, 54, 30, 45, 71, 63, 36, 26, 46, 63, 72, 58,
30, 49, 67, 58, 65, 51, 37, 56, 28, 43, 42, 67, 42,
79, 67, 23, 8, 49, 38, 19, 39, 58, 63, 51, 15, 70,
51, 52, 62, 23, 40, 57, 29, 61, 44, 52, 40.

5. কোন শ্রেণীর 50 জন বালকের জানুয়ারী হইতে ডিসেম্বর পর্যন্ত উপস্থিতির একটি তালিকা দেওয়া হইল ; একটি আয়তলেখ ও একটি পরিসংখ্যা বহুভুজ অঙ্কিত কর।

মাস	জা.	ফে.	মা.	এ.	মে.	জুন	জু.	আ.	সে.	অ.	ন.	ডি.
গড় উপস্থিতি	48	45	46	43	47	45	41	42	47	46	41	48

6, কোন স্থানের সমস্ত বৎসরের 52 সপ্তাহের উষ্ণতার গড় ফারেনহাইট ডিগ্রাতে দেওয়া হইল।

45·7, 41·9, 44·4, 48·1, 40·0, 48·0, 54·2, 62·2, 49·8, 46·6,
40·2, 38·9, 51·0, 57·0, 63·8, 46·0, 52·6, 50·1, 47·1, 42·7,
54·1, 58·8, 48·8, 42·4, 61·7, 60·2, 59·7, 55·2, 59·8, 51·5,
40·4, 62·1, 57·2, 58·7, 61·0, 53·6, 46·2, 47·4, 49·8, 56·9,
54·8, 52·4, 43·3, 45·5, 50·0, 49·0, 45·4, 49·1, 47·2, 39·5,
47·6, 58·1.

শ্রেণী-অন্তর 5° ধরিয়া [অর্থাৎ 38·9—43·8, 43·9—48·8, 48·9—53·8, 53·9—58·8, 58·9—63·8] একটি পরিসংখ্যা-ছক প্রস্তুত কর।

[Institute of Actuaries, London, 1947]

[পরিসংখ্যা : 9, 14, 11, 10, 8]

তৃতীয় অধ্যায়

মধ্যগামিতার মান (Measure of Central Tendency)

1. মধ্যগামিতা (Central Tendency).

অতি বৃহৎ সংখ্যকের কোন গুণ বা ধর্মের পরিসংখ্যা-ছক প্রস্তুত করিয়া একটি পরিসংখ্যা বহুভুজ প্রস্তুত করিলে দেখা যাইবে বহুভুজটি কোন মধ্যরেখার উভয় পার্শ্বে প্রায় প্রতিসম এবং মোট সংখ্যার বেশীর ভাগই ঐ মধ্যরেখার উভয় পার্শ্বে অবস্থিত। 10000 বা তদূর্ধ্ব পরীক্ষার্থীর 100 নম্বরের কোন পরীক্ষায় প্রাপ্ত নম্বরের একটি পরিসংখ্যা বহুভুজ অঙ্কিত করিলে দেখা যাইবে যে, যদি 50 নম্বর মধ্যবর্তী পরীক্ষার্থীর প্রাপ্ত নম্বর হয় অর্থাৎ গড় নম্বর হয়, তাহা হইলে সর্বাধিক ছাত্রই গড় নম্বরের কাছাকাছি নম্বর পাইয়াছে। বৃহৎ সংখ্যকের দৈহিক উচ্চতা, ওজন, বুদ্ধিবৃত্তি প্রভৃতি

অন্যান্য বিশেষ বিশেষ ধর্মের সংখ্যামানের লেখ প্রস্তুত করিলে দেখা যাইবে যে গড়-মানের উভয় পার্শ্বেই সর্বাধিক সংখ্যা অবস্থিত।

বিশেষ গুণ বা ধর্মের এই বৈশিষ্ট্যকে মধ্যগামিতা বা কেন্দ্রাভিমুখিতা (Central Tendency) বলা হয়। অংশকের এই মধ্যগামিতা-বৈশিষ্ট্য হইতেই বৃহৎ সংখ্যকের সমতা (Constancy of great numbers) এবং পৃথিবীর মহাগড়-বিধান এই দুইটি মূলসূত্রের সন্ধান পাওয়া যায়। সমগ্র রাশি-বিজ্ঞান এই দুইটি মূল সূত্রের উপর প্রতিষ্ঠিত।

2. মধ্যগামিতার মান (Measure of Central Tendency).

একাধিক প্রণালীতে মধ্যগামিতার মান নির্ণয় করা যায়। তন্মধ্যে (i) **যৌগিক গড়** (Mean or Arithmetic Mean), (ii) **মধ্যম মান** (Median) এবং (iii) **সংখ্যাগুরুমান** (Mode) সাধারণতঃ ব্যবহৃত হইয়া থাকে।

(i) যৌগিক গড় [Mean (M) or Arithmetic Mean (A. M.).]

কোন গুণ বা ধর্মের সংখ্যামানের পাটীগণিতীয় গড়কে যৌগিক গড় বলা হয়।

উদা. 1. A, B, C, D, ... 16টি ছাত্রের কোন পরীক্ষার নম্বর শতকরা হারে দেওয়া হইল। যৌগিক গড় নির্ণয় কর।

পরীক্ষার্থী—A B C D E F G H I J K L M N O P = 16

নম্বর (%)—71 44 22 31 52 67 39 48 83 18 64 84 59 45 91 50 = 868

$868 \div 16 = 54{\cdot}25$ $\therefore$ নির্ণেয় যৌগিক গড় = 54·25 %

গড় বা Mean কে M, ছাত্রসংখ্যা N, প্রাপ্ত নম্বর x এবং প্রাপ্ত নম্বরের সমষ্টি Σx (Sigma x) দ্বারা সূচিত করিলে, $M = \dfrac{\Sigma x}{N}$.

প্রাপ্ত নম্বরগুলির পরস্পর পার্থক্য খুব বেশী না হইলে নিম্নোক্ত সহজতর প্রণালীতে গড় নির্ণয় করা যায়।

যে নম্বর বা যাহার কাছাকাছি নম্বর সর্বাপেক্ষা বেশীসংখ্যক ছাত্র পাইয়াছে তাহাকে গড় ধরিয়া লও। এইরূপ গড়কে **কল্পিত গড়** (Assumed mean)

বলা হয়। কল্পিত গড় হইতে প্রকৃত নম্বরের প্রত্যেকটির অন্তর বাহির কর। কল্পিত গড় হইতে উচ্চতর পার্থক্যকে যোগ চিহ্ন (+) এবং নিম্নতর পার্থক্যকে বিয়োগ চিহ্ন (−) যুক্ত করিয়া স্থাপন করা যায়। এখন ধনাত্মক ও ঋণাত্মক পার্থক্যগুলির বৈজিক সমষ্টি নির্ণয় কর এবং এই সমষ্টিকে ছাত্রসংখ্যা দ্বারা ভাগ করিয়া ভাগফল ও কল্পিত গড়ের বৈজিক সমষ্টি নির্ণয় কর। ঐ সমষ্টিই নির্ণেয় গড়।

উদা. 2. A, B, C, D, ... 16টি পরীক্ষার্থীর 100 নম্বরের ইতিহাসের পরীক্ষায় প্রাপ্ত নম্বর দেওয়া হইল ; যৌগিক গড় নির্ণয় কর।

পরীক্ষার্থী	প্রাপ্ত নম্বর	কল্পিত গড়	গড় হইতে অন্তর (+)	গড় হইতে অন্তর (−)
A	62	50	+12	
B	51	50	+ 1	
C	36	50		−14
D	52	50	+ 2	
E	48	50		− 2
F	54	50	+ 4	
G	61	50	+11	
H	58	50	+ 8	
I	38	50		−12
J	54	50	+ 4	
K	49	50		− 1
L	52	50	+ 2	
M	53	50	+ 3	
N	38	50		−12
O	41	50		− 9
P	56	50	+ 6	
16(N)			+53	−50
			+ 3	

যৌগিক গড় $= 50 + \frac{3}{16}$

$= 50\frac{3}{16}$

কল্পিত গড়কে A এবং অন্তরসমূহের বৈজিক সমষ্টিকে Σx ধরিলে সূত্রাকারে :

$$M = A + \frac{\Sigma x}{N}.$$

উদা. 3. শ্রেণী-অন্তর এবং পরিসংখ্যা দেওয়া আছে ; যৌগিক গড় নির্ণয় কর।

শ্রেণী-অন্তর	পরিসংখ্যা (f)	মধ্যবিন্দু (M.P.)	কল্পিত গড় হইতে দূরত্ব (x')	$f \times x'$
190-194	2	192	5	10
185-189	2	187	4	8
180-184	4	182	3	12
175-179	8	177	2	16
170-174	6	172	1	6
				+52
165-169	11	167	0	
160-164	9	162	−1	− 9
155-159	7	157	−2	−14
150-154	5	152	−3	−15
145-149	0	147	−4	0
140-144	2	142	−5	−10
	N = 56			−48

যে ঘরের পরিসংখ্যা সর্বোচ্চ সেই ঘরের মধ্যবিন্দুকে কল্পিত গড় ধরিয়া লও। এস্থলে 167 কল্পিত গড়, কারণ ঐ ঘরের সর্বোচ্চ পরিসংখ্যা 11. কল্পিত গড় হিসাবে 167 এর ঘরের দূরত্ব 0 ধরিয়া ক্রমশঃ উচ্চতর মধ্যবিন্দুর সংখ্যার ডান দিকে 1, 2, 3, 4, 5 লিখ এবং নিম্নতর মধ্যবিন্দুর ডান দিকে ক্রমশঃ −1, −2, −3, −4, −5 লিখ। প্রত্যেক ঘরের অন্তরকে ঐ ঘরের পরিসংখ্যা দ্বারা গুণ করিয়া চিহ্ন সমেত গুণফল বসাও। গুণফলগুলির বৈজিক সমষ্টিকে পরিসংখ্যা সমষ্টি (N) দ্বারা ভাগ কর। প্রাপ্ত ভাগফল শ্রেণী-অন্তর হিসাবে শুদ্ধিমান (C—correction), নম্বর (Score) হিসাবে শুদ্ধিমান $= Ci$ (শুদ্ধিমান ও শ্রেণী-অন্তরের গুণফল)।

এস্থলে $C = \frac{52-48}{56} = \frac{1}{14}$ $\therefore$ $Ci = \frac{1}{14} \times 5 = \frac{5}{14}$

$\therefore$ নির্ণের যৌগিক গড় $= 167 + \frac{5}{14} = 167\frac{5}{14} = 167{\cdot}36$ (আসন্ন)।

দ্রষ্টব্য। ধনাত্মক ও ঋণাত্মক $\Sigma fx'$ সমান হইলে কল্পিত গড়ই প্রকৃত গড় হইবে।

উক্ত গড় নির্ণয় প্রক্রিয়ার নিয়মগুলি সংক্ষিপ্ত আকারে পুনরায় লিখিত হইল :

(a) প্রথমতঃ রাশিসমূহের পরিসংখ্যা-ছক প্রস্তুত কর।

(b) যে শ্রেণী-অন্তরে পরিসংখ্যা সর্বোচ্চ সেই শ্রেণীর মধ্যবিন্দুকে কল্পিত গড় ধরিয়া লও।

(*c*) কল্পিত গড় হইতে প্রত্যেক বিভাগের মধ্যবিন্দুর পার্থক্য 1, 2, 3 ইত্যাদি ক্রমে শ্রেণী-অন্তর হিসাবে (x') নির্ণয় কর।

(*d*) প্রত্যেক বিভাগের অন্তরকে ঐ বিভাগের পরিসংখ্যা দ্বারা গুণ কর (fx') এবং ঐ গুণফলগুলিকে কল্পিত গড়ের উপরে ও নীচে যথাক্রমে + এবং − চিহ্ন দ্বারা চিহ্নিত কর।

(*e*) ধনাত্মক ও ঋণাত্মক গুণফলগুলির বৈজিক সমষ্টি নির্ণয় কর এবং ঐ সমষ্টিকে পরিসংখ্যাসমষ্টি (N) দ্বারা ভাগ কর। প্রদত্ত ভাগফলকে শ্রেণী-শুদ্ধক (C) বলা যাইতে পারে।

(*f*) C-কে শ্রেণী-অন্তর (Interval length or i) দ্বারা গুণ কর। গুণফল Ci হইবে Score correction.

(*g*) কল্পিত গড় এবং Ci-এর বৈজিক সমষ্টি হইবে প্রকৃত যৌগিক গড়।

সূত্রাকারে : Mean (M) = A + Ci (A = কল্পিত গড়)।

(ii) মধ্যম মান (Median)

তথ্যরাশিসমূহ নিম্নগ বা উর্ধ্বগক্রমে স্থাপন করিলে যে সংখ্যার উভয় দিকে সমান সংখ্যক সংখ্যা থাকে তাহাকে মধ্যম মান বলে। মধ্যম মান তথ্যবিন্যাসের মধ্যবিন্দু (mid-point of a distribution of scores)। ইহা যৌগিক গড় নাও হইতে পারে।

$\underbrace{6, 8, 10, 10}_{4\text{টি}}, 14, \underbrace{16, 16, 18, 20}_{4\text{টি}}$ ইহাদের মধ্যম মান 14, কারণ 14-এর উভয় দিকে 4টি করিয়া সংখ্যা আছে। [এস্থলে তথ্যসংখ্যা অযুগ্ম]।

$\underbrace{2, 4, 6,}\ \underbrace{6, 8,}\ \underbrace{10, 14, 16}$ এস্থলে 8টি সংখ্যার চতুর্থ এবং পঞ্চম সংখ্যা দুইটির উভয় দিকে 3টি করিয়া সংখ্যা আছে। সুতরাং নির্ণেয় মধ্যম মান চতুর্থ ও পঞ্চম সংখ্যার পাটীগণিতীয় গড়, অর্থাৎ

নির্ণেয় মধ্যম মান = (6 + 8) ÷ 2 = 7

(iii) সংখ্যাগুরুমান (Mode)

কতকগুলি সংখ্যার যে সংখ্যাটির পরিসংখ্যা (frequency) সর্বাপেক্ষা বেশী তাহাকেই উক্ত সংখ্যাসমূহের সংখ্যাগুরুমান বলে।

6, 11, 12, 15, 15, 15, 17, 19, 19, 20 এই সংখ্যাগুলির মধ্যে 15 সংখ্যাটি সর্বাধিকবার আছে ; সুতরাং উক্ত সংখ্যাগুলির সংখ্যাগুরুমান 15.

শ্রেণী-অন্তর যুক্ত পরিসংখ্যা থাকিলে সংখ্যাগুরুমান নির্ণয়ের প্রক্রিয়া নিম্নরূপ ঃ

প্রাপ্ত নম্বর	ছাত্রসংখ্যা
5-10	5
10-15	6
15-20	15
20-25	10
25-30	5
30-35	4
35-40	2
40-45	2

এস্থলে 15-20 শ্রেণীর পরিসংখ্যা সর্বোচ্চ = 15

উহার পূর্ববর্তী 10-15 শ্রেণীর পরিসংখ্যার সহিত 15 এর পার্থক্য = 9

এবং পরবর্তী 20-25 শ্রেণীর পরিসংখ্যার সহিত 15 এর পার্থক্য = 5

মোট = 14

$\therefore$ সংখ্যাগুরুমান $= 15 + \frac{9}{14} \times 5$

$= 15 + 3{\cdot}2 = 18{\cdot}2$

[Agra B. Com. 1939]

3. মধ্যগামী মানের ব্যবহার (Use of the measures of central tendency).

যৌগিড় গড় দ্বারা প্রকৃত গড়-মান পাওয়া যায়। প্রত্যেক রাশি সমান ভারযুক্ত (equally weighed) হইলে যৌগিক গড়ের ব্যবহার করা বিধেয়। মধ্যগামিতার শুদ্ধিমানের জন্যও যৌগিক গড়ের ব্যবহার সমীচীন।

মধ্যমমান দ্বারা প্রকৃত গড়ের কাছাকাছি গড়ের একটা আভাসমাত্র পাওয়া যায়। রাশিতথ্যের মধ্যে কোন্ রাশিটির পরিসংখ্যা সর্বাধিক তাহা জানিবার জন্য সংখ্যাগুরুমানের ব্যবহার করা যাইতে পারে।

প্রশ্নমালা 2

1. 2, 4, 6, 6, 8, 10, 14, 14, 16-এর মধ্যমমান (Median) নির্ণয় কর। [8]

2. 3, 6, 9, 9, 12, 15, 21, 24-এর মধ্যমমান নির্ণয় কর। [10·5]

3. 3, 5, 8, 8, 10, 11, 11, 11, 13, 13, 15-এর সংখ্যাগুরুমান (Mode) নির্ণয় কর। [11]

4. শ্রেণী-অন্তরে পরিসংখ্যা-ছক দেওয়া হইল ; যৌগিক গড় নির্ণয় কর।

শ্রেণী-অন্তর	195-199	190-194	185-189	180-184	175-179	170-174	165-169	160-164	155-159	150-154	145-149	140-144
পরিসংখ্যা	1	2	4	5	8	10	6	4	4	2	3	1

[কল্পিত গড় 172 ধরিয়া লও] [70·80]

5. কোন শ্রেণীর 60 জন বালকের জানুয়ারী হইতে ডিসেম্বর পর্যন্ত 12 মাসের মাসিক গড় উপস্থিতি দেওয়া হইল। বার্ষিক উপস্থিতির যৌগিক গড় নির্ণয় কর। [53·3]

মাস	জা.	ফে.	মা.	এ.	মে.	জুন	জু.	আ.	সে.	অ.	ন.	ডি.
গড় উপস্থিতি	50	55	52	48	54	56	52	45	56	56	58	58

6. 53, 17, 28, 14, 23, 19, 31, 42, 20, 21, 20, 32, 39, 31, 6, 15, 24, 6, 22, 12, 30, 25, 7, 9, 13, 15, 5, 44, 19, 5, 30, 44, 26, 44, 18, 41, 2, 36, 30, 46, 30, 30, 42, 45, 31, 20, 31, 13, 21, 22.

শ্রেণী-অন্তর 5 ধরিয়া (i) একটি পরিসংখ্যা-ছক প্রস্তুত কর, (ii) যৌগিক গড় এবং (iii) মধ্যমমান নির্ণয় কর।

[(i) নিম্ন সীমা হইতে 2, 4, 6, 7, 6, 8, 5, 3, 7, 1, 1, (ii) 25·7, (iii) 28]

7. কতিপয় লোকের দৈহিক উচ্চতা এবং পরিসংখ্যা দেওয়া হইল ; Mean, Mode এবং Median নির্ণয় কর। [Agra 1937]

উচ্চতা	পরিসংখ্যা	উচ্চতা	পরিসংখ্যা
5′-6″	1	5′-11″	1
5′-7″	2	6′-0″	2
5′-8″	4	6′-1″	1
5′-9″	3	6′-2″	1
5′-10″	2	6′-3″	1

[Mean $= 5'\text{-}9\frac{7}{9}''$
Median $= 5'\text{-}9\frac{1}{8}''$
Mode $= 5'\text{-}8\frac{1}{6}''$]

চতুর্থ অধ্যায়
বিস্তৃতি-মান
(Measure of dispersion, Variability or Deviation)

1. বিস্তৃতি-মান (Measure of dispersion).

পূর্ব অধ্যায়ে বর্ণিত গড় দ্বারা অংশকের আলোচ্য চল-ধর্মের মধ্যগামিপ্রবণতার একটা মোটামুটি মান পাওয়া যায়। কিন্তু গড়-মান এবং প্রকৃত তথ্যমানের মধ্যে পার্থক্য বিদ্যমান। এই পার্থক্য, বিস্তৃতি বা বিচ্যুতি নির্ণয়ের চারিটি পদ্ধতি প্রচলিত আছে ; যথা (i) **প্রসার** (Range), (ii) **গড় পার্থক্য** (Mean Deviatian), (iii) **চতুর্থক পার্থক্য** (Quartile Deviation) এবং (iv) **সমক পার্থক্য** (Standard deviation)।

এস্থলে মাত্র গড়-পার্থক্য এবং সমক পার্থক্য নির্ণয়ের পদ্ধতি আলোচিত হইবে।

2. গড়-পার্থক্য [Mean Deviation (M. D.) or Average Deviation (A. D.).]

কোন রাশি-তথ্যের যৌগিক গড় হইতে প্রত্যেক রাশির পার্থক্য বা বিস্তৃতির ধনাত্মক বা ঋণাত্মক চিহ্ন-নিরপেক্ষ পাটীগণিতীয় গড়কে গড়-পার্থক্য বলে। ইহাতে আধিক্য বা ন্যূনতাসূচক সমস্ত পার্থক্যকেই ধনাত্মক কল্পনা করা হয়।

উদা. 1. কোন পরীক্ষায় 5-টি বালকের প্রাপ্ত নম্বর যথাক্রমে 12, 16, 20, 24 ও 28। গড় পার্থক্য নির্ণয় কর।

এস্থলে যৌগিক গড় $= \frac{12+16+20+24+28}{5} = \frac{100}{5} = 20.$

গড় হইতে প্রাপ্ত নম্বরের চিহ্নহীন পার্থক্য-সমষ্টি

$= (20-12)+(20-16)+(20-20)+(24-20)+(28-20)$

$= 8+4+0+4+8 = 24.$

পার্থক্য-সমষ্টির গড় $= \frac{24}{5} = 4{\cdot}8$

অর্থাৎ নির্ণেয় গড়-পার্থক্য (M.D. or A.D.) = 4·8.

উদা. 2. শ্রেণী-অন্তর, পরিসংখ্যা এবং যৌগিক গড় (70·80) দেওয়া আছে; গড়-পার্থক্য (M. D.) নির্ণয় কর।

শ্রেণী-অন্তর	পরিসংখ্যা (f)	শ্রেণী-অন্তরের মধ্যবিন্দু	গড় হইতে পার্থক্য (x)	$f \times x$
95-99	1	97	26·20	26·2
90-94	2	92	21·20	42·4
85-89	4	87	16·20	64·8
80-84	5	82	11·20	56·0
75-79	8	77	6·20	49·6
70-74	10	72	1·20	12·0
65-69	6	67	3·8	22·8
60-64	4	62	8·8	35·2
55-59	4	57	13·8	55·2
50-54	2	52	18·8	37·6
45-49	3	47	23·8	71·4
40-44	1	42	28·8	28·8
	N = 50			502·0

এস্থলে শ্রেণী-অন্তরের মধ্যবিন্দু 97, 92, 87, ... 42.

$\therefore$ গড় পার্থক্য (M. D.) $= \frac{502}{50} = 10{\cdot}04$.

সূত্রাকারে, $\text{M.D.} = \dfrac{\Sigma fx}{\text{N}}$.

3. সমক পার্থক্য (Standard Deviation).

গড়-পার্থক্য নির্ণয়ে যৌগিক গড় হইতে সমস্ত পার্থক্যকে ধনাত্মক বলিয়া ধরা হয়, কিন্তু প্রকৃতপক্ষে সমস্ত পার্থক্য ধনাত্মক নহে। কিন্তু ধনাত্মক বা ঋণাত্মক সমস্ত পার্থক্যের বর্গ অবশ্যই ধনাত্মক। গড় হইতে পার্থক্যগুলির বর্গের পাটীগণিতীয় গড়ের বর্গমূল লইলে যে সংখ্যা প্রাপ্ত হওয়া যায় তাহাকে সমক পার্থক্য বলে। ইহাকে **মূল-গড়-বর্গ-পার্থক্য** (Root-Mean-Square Deviation) বলা হয়। (Standard deviation is the square root of the mean of the squared deviations taken from the mean).

সমক পার্থক্যকে সংক্ষেপে S. D. দ্বারা প্রকাশ করা যায়।

উদা. 1. 12, 16, 20, 24, 28 এর S. D. নির্ণয় কর।

যৌগিক গড় $= \frac{12+16+20+24+28}{5} = \frac{100}{5} = 20.$

(গড়-পার্থক্য)$^2 = (20-12)^2 + (20-16)^2 + (20-20)^2 + (20-24)^2 + (20-28)^2 = 64+16+0+16+64 = 160.$

$\therefore$ S. D. $= \sqrt{\frac{160}{5}} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} = 4 \times 1{\cdot}414 = 5{\cdot}656$

$= 5{\cdot}7$ (আসন্ন)

উদা 2. 1, 2, 3, 4, 7, 8, 10 নম্বরগুলির S. D. নির্ণয় কর।

এস্থলে, গড় $= \frac{1+2+3+4+7+8+10}{7} = \frac{35}{7} = 5.$

(গড়-পার্থক্য)$^2 = (5-1)^2 + (5-2)^2 + (5-3)^2 + (5-4)^2 + (5-7)^2 + (5-8)^2 + (5-10)^2$

$= 16+9+4+1+4+9+25 = 68$

$\therefore$ S. D. $= \sqrt{\frac{68}{7}} = 3{\cdot}11$

উদা. 3. পরিসংখ্যা-যুক্ত শ্রেণীর সমক-পার্থক্য (S. D.) নির্ণয়-প্রণালী উদাহরণ দ্বারা বুঝান হইতেছে।

প্রাপ্ত নম্বর	পরিসংখ্যা (f)	x'	fx'	$(x')^2$
1	1	−5	−5	25
2	2	−4	−8	32
3	2	−3	−6	18
4	1	−2	−2	4
5	4	−1	−4	4
6	6	0	0	0
7	3	1	3	3
8	3	2	6	12
9	2	3	6	18
10	1	4	4	16
	$N=25$			$\Sigma f(x')^2 = 132$

এস্থলে মোটামুটি হিসাবে গড় $= 6$, $N = 25$

$\therefore$ S. D. $= \sqrt{\frac{132}{25}} = \sqrt{5{\cdot}28}$

$= 2{\cdot}3$ (আসন্ন)

(গড়-পার্থক্য)^2-এর সমষ্টি $\Sigma f(x')^2$ এবং পরিসংখ্যা সমষ্টি N দ্বারা সূচিত হইলে সরলশ্রেণীতে সূত্রাকারে :

S. D. $= \sqrt{\frac{\Sigma f(x')^2}{N}}.$

উদা. 4. শ্রেণী-অন্তরে পরিসংখ্যাযুক্ত নিম্নলিখিত তথ্যপুঞ্জের সমক-পার্থক নির্ণয় কর।

শ্রেণী-অন্তর	f	x'	fx'	$f(x')^2$
75 – 79	1	5	5	25
70 – 74	2	4	8	32
65 – 69	1	3	3	9
60 – 64	7	2	14	28
55 – 59	2	1	2	2
50 – 54	9	0	0	0
45 – 49	2	–1	–2	2
40 – 44	2	–2	–4	8
35 – 39	0	–3	0	0
30 – 34	1	–4	–4	16
25 – 29	1	–5	–5	25
সমষ্টি =	28(= N)		17	147

এস্থলে শুদ্ধি (Correction) $C = \frac{\Sigma fx'}{N}$

$= \frac{17}{28} = \cdot 60$

$\therefore \quad C^2 = \cdot 3684.$

$\frac{\Sigma f(x')^2}{N} = \frac{147}{28} = 5\cdot 25$

$\therefore \quad \text{S. D.} = \left(\sqrt{\frac{\Sigma f(x')^2}{N} - C^2}\right) i$

$= 5\sqrt{5\cdot 25 - \cdot 3684}$

$= 5\sqrt{4\cdot 8816}$

$= 5 \times 2\cdot 208 = 11\cdot 040$

i = শ্রেণী অন্তরের প্রসার = 5

$\Sigma fx' = 17, \quad \Sigma f(x')^2 = 147$

সূত্রাকারে $\text{S. D.} = \sqrt{\left(\frac{\Sigma f(x')^2}{N} - C^2\right)} \times i$

উদা. 5. শ্রেণী-অন্তর ও পরিসংখ্যা দেওয়া আছে ; সমক পার্থক্য নির্ণয় কর।

শ্রেণী-অন্তর	f	x'	fx'	$f(x')^2$
95 – 99	1	5	5	25
90 – 94	2	4	8	32
85 – 89	4	3	12	36
80 – 84	5	2	10	20
75 – 79	8	1	8 =43	8
70 – 74	10	0	0	0
65 – 69	6	–1	–6	6
60 – 64	4	–2	–8	16
55 – 59	4	–3	–12	36
50 – 54	2	–4	–8	32
45 – 49	3	–5	–15	75
40 – 44	1	–6	–6 =55	36
সমষ্টি = N = 50			$\Sigma fx' = -12$	322{$\Sigma f(x')^2$}

এস্থলে, শুদ্ধি $= C = \frac{43-55}{50} = \frac{-12}{50}$

$= -\cdot 24$

$\therefore \quad C^2 = (-\cdot 24)^2 = \cdot 0576$

$\therefore \quad$ S. D.

$= \sqrt{\left(\frac{\Sigma f(x')^2}{N} - C^2\right)} \times i$

$= \sqrt{\left(\frac{322}{50} - \cdot 0576\right)} \times i$

$= \sqrt{(6\cdot 44 - \cdot 0576)}\ i$

$= \sqrt{6\cdot 3824} \times 5$

$= 2\cdot 526 \times 5 = 12\cdot 630$

$= 12\cdot 63.$

দ্রষ্টব্য ঃ সমক পার্থক্য বা S. D. যত ক্ষুদ্র হইবে অংশকটি তত অন্তঃসম (homogeneous) এবং S. D. যত বেশী হইবে অংশকটি তত অন্তর্বিষম (heterogenous).

সমক পার্থক্য নির্ণয়ের নিয়মাবলীর সংক্ষিপ্তসার ঃ

(a) পরিসংখ্যা সমষ্টি (N) নির্ণয় কর।

(b) সর্বোচ্চ পরিসংখ্যার ঘরে কল্পিত গড় (assumed mean) ধরিয়া লও।

(c) উক্ত গড় হইতে শ্রেণী হিসাবে দূরত্ব (x') নির্ণয় কর।

(d) ধনাত্মক ও ঋণাত্মক fx' নির্ণয় কর।

(e) fx'-কে পুনরায় x' দ্বারা গুণ কর ; গুণফল $f(x')^2$ হইবে।

(f) শুদ্ধিমান (C) এবং (C^2) নির্ণয় কর।

(g) $\sqrt{\dfrac{\Sigma f(x')^2}{N} - C^2}$-কে শ্রেণী-অন্তর ($i$) দ্বারা গুণ কর।

লব্ধ গুণফলই নির্ণেয় সমক পার্থক্য S. D.

প্রশ্নমালা 3

1. 6, 8, 10, 12 এবং 14 এই পাঁচটি নম্বরের গড় পার্থক্য (M. D.) নির্ণয় কর। [M. D. = 2·4]

2. 90, 89, 88, 87, 86, 84, 82, 81, 80, 78, 77, 76, 75, 73, 72 এই 15টি নম্বরের গড় পার্থক্য (M. D.) নির্ণয় কর। [M. D. = 5]

3. 2, 9, 4, 7, 8 এই নম্বর 5টির S. D. নির্ণয় করা [2·6]

4. 4, 5, 8, 7, 3, 10 এই 5টি নম্বরের S. D. নির্ণয় কর। [2·41]

5. 1, 2, 3, 4, 7, 8, 10 এই 7টি নম্বরের S. D. নির্ণয় কর। [3·11]

6. নম্বর এবং পরিসংখ্যার তালিকা দেওয়া হইল ; S. D. নির্ণয় কর। [2·45]

নম্বর	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
পরিসংখ্যা	1	2	2	1	4	6	3	3	2	1	1

7. 55-টি বালকের 100 নম্বরের ইংরেজী সাহিত্যের পরীক্ষার নম্বর শ্রেণী-অন্তর ও পরিসংখ্যা আকারে দেওয়া হইল ; S. D. নির্ণয় কর। [18·8]

শ্রেণী-অন্তর	1—10	11—20	21—30	31—40	41—50	51—60	61—70	71—80	81—90	91—100
পরিসংখ্যা	1	3	6	10	12	11	6	3	2	1

8. শ্রেণী-অন্তর এবং পরিসংখ্যার তালিকা দেওয়া হইল : S. D. নির্ণয় কর।

শ্রেণী-অন্তর	50—51	52—53	54—55	56—57	58—59	60—61	62—63	64—65	66—67	68—69	70—71
পরিসংখ্যা	1	3	2	4	5	7	6	4	3	2	2

[4·98]

9. শ্রেণী-অন্তর এবং পরিসংখ্যা দেওয়া হইল ; গড় পার্থক্য (M. D.) নির্ণয় কর। [M. D. = 10·04]

শ্রেণী-অন্তর	40—44	45—49	50—54	55—59	60—64	65—69	70—74	75—79	80—84	85—89	90—94	95—99
পরিসংখ্যা	1	3	2	4	4	6	10	8	5	4	2	1

উত্তরমালা

পাটীগণিত

প্রশ্নমালা 1 (পৃঃ 8—10)

1. (1) (*i*) 8·3025 কি. মি. (*ii*) 8302·5 মি. (*iii*) 830250 সে. মি.
(2) (*i*) 20·00704 কি. মি (*ii*) 20007·04 মি. (*iii*) 2000704 সে. মি.

2. (1) (*i*) 5·333 কি. গ্রা. (*ii*) 5333 গ্রা. (*iii*) 53330 ডেসি মি.
(2) (*i*) 8·076054 কি. গ্রা. (*ii*) 8076·054 গ্রা. (*iii*) 80760·54 ডেসি গ্রা.

3. (1) 1 কি. গ্রা. 3 হে. গ্রা. 4 ডেকা গ্রা. 6 গ্রা.
(2) 4 ডেকা গ্রা. 3 গ্রা. 2 ডেসি গ্রা. 6 সে. গ্রা.
(3) 8 হে. গ্রা. 2 ডেকা গ্রা. 3 ডেসি গ্রা. 4 সে. গ্রা. 5 মিলি গ্রা.
(4) 2 মিরি. মি. 5 কি. মি. 2 হে. মি. 3 ডেকা মি. 4 মি.
(5) 1 হে. মি. 2 ডেকা মি. 5 মি. 3 ডেসি মি. 2 মিলি মি.
(6) 6 কি. মি. 7 হে. মি. 9 মি. 2 সে. মি. 1 মিলি মি. 4 মাইক্রন
(7) 4 হে. মি. 3 ডেকা মি. 2 মি. 5 ডেসি মি. 6 সে. মি.

4. 2437 ন. প. 5. 27 টাকা 9 ন. প.

6. (1) 1 ডেকা মি. 6 মি. 9 ডেসি মি. 1 সে. মি.
(2) 1 ডেকা গ্রা. 6 গ্রা. 3 ডেসি গ্রা. 3 সে. গ্রা. 4 মিলি গ্রা.
(3) 79 টা. 56 ন. প. (4) 218 টা. 99 ন. প.

7. (1) 5 টা. 93 ন. প. (2) 23 টা. 83 ন. প.

8. 577 টা. 22 ন. প.

9. 105 মিরি মি. 5 কি. মি. 6 হে. মি. 4 ডেকা মি. 1 ডেসি মি. 5 সে. মি.

10. 32 মিরি গ্রা. 9 কি. গ্রা. 3 হে. গ্রা. 5 ডেকা গ্রা. 5 গ্রাম।

11. 2874 টাকা 90 ন. প. 12. 1 ডেসি মি. 7 সে. মি. 5 মিলি মি. 300 মাইক্রন।

13· 20 টা. 16 ন. প. 14. 16500 15. 12 মিটার

16. 589·4 কি. গ্রা. **17.** 450 কি. মি. **18.** 4 কুইণ্টাল
19. 40. **20.** 1614·7 মি. **21.** 1200 মি.
22. 24800 মাইল **23.** 11 মাইল 260 গজ **24.** 70·4 গজ

প্রশ্নমালা 2 (পৃঃ 14)

1. 25000500 ব. মি. **2.** 12·038756 ব. ডেকা মি.
3. 3326034 ঘন সে. মি. **4.** 23·456789 ঘন মি.
5. 60500 সেন্টি-আর
6. 1000 ঘন সে. মি. ; 1000000 ঘ. সে. মি.
7. 1000 গ্রাম **8.** 45000000 ঘ. মিলি মি.
9. 27500 বর্গ মি. **10.** 38375000780 ঘ. মি.

প্রশ্নমালা 3 (পৃঃ 17-18)

1. $44\frac{4}{5}$ **2.** $\frac{16}{49}$ **3.** $10\frac{29}{70}$ **4.** $\frac{6}{25}$ **5.** 1 **6.** 1
7. 2 **8.** 2 **9.** $\frac{5}{12}$ **10.** 75 **11.** $\frac{11}{16}$ **12.** $\frac{2}{3}$
13. 4 **14.** উভয় পক্ষ $=\frac{60}{77}$ **15.** $3\frac{53}{96}$ **16.** $\frac{75}{208}$
17. 10 টা. 20 ন. প. **18.** $\frac{3}{260}$; 60 **19.** $\frac{5}{12}$, 10
20. $\frac{1}{16}$; $13\frac{7}{11}$ **21.** $\frac{5}{16}$, $18\frac{3}{4}$ **22.** $\frac{7}{8}$ **23.** 60 ফুট
24. 1 টা. 50 ন. প. **25.** 5040 টাকা **26.** 75 গ্যালন
27. 60টি **28.** $\frac{1}{16}$ **29.** 24 সের।

প্রশ্নমালা 4 (পৃঃ 22-23)

1. 1 **2.** 4·361 **3.** 1·609 **4.** 196734·4648
5. 7·8596392 **6.** ·001682176 **7.** ·0008801968
8. 1·112111 **9.** 1·953125 **10.** 145·4544
11. ·215541 **12.** 5·4 **13.** ·9325 **14.** 2980000
15. 6·1 **16.** 740·9 **17.** 960 **18.** ·06011
19. ·02562 **20.** 117·977 **21.** 80·09 **22.** 8 বার
23. 560 **24.** ·8125 ; 7·425 **25.** $\frac{9}{40}$, $\frac{3}{400}$, $83\frac{1}{400}$
26. ·25 ; 7·5 **27.** ·08 ; 1·2 **28.** ·006 ; 60
29. ·064 ; 32 **30.** ·14 **31.** 158·4 সেকেণ্ড
32. ·2 **33.** 4·3 **34.** 1
35. 2 **36.** 1 **37.** 3 **38.** ·12 **39.** ·12 **40.** 1

প্রশ্নমালা 5 (পৃঃ 29-31)

1. (*i*) $\cdot 8\dot{3}$ (*ii*) $\cdot 41\dot{6}$ (*iii*) $5\cdot 0\dot{0}\dot{9}$ (*iv*) $\cdot 0\dot{0}1\dot{8}$ (*v*) $\cdot 0\dot{7}1428\dot{5}$

2. (*i*) $\frac{5}{33}$ (*ii*) $\frac{13}{55}$ (*iii*) $5\frac{15}{74}$ (*iv*) $8\frac{7}{3000}$ (*v*) $\frac{2}{7}$ (*vi*) $\frac{1}{70}$ (*vii*) $\frac{8}{13}$

3. (*i*) $26\cdot 2\dot{9}\dot{6}$ (*ii*) $4\cdot 6\dot{1}78\dot{9}$ **4.** (*i*) $\cdot 533\dot{8}6\dot{4}$ (*ii*) $\cdot 109\dot{0}2\dot{6}$

5. (*i*) $\cdot 086\dot{2}$ (*ii*) $\cdot 2$ **6.** (*i*) $\cdot 3\dot{2}\dot{7}$ (*ii*) $\cdot 4\dot{4}5\dot{9}$

7. 1 **8.** $\cdot 58\dot{3}$ **9.** $2\cdot 4$ **10.** $5\cdot\dot{8}\dot{1}$ **11,** 25

12. 1 **13.** $\cdot\dot{0}3\dot{7}$ **14.** 7 **15.** 44 **16.** 14

17. 2 **18.** 5 **19.** 8 **20.** 9 **21.** 350

22. $86\cdot 29\dot{1}\dot{6}$ **23,** 1 **24.** $\cdot 8\dot{3}$

প্রশ্নমালা 6 (পৃঃ 32)

1. 1 পা. 7 শি. **2.** 1 পা. 2 শি. 9 পে. **3.** 1 মা. 2 ফা.

4. 10 পা. **5.** 7 পা. 10 শি. **6.** 8 পা. 1 শি.

7. $\cdot 0015625$ **8.** $\cdot 0041\dot{6}$ **9.** $\cdot 01\dot{6}$

10. $\cdot\dot{1}4285\dot{7}$ **11.** $\cdot 015625$ **12.** $\cdot 00044\dot{6}\dot{4}2857\dot{1}$

13. $\cdot 0011\dot{3}\dot{6}$ **14.** $\cdot 5$ **15.** $\cdot 041\dot{6}$

16. $\cdot 0203125$ **17.** 1 **18.** $\cdot 5$ **19.** $\cdot 6875$

প্রশ্নমালা 7 (পৃঃ 35)

1. 1·257 ; 1·2569 **2.** 10·142 ; 10·1417

3. ·018 ; ·0183 **4.** ·004 ; ·0037

5. 123·010 ; 123·0095 **6.** ·210 ; ·2099 **7.** 2·32

8. 12·6 **9.** ·358 **10.** ·0359 **11.** ·00692

12. 29·5 **13.** ·440 **14.** 26200 **15.** 43300

16. 23000 **17.** 108000 **18.** 80000 **19.** ·4286

20. ·2632 **21.** ·0709 **22.** 43·4783 **23,** ·8235

24. 2·419

প্রশ্নমালা 8 (পৃঃ 38)

1. 77 টা. 85 ন. প. **2.** 290 পা. **3.** 7214 পা. 16 শি. 3 পে.

4. 4138 পা. 8 শি. 9 পে. **5.** 310 মণ 7 সের 8 ছ.

6. 6733 মণ 23 সের 12 ছটাক **7.** 11470 টা. 80 ন. প.

8. 16 টাকা 25 ন. প. **9.** 174 টা. 5 ন. প.

10. 863 টা. 55 ন. প. **11.** 375 মণ 16 সের 11 ছটাক

12. 4033·125 টাকা

প্রশ্নমালা 9 (পৃঃ 41)

1. 25 **2.** 28 **3.** 32 **4.** 400 **5.** 2 **6.** 2
7. 3600 **8.** 900 **9.** 16 **10.** 500 **11.** 900

প্রশ্নমালা 10 (পৃঃ 45)

1. 165 **2.** 345 **3.** 1001 **4.** ·312 **5.** ·0316
6. 9·042 **7.** $\frac{13}{16}$ **8.** $2\frac{3}{23}$ **9.** $5\cdot\dot{3}$
10. (*i*) 7·071 (*ii*) 9·746 (*iii*) 23·044 (*iv*) 1·772 **11.** 125
12. 310 **13.** 142 **14.** 1 **15.** 76 **16.** 24
17. 124 **18.** 60 **19.** 9 ; 15 ; 16.

প্রশ্নমালা 11 (পৃঃ 50-52)

1. 650·25 ব. মি. **2.** 204·8 ব. মি. **3.** 225
4. 968 গজ. **5.** 24 **6.** 18 **7.** 80 টাকা
8. 12 মিটার **9.** 6 মি. 45 সে. **10.** 355 টা. 20 ন. প.
11. 1320 গজ **12.** 117 ফুট **13.** 2 ফুট **14.** 21 গজ, 7 গজ
15. 1240 টাকা **16.** 1024 **17.** 2624 ব. ফু. ; 102টা. $4\frac{4}{9}$ ন. প.
18. 491 পা. 8 শি. **19.** 1120 টাকা **20.** 304 এ. 9 ব. গ.
21. 438 টা. 75 ন. প. **22.** 144 গজ **23.** $11\frac{1}{4}$ ফুট
24. 87 টা. 75 ন.প. **25.** 10 ফুট **26.** 5 টা. $78\frac{2}{3}$ ন. প.
27. 63 টা. $49\frac{13}{63}$ ন. প. **28.** 16 একর

প্রশ্নমালা 12 (পৃঃ 54-55)

1. 840 ঘ. মি. **2.** 45 ঘ. ফু. **3.** 12 ঘ. ফু. 1216 ঘ. ই.
4. 2 ফু. 6 ই. **5.** 3 ফু. 6 ই. **6.** 10 ফুট **7.** 4375 পা.
8, 150 পা. **9.** 400 গ্যা. **10.** 300 ব. ফু. **11.** 72
12. $1417\frac{31}{32}$ টন **13.** 4320 **14.** 450 ব. ফু.
15. 18·75 ডেসি মি., 6·25 ডেসি মি.

প্রশ্নমালা 13 (পৃঃ 58-59)

1. 10 দিন **2.** 14 টা. 8 ন. প. **3.** 112 কি. মি. **4.** 45 মাইল
5. 16 আ. **6.** 253 টা. 50 ন. প. **7.** 20 দিন **8.** 15
9. 7 দিন **10.** 1430

প্রশ্নমালা 14 (পৃঃ 61-62)

1. $4\frac{4}{5}$ 2. 18 দিন 3. $5\frac{1}{4}$ দিন 4. $7\frac{7}{10}$ দিন
5. 30 দিন 6. 6 দিন 7. 8 দিন 8. 3 দিন
9. 9 দিন 10. ক 8·43 টাকা ; খ 11·25 টাকা ; গ 2·82 টাকা
11. 16 দিন

প্রশ্নমালা 15 (পৃঃ 63-64)

1. $9\frac{3}{5}$ মিনিট 2. 4 মিনিট 3. 30 ঘণ্টা 4. 36 মিনিট
5. 1 ঘ. 40 মি. 6. 8 মিনিট 7. 8 মাইল 8. $8\frac{4}{7}$ মিনিট

প্রশ্নমালা 16 (পৃঃ 68-70)

1. 132 মাইল 2. 9 দিন 3. 5 মিনিট
4. $4\frac{1}{2}$ ঘণ্টা পরে P হইতে $20\frac{1}{4}$ মাইল দূরে 5. 99 ফুট 6. 6 সেকেণ্ড
7. 30 মাইল 8. 8 সেকেণ্ড ; 15 সেকেণ্ড
9. 9 টা $9\frac{3}{13}$ মি. 10. $39\frac{3}{8}$ মাইল 11. 18 মাইল 12. 325 গজ
13. 4 সেকেণ্ড 14. 110 মাইল 15. $20\frac{2}{3}$ মা. 16. 9 মাইল
17. 10 ঘ. 42 মি. 18. 444 মাইল 19. 150 গজ
20. 81 সে., 9 সে. 21. 100 গজ 22. 5 মাইল, 3 মাইল
23. 3 মাইল 24. $4\frac{1}{2}$ মাইল

প্রশ্নমালা 17 (পৃঃ 73-76)

1. 61% 2. 2721 3. 450 টাকা 4. 300 টাকা
5. 80 টাকা 6. 700 টাকা 7. 3500 টাকা 8. 1000
9. 15360 10. 3360 টাকা 11. 10000 টাকা 12. 1800 টাকা
13. 10150 14. 21218 15. 529 টাকা 16. 3000 টাকা
17. $9\frac{1}{11}$% 18. $18\frac{2}{11}$% 19. 88% 20. 84000 টাকা
21. $42\frac{6}{7}$% 22. $13\frac{1}{23}$% 23. 25% 24. 1% কম
25. 2·50 টাকা 26. 12 ন. প., 9 ন. প. 27. 3·125 টাকা
28. 23% 29. 1800 30. 380 31. 300
32. 200 33. ·6125%

প্রশ্নমালা 18 (পৃঃ 77)

1. 60·50 টাকা 2. 87·75 টাকা 3. 16 শি. 3 পে.
4. 1075 টাকা 5. 1425 টাকা

প্রশ্নমালা 19 (পৃঃ 79)

1. 17 টাকা 28 ন. প. 2. 37 টাকা 50 ন. প. 3. 11 পা. 6 শি.
4. 16043 টাকা 84 ন. প. 5. 35 পা. 16 শি. 10$\frac{11}{25}$ পে.
6. 12 পা. 18 শি. 10$\frac{62}{73}$ পে. 7. 28054 টাকা 34 ন. প.

প্রশ্নমালা 20 (পৃঃ 80)

1. 300 টাকা 2. 1205 টাকা 3. 9000 টাকা 4. 75 টাকা
5. 5050 টাকা

প্রশ্নমালা 21 (পৃঃ 81)

1. 5% 2. 5$\frac{1}{2}$% 3. 3$\frac{1}{4}$% 4. 6% 5. 16%
6. 5% 7. 8%

প্রশ্নমালা 22 (পৃঃ 82-83)

1. 4 বৎসর 2. 8$\frac{1}{2}$ বৎসর 3. 16$\frac{2}{3}$ বৎসর
4. 5 বৎসর 5. 5 বৎসর

প্রশ্নমালা 23 (পৃঃ 84-85)

1. 8$\frac{1}{3}$ বৎসর 2. 800 টাকা ; 7$\frac{1}{2}$% 3. 225 টাকা 4. 4 বৎসর
5. 6$\frac{1}{4}$% 6. 1942 টাকা ; 7% 7. 225 টাকা ; 7$\frac{1}{5}$%
8. 250 টাকা 9. 5$\frac{13}{40}$% 10. 10000 টাকা 11. 32 বৎসর
12. 6% 13. 4% 14. 10% 15. 5%
16. 12000 টাকা 17. 24000 টাকা 18. 5 টাকা 75 ন. প.

প্রশ্নমালা 24 (পৃঃ 91-92)

1. 10·25 টাকা 2. 25·63 টাকা 3. 24·97 টাকা
4. 57·30 টাকা 5. 70·93 টাকা 6. 81·60 টাকা
7. 135 পা. 15 শি. 8. 21·37 টাকা 9. 64 পা. 4 শি. 6 পে.
10. 398·93 টাকা 11. 826·88 টাকা 12. 1189·76 টাকা
13. 376 পা. 18 শি. 2·8 পে. 14. 993 পা. 8 শি. 9 পে.
15. 676·54 টাকা 16. 1940 টাকা 17. 30517·58 টাকা
18. 6744273 টাকা 19. 38·45 টাকা 20. 113·74 টাকা
21. 49 পা. 9 শি. 2 পে. 22. 5·72 টাকা
23. 14623232 24. 77·53 টাকা 25. 6000 টাকা

প্রশ্নমালা 25 (পৃঃ 96-100)

1. 15%	**2.** 10%	**3.** 2 টা. 52 ন. প.	**4.** 180 টা.
5. 300 টা.	**6.** 792 টা.	**7.** 10% ক্ষতি	**8.** 25%
9. 29·75 টা.	**10.** 250 টা.	**11.** $12\frac{1}{2}$% ক্ষতি	**12.** $77\frac{11}{17}$ টা.
13. $12\frac{1}{2}$%	**14.** $6\frac{2}{3}$% লাভ	**15.** $29\frac{3}{5}$% লাভ	**16.** $12\frac{1}{2}$% লাভ
17. $2\frac{7}{9}$ পা.	**18.** 6 টা.	**19.** 720 টা.	**20.** 4625 টা.
21. $17\frac{1}{11}$%	**22.** 40 টা.	**23.** $2\frac{2}{49}$% ক্ষতি	**24.** 105 পা.
25. $12\frac{15}{37}$ টা.	**26.** 20%	**27.** 4 শি. 6 পে.	**28.** 100 টা.
29. 200 টি	**30.** 384 টা.	**31.** 36%	**32.** 25%
33. $33\frac{1}{3}$%	**34.** 20%	**35.** $\frac{13}{45}$ গ্যা.	**36.** 1000 টা.
37. 25 টা.	**38.** 6 টা.	**39.** 2·50 টা.	**40.** 50 টা.
41. 3·75 টা.	**42.** 520 টা.	**43.** 160 টা. ক্ষতি।	

প্রশ্নমালা 26 (পৃঃ 106-107)

1. $\frac{2}{3}$	**2.** $\frac{1}{2}$	**3.** $\frac{22}{17}$	**4.** 1 : 2
5. 19 : 100	**6.** 48	**7.** 20	**8.** 34
9. 50	**10.** 2·7	**11.** 3	**12.** 63
13. $2\frac{4}{5}$	**14.** ·18	**15.** 16 বৎসর	**16.** 15 : 8
17. 25 : 27	**18.** 165 গ্যা. ; 45 গ্যা.		**19.** 12 সের
20. 4 সের	**21.** 7 : 2, 9 : 4	**22.** 31 : 16	**23.** 25 : 24

প্রশ্নমালা 27 (পৃঃ 109-110)

1. 100 টা., 150 টা., 200 টা. **2.** 60 টা., 80 টা., 100 টা.

3. 1800 টা. 1440 টা. 480 টা. **4.** 2 পা. 5 শি., 3 পা.

5. বালক 5 শি. 6 পে., স্ত্রীলোক 16 শি. 6 পে., পুরুষ 1 পা. 13 শি.

6. ঘোড়া 24 টা., গরু 12 টা., ভেড়া 1·50 টা.

7. 4 টা., 3 টা., 2 টা. **8.** 60, 40, 30, 24 টা.

9. 56000, 48000, 42000 টা. **10.** 48 ইঞ্চি

11. 7 হ. 2 কো. ; 1 হ. ; 1 হ. 2 কো. **12.** 80 টাকা, 100 আধুলি, 120 সিকি

13. 200 টা., 400 আ., 800 সিকি ; 600 টা. **14.** 8 ন. প., 56 ন. প.

প্রশ্নমালা 28 (পৃঃ 111-112)

1. 280, 220 টা. 2. 300 টা. 3. 200, 250, 300 টা.
4. 270, 240 টা. 5. 736 টা. 6. ক 492 টা., খ 738 টা.
7. ক 4320 টা., খ 4050 টা., গ 3780 টা. 8. ক 230 পা., খ 300 পা.
9. ক 160 টা., খ 240 টা., গ 600 টা. 10. 7740 টা.

প্রশ্নমালা 29 (পৃঃ 115)

1. 5 : 4 2. 2 : 1 3. 10 : 23 4. 2 : 1
5. 2 : 3 6. $2\frac{2}{3}$ ছটাক 7. 7 : 4 8. $\frac{1}{5}$ অংশ

প্রশ্নমালা 30 (পৃঃ 117-118)

1. 116·25 টাকা 2. 4146·75 টাকা 3. 66·60 টাকা
4. 3575 টাকা 5. 3900 টাকা 6. 97·28 টাকা
7. 5130·12 টাকা 8. 100·725 টাকা 9. 3852 টাকা
10. 5560 টাকা ; $4\frac{20}{139}$ পাই

প্রশ্নমালা 31 (পৃঃ 120)

1. 200 টাকা 2. $7\frac{1}{2}$ পাউণ্ড 3. 6 4. 284 5. 400 টাকা

প্রশ্নমালা 32 (পৃঃ 128)

1. 825 পাউণ্ড 2. 1875 টাকা 3. 1050 পাউণ্ড
4. 250 টাকা 5. 1 টা. = 1 শি. 6 পে. 6. 3000 পাউণ্ড
7. 1231 পা. 17 শি. 6 পে. 8. 25·25 টাকা ; 2499·75 টাকা
9. 4 পা. 16 শি. 10. নামতঃ 6ই সেপ্টেম্বর ; আইনতঃ 9ই সেপ্টেম্বর

পরিমিতি

প্রশ্নমালা 1 (পৃঃ 132)

1. 10 ব. গ. 3 ব. ফু. 108 ব. ই. 2. 337·5 বর্গ মিটার
3. 48 বর্গ গজ 4. 30 বর্গ মিটার 5. 42·4 বর্গ মিটার
6. 96 বর্গ মিটার 7. 2·94 বর্গ গজ 8. 24 বর্গ ফুট
9. 30 বর্গ মিটার 10. 69·36 বর্গ ফুট 11. 244·9 বর্গ মিটার
12. 110·85 বর্গ ফুট 13. 173·2 বর্গ মিটাব 14. 13·5 বর্গ ফুট
15. 32 মিটার 16. 16·2 ফুট 17. 31 ফুট
18. 5 সেন্টি মিটার 19. 5·67 টাকা

প্রশ্নমালা 2 (পৃঃ 134)

1. 29 গ. 1 ফু. 2. 48·4 কি. মি. 3. 28 গ. 4 ই.
4. $5\frac{1}{2}$ ফু. 5. 140 গজ 6. 56 কি. মি.
7. 44 সে. মি. ; 154 ব. সে. মি.
8. (1) 17 ব. গ. 1 ব.ফু. (2) 4 ব.ফু. 40 ব.ই. (3) 26 ব.ফু. 106 ব.ই.
9. 3977 মাইল 10. $19\frac{2}{7}$ 11. 2520 বার
12. $10\frac{2}{11}$ ব. ফু. 13. 22 ব. ই. 14. 3 টাকা
15. 5 ফু. 6 ই. 16. 3 সে. মি. 17. 7 গজ 18. 180 টাকা

প্রশ্নমালা 3 (পৃঃ 137—138)

1. 1 ঘণ্টা 2. $5\frac{3}{5}$ ফু. 3. 1105 4. 1 ফু. 2 ই.
5. $28\frac{4}{9}$ পাউণ্ড 6. 42·4263 ফু. 7. $314\frac{1}{2}$ ঘন ফুট

প্রশ্নমালা 4 (পৃঃ 139-140)

1. (i) 220 ব. সে. মি. ; $377\frac{1}{7}$ ব. সে. মি. ; 550 ঘ. সে. মি.
(ii) 2 ব. ফু. 64 ব. ই. ; 3 ব. ফু. $20\frac{4}{7}$ ব. ই. ; 704 ঘ. ই.
(iii) $414\frac{6}{7}$ ব. ফু. ; $641\frac{1}{7}$ ব. ফু. ; $1244\frac{4}{7}$ ঘ. ফু.
2. $\frac{2}{11}$ ই. 3. 40 টা. 4. $127\frac{51}{110}$ ই. 5. $735\frac{3}{7}$ ব. ই.
6. 1089 ঘ. ফু. 7. 2·8 ই 8. $8\frac{3}{4}$ মিনিট 9. 4·48 ফু.
10. $2\frac{3}{4}$ ঘ. ফু.

প্রশ্নমালা 5 (পৃঃ 142)

1. (i) 616 ব.ই. ; $1437\frac{1}{3}$ ঘ.ই. (ii) 17 ব.ফু. 16 ব.ই. ; $11498\frac{2}{3}$ ঘ.ই.
(iii) 154 ব.ই. ; $179\frac{2}{3}$ ঘ.ই. (iv) $221\frac{9}{25}$ ব.ই. ; $310\frac{58}{125}$ ঘ.ই.
2. 84 সে.মি., 154 ব. সে.মি. 3. 6 মণ 24 সের 4. $253\frac{143}{189}$ পা.
5. 21952 6. 19404 ঘ.ই. ; 4158 ব.ই.
7. 1000000 : 19683 8. 12 সে. মি.